, বর্ধমান, উত্তরবঙ্গ, কল্যাণী, বিশ্বভারতী, যাদবপুর প্রভৃতি বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. এড্. সিলেবাস অনুযায়ী লিখিত।

গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি

(A TEXT-BOOK ON THE METHODS OF TEACHING MATHEMATICS)

[বাংলা ভাষায় প্রকাশিত প্রথম পূর্ণাঙ্গ পুস্তক]

শিক্ষামুখী মনোবিজ্ঞান, মানসিক ও শিক্ষাগত মূল্যায়ন, Method of Teaching Science ও স্কুলপাঠ্য অন্যান্য গ্রন্থ প্রণেতা

শ্রীশ্যামাপ্রসাদ চট্টরাজ

এম. এস. সি. (সুবর্ণ পদক প্রাপ্ত), বি. টি. (প্রথম শ্রেণীতে প্রথম),
উপাধ্যক্ষ ও শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগীয় প্রধান,
ফকিরচাঁদ কলেজ, ডায়মণ্ডহারবার।

কল্যাণী প্রকাশনী

কলিকাতা

প্রকাশক :
"কল্যাণী প্রকাশনী"র পক্ষে শৈবাল ভট্টাচার্য
বারাসত, ২৪ পরগণা

চতুর্থ সংস্করণ : সেপ্টেম্বর ১৯৭৭

প্রাপ্তিস্থান :

সেন্ট্রাল লাইব্রেরী, ১৫।৩ শ্যামাচরণ দে স্ট্রীট, কলিকাতা-৭৩
ঊষা পাবলিশিং হাউস, ১৩।১ বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা-৭৩
জে. এন. ঘোষ এণ্ড সন্স, ৬ বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা-৭৩

ষোল টাকা

মুদ্রাকর :
শ্রীনিশীথকুমার ঘোষ
দি সত্যনারায়ণ প্রিন্টিং ওয়ার্কস্
২০৯এ, বিধান সরণী
কলিকাতা-৬

উৎসর্গ

পরম পূজনীয় ৺গোপাল চন্দ্র ঠাকুরের

পূণ্য স্মৃতির উদ্দেশ্যে—

REVISED SYLLABUS FOR THE B. ED. EXAMINATION OF THE CALCUTTA UNIVERSITY

Methods :—Aims and values of teaching Mathematics in schools. General methods of approach-analytic and synthetic, inductive and deductive. Place of concretisation in Mathematics. Place of History of Mathematics in the teaching of the subject. Relation between Arithmetic, Algebra, and Geometry. Correlation of Mathematics with other in the School. Practical work and use of appliances in connection with the teaching of Mathematics. Mathematics curriculum and syllabuses. Evaluation of teaching and pupil's work. Teacher's preparation and planning.

Arithmetic : Methods of teaching, Concept of number, the first four rules, vulgar and decimal fractions including recurring decimal, extraction of square root, ratio and proportion, metric system, checks and rough, estimates in arithmetic. Solution of problems of various arithmetical operations. Application of algebra to arithmetic.

Elements of Statistics : When and how to introduce.

Algebra : Scope and functions. Symbolism, generalisation, fundamental laws and functionality. Methods of teaching ; directed numbers. Formulae factors, fractions, equation, irrational numbers, indices, surds involutions and evolutions, A. P. G. P., variations, logarithms, problems graphs, theory of quadratic equations and expressions. Purmutations and Combinations, binomial theorem with positive integral index, elementary idea of some of the infinite geometric series, exponential and logarithmic series

Geometry : Early teaching of Geometry. Place of intuition, observation and experience, Geometrical concepts. Simple practical exercises in early-stages. Experimental, analytic and synthetic stages and the principles of their treatment. Standard theorems and riders.

Algebra in Geometry. Origin and development of Geometry. Euclidean and non-Euclidean Geometry.

Place of solid geometry and methods of teaching it. Methods of teaching mensuration.

Teaching of fundamental principles of Trigonometry and Co-ordinate Geometry ; how and when to introduce them in School Mathematics.

॥ মুখবন্ধ ॥

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. টি. পাঠক্রম ১৯৬৫ সালে আমূল সংশোধিত ও পরিবর্তিত হয়েছে। কিন্তু এই পরিবর্তিত পাঠক্রম অনুযায়ী বিভিন্ন বিষয়ের পাঠ্য-পুস্তক (বিশেষতঃ বাংলা ভাষায় লিখিত) বর্তমানে এখনও অনেক কম। গণিত সম্বন্ধে বলা যায়—এ বিষয়ে বাংলা ভাষায় লিখিত কোন পাঠ্যপুস্তকই নেই। শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগে অধ্যাপনার অভিজ্ঞতায় শিক্ষার্থীদের এ অভাবটি প্রতিনিয়ত উপলব্ধি করেছি। এই বিষয়ের উপর বাংলায় বই রচনা করার জন্য প্রাক্তন ও বর্তমান ছাত্র-ছাত্রীদের নিকট থেকে বহুদিন ধরেই তাগিদ পেয়ে আসছি। কিন্তু নানাবিধ ঝামেলার জন্য এতদিন সে কাজে অগ্রসর হতে পারিনি। অনেকের সুবিধা হবে, এই ভেবে ঝামেলা ও অন্যান্য নানাবিধ সমস্যা দূরে সরিয়ে বইটি লেখার জন্য আত্মনিয়োগ করেছিলাম। প্রথমেই জানিয়ে রাখি, প্রকাশক মহাশয় এর জন্য কিন্তু বেশী সময় নিতে দেননি।

বইটিতে পশ্চিমবঙ্গের বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের বি. টি. পাঠক্রম অনুসরণ করার চেষ্টা করা হয়েছে। বিভিন্ন সমস্যাকে বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিকোণ থেকে দেখে সেগুলিকে সহজ ও সরল ভাষায় প্রকাশ করার চেষ্টা করেছি। তবে এ ব্যাপারে পূর্বসূরী কেউ না থাকায় মাঝে মাঝে বাধাও পেতে হয়েছে। ইংরাজী বই থেকে পাঠ শিখে নিতে সময়ও যেমন বেশী লাগে, পরিশ্রমও তেমনি কম হয় না। মাতৃভাষার মাধ্যমে ভাবের আদান-প্রদান সহজ হয় এবং বিষয়বস্তু সম্বন্ধে উপলব্ধিও স্থায়ী হয়। প্রধানতঃ এই কারণেই বাংলা ভাষায় বইটির পরিকল্পনা রূপায়ণের চেষ্টা করেছি। শিক্ষক ও শিক্ষণ-শিক্ষার্থী মহলে আমার এই ক্ষুদ্র প্রচেষ্টা আদৃত হবে বলেই আশা রাখি এবং আমার এই প্রচেষ্টা থেকে কেউ সামান্যতম উপকৃত হলেই আমার শ্রমের সার্থকতা প্রতিপন্ন হবে।

প্রাক্তন সহকর্মী অধ্যাপক বন্ধুবর মোহিতরঞ্জন বন্দ্যোপাধ্যায় ক্রমাগত উৎসাহ দিয়ে আমার প্রচেষ্টাকে নিরন্তর শক্তি জুগিয়েছেন। তা ছাড়া বর্তমান সহকর্মী অধ্যাপক লক্ষীকান্ত ভট্টাচার্যও বইটি রচনার কাজে নানাভাবে আমাকে সাহায্য করেছেন। এ-ছাড়া বইটি দ্রুত প্রকাশের পশ্চাতে যাঁদের সক্রিয় সহযোগিতা আছে, তাঁরা হলেন—বর্তমান বর্ষের শিক্ষণরত শিক্ষক সর্বশ্রী শান্তিময় মিত্র, কার্তিক চন্দ্র দে ও অসিতকুমার মিশ্র। এঁরাও বিভিন্ন ভাবে আমাকে সাহায্য করেছেন। অনুজ-প্রতিম এই সমস্ত শিক্ষকবৃন্দকে মৌখিক কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করে আমার ঋণের বোঝা হালকা করতে চাই না।

পরম পূজনীয় পিতৃদেব শ্রীযুক্ত লক্ষ্মণচন্দ্র চট্টরাজ বইটির পাণ্ডুলিপি পাঠ করে তার দোষ-ত্রুটি নির্ধারণ করাতে আমাকে সাহায্য করেছেন। অন্যান্যবারের মতো এবারেও সূচীপত্র প্রণয়ন করবার ব্যাপারে সহধর্মিণী শ্রীমতি শুক্লা চট্টরাজ যথেষ্ট সাহায্য

করেছেন। এঁদের সকলের নিকট আমার ঋণ স্বীকার করছি। শ্রীশৈবাল ভট্টাচা গ্রন্থটি প্রকাশ করার ভার নিয়েছিলেন বলেই সেটি আজ আত্মপ্রকাশের আলোক রশ্মি দেখতে পেয়েছে। এ সুযোগে তাঁকেও আমার অন্তরের সমুহ ধন্যবাদ জানি রাখছি।

অনিচ্ছাসত্বেও দু-একটি ছাপার ভুল অনিবার্যভাবে থেকে গেল। বলা বাহুল সময়াভাব, মুদ্রাযন্ত্রের খামখেয়াল ইত্যাদিই তার কারণ। আশা করি পাঠক-পাঠি কারা সহানুভূতির সঙ্গে সেগুলি বিবেচনা করে তা মার্জনা করবেন। বারান্তে সংশোধন করার ইচ্ছা থাকল। তা ছাড়া পুস্তকটি উন্নততর করার কোন প্রস্তা ধন্যবাদের সঙ্গে গৃহীত হবে।

বিদেশী গ্রন্থকারদের রচিত কোন কোন প্রমাণ্য পুস্তক এই পুস্তক রচনায় বিশে ভাবে সাহায্য করেছে। পুস্তকটির শেষে সেগুলির একটি তালিকা (গ্রন্থঋণ সন্নিবেশিত করা হয়েছে। উক্ত লেখকদের কাছে আমি বিশেষভাবে কৃতজ্ঞ।

শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগ
ফকিরচাঁদ কলেজ
ডায়মণ্ডহারবার, ২৪-পরগণা
১লা জানুয়ারী, ১৯৬৯

শ্রীশ্যামাপ্রসাদ চট্টরাজ
বি. এড্. বিভাগীয় ভারপ্রাপ্ত অধ্যাপক

চতুর্থ সংস্করণের ভূমিকা

অল্প সময়ের ব্যবধানেই গণিত শিক্ষণ পদ্ধতির চতুর্থ সংস্করণ প্রকাশিত হ'ল। নূতন সংস্করণের প্রকাশনা যে কোন লেখকের পক্ষেই উৎসাহব্যঞ্জক, কারণ এর মাধ্যমেই অধ্যাপক, শিক্ষক-শিক্ষিকা, শিক্ষার্থী সকলেরই লেখকের তথা তাঁর রচনার মূল্যায়ণের সঠিক মাত্রাটি জানা যায়। সহৃদয় পাঠক-পাঠিকা ও অধ্যাপকবৃন্দ আমার পুস্তকটির প্রতি সুবিচার করার জন্য আমি তাঁদের নিকট আন্তরিক কৃতজ্ঞ।

মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক স্তরে পাঠক্রমের ব্যাপক পরিবর্তন হয়েছে। তার সঙ্গে সঙ্গতি রক্ষা করে বর্তমান সংস্করণটিরও ব্যাপক পরিবর্তন সাধন করা হয়েছে। শিক্ষার্থীবৃন্দের সুবিধা হবে ভেবে 'বিষয়' (Contents) অংশের কিছু সংযোজন করা হয়েছে। পাঠটীকার সংখ্যাও বাড়ানো হ'ল। কয়েকটি অধ্যায় নূতন করে তৈরী করেছি।

পুস্তকটির উন্নতিকল্পে বিভিন্ন অধাপক-বন্ধু ও শিক্ষক-শিক্ষিকা অভিমত পাঠিয়েছিলেন। ব্যক্তিগত ভাবে তাঁদের ধন্যবাদ না জানিয়ে এই পুস্তকের মাধ্যমেই তাঁদের আন্তরিক ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

অত্যন্ত কম সময়ের মধ্যে প্রকাশনার কাজ সম্পুর্ণ করতে হয়েছে। এর জন্য প্রকাশক মহাশয় সত্যই কৃতিত্বের দাবী করতে পারেন।

ফকিরচাঁদ কলেজ
ডায়মণ্ড হারবার
২৪-পরগণা

শ্রীশ্যামাপ্রসাদ চট্টরাজ
উপাধ্যক্ষ ও
শিক্ষক-শিক্ষণ বিভাগীয় প্রধান।

সূচীপত্র

প্রথম খণ্ড বিষয়

দ্বিতীয় খণ্ড

তৃতীয় খণ্ড

চতুর্থ খণ্ড

পঞ্চম খণ্ড

গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি

প্রথম খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

গণিত শাস্ত্র কাকে বলে

(What is Mathematics)

বর্তমান সভ্য সমাজে প্রায় প্রত্যেকটি লোক 'গণিত' বা 'অঙ্কশাস্ত্র' এই নামটির সঙ্গে সুপরিচিত। আবার প্রায় সকলেই এটিকে 'সংখ্যাশাস্ত্র' বলে ধরে নিয়েছেন। কিন্তু সাধারণ লোকের ধারণার সঙ্গে গণিত শিক্ষক বা গণিত-শিক্ষার্থীর ধারণা কিছুটা পৃথক হতে বাধ্য, কারণ তাঁরা বিষয়টিকে আরো গভীরভাবে উপলব্ধি করে তার প্রকৃত অর্থ নিষ্কাশন করার চেষ্টা করেন। অবশ্য এই অর্থ উপলব্ধি করার প্রক্রিয়া সভ্যতার সেই প্রথম প্রভাত থেকেই চলে আসছে যদিও বিভিন্ন দেশে ও বিভিন্ন যুগে অর্থের কিছু কিছু পরিবর্তন হয়েছে। এ বিষয়ে গণিতের ইতিহাস পর্য্যালোচনা করা প্রয়োজন। গণিতের ইতিহাসের ক্রমবিবর্তন কোন অংশেই কম চিত্তাকর্ষক নয়।

'গণিত' শব্দটিকে বিভিন্ন ভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। ('গণনা' থেকে গণিত উদ্ভূত হয়েছে বলে ধরে নিলে বলা যায় গণিত হল গণনা-শাস্ত্র।) ইংরেজী Mathematics শব্দটি এসেছে গ্রীক্ শব্দ 'mathein' থেকে—যার অর্থ হল 'শিক্ষা করা'। অর্থাৎ mathematics হচ্ছে সেই বিষয় যেটি সকলের আগে শিক্ষা করতে হবে এবং সকলকে শিক্ষা করতে হবে। গ্রীক্‌রা এইভাবে গণিতকে অত্যন্ত ব্যাপক ও গভীর ভাবে উপলব্ধি করেছিলেন। আবার কেউ কেউ বলেন এটি এসেছে গ্রীক্ শব্দ 'mathemata' থেকে যার অর্থ হল-'শিক্ষণীয় বিষয়সমূহ'। গণিত হল একটি বিজ্ঞান-নিয়মতান্ত্রিক-সুসংবদ্ধ ও নিখুঁত বা প্রকৃত। এর সাহায্যেই আমরা আমাদের ধারণা ও সিদ্ধান্তগুলির প্রকৃত সংব্যাখ্যান দিতে পারি। বিজ্ঞান হ'ল আবার বিশেষ জ্ঞানের একটি ক্ষেত্র। প্রথম দিকে গণিতের পরিধি ছিল অত্যন্ত ব্যাপক। কিন্তু বর্তমানে এর পরিধিকে কিছুটা সীমিত করা হয়েছে। তার অর্থ-আগে যে সমস্ত বিষয়কে গণিত বলে মনে করা হ'ত-এখন সেগুলিকে পৃথক পৃথক বিষয় হিসাবে ধরা হয়। কিন্তু গণিতের নিজস্ব পরিধি (ঐ বিষয়গুলি বাদ দেওয়ার পর) উত্তরোত্তর বেড়েই চলেছে।

সভ্যতার ইতিহাসের অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতের ইতিহাসও এগিয়েছে। মানুষ যেদিন আবিষ্কার করল যে তার কিছু জানার ক্ষমতা আছে, অর্থাৎ সে জানতে পারে, চিন্তা ও বিচার করতে পারে। তখন থেকেই সভ্যতা ও গণিতের উদ্ভব হয়েছে বলা যেতে পারে। বহু বিচিত্র অভিজ্ঞতার মধ্য দিয়ে, বহু ধারণার উপর ভিত্তি করে তবেই মানুষ সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করতে পেরেছে। সভ্যতার অগ্রগতিই সংখ্যার

প্রতীক (notation)-এর প্রয়োজনীয়তা উদ্বুদ্ধ করে। গণিতের ইতিহাসের যে কোন আগ্রহী পাঠক দেখতে পাবেন কিভাবে ব্যাবিলন, মিশর, গ্রীক ও ভারতবর্ষে সংখ্যার প্রতীকগুলি আবিষ্কৃত হয়। অশোকের সময়ের একটি শিলালিপিতে এই রকম প্রতীক দেখা যায়:—

| ॥ + 6 ইত্যাদি।
এক দুই চার ছয়

আবার এর প্রায় একশত বৎসর পরে পুণার নিকট একটি গুহালিপিতে দেখা যায়:—

— = ∓ 7 ?
এক দুই চার সাত নয়

শূন্য বা '0' র আবিষ্কার হিন্দুদের সম্পূর্ণ নিজস্ব। গণিতের ইতিহাসে 'শূন্যের' উদ্ভব এক যুগান্তকারী ঘটনা।

গণিত প্রথম থেকেই কিন্তু এত ব্যাপক ও বিস্তৃত ছিল না। জটিল থেকে জটিলতর ধারণা, বিচিত্র থেকে বিচিত্রতর অভিজ্ঞতা ও সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর বিচার পদ্ধতি ও বিশ্লেষণের মাধ্যমে গণিত বর্তমান ব্যাপকতায় উন্নীত হয়েছে। সেইজন্য দেখা যায়—পরিমাণগত দিক থেকে বিচার করে গণিতের সংজ্ঞা হ'ল:—**সংখ্যা ও সেগুলি যথাযথভাবে ব্যবহার করার শাস্ত্র**। এই যে সর্বজন ব্যবহৃত গণিত এটি গড়ে উঠেছে কতকগুলি স্বাভাবিক সংখ্যা; তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় ও সেগুলির মধ্যে সংযোজন-বিয়োজনের ফলে। তবে এটিকে গণিত না বলে সঠিকভাবে বলতে হয়—**পাটীগণিত**। এর ইংরেজী প্রতিশব্দ Arithmetic এসেছে গ্রীক্ শব্দ 'arithmos' থেকে যার অর্থই হল সংখ্যা (number)। গণিতের ক্রমবিকাশের সঙ্গে সঙ্গে গণিত হয়ে পড়ল জ্ঞানের সেই শাখা-যা যে কোন পরিমাণ, তাদের পরিমাপ, সম্পর্ক ও ব্যবহার-বিধি ব্যাখ্যা করতে পারে। গণিতের সঙ্গে পরিমাণগত একটি ধারণা যে অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত হয়ে আছে—সেটি প্রচলিত ধারণার অন্য একটি দিককে সূচিত করে। বাস্তবিক-গণনার মধ্য দিয়ে পরিমাণগত ধারণা করা গণিতের একটি প্রাথমিক স্তর।

আবার গণিতকে বলা হয় **ভাষার সংক্ষিপ্ততম রূপ**। চিন্তাশক্তির পরিমিত ব্যবহার ও প্রয়োগ যে কিভাবে করা সম্ভব তা একমাত্র গণিতেই লক্ষ্য করা যায়। আমাদের চিন্তাধারাগুলি প্রভাবিত হয় আমাদের প্রক্ষোভগুলির দ্বারা। কিন্তু গাণিতিক চিন্তাধারায় প্রক্ষোভের কোন স্থান নেই।

গণিতের প্রকৃতি ও বিষয়বস্তু সম্বন্ধে গণিতবিদ, বৈজ্ঞানিক ও দার্শনিকদের মধ্যে মতের যতটা মিল দেখা যায়, গরমিল দেখা যায় তার চেয়ে অনেক বেশী। প্রাচীন গ্রীসে কেবল সংখ্যা ও মাত্রিক আকারই গাণতের বিষয়বস্তু ছিল না—জ্যোতির্বিদ্যা ও সঙ্গীতশাস্ত্রও গণিতের অন্তর্ভুক্ত ছিল। বর্তমানে অবশ্য ঐ দুটি শাস্ত্র গণিত থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে স্বতন্ত্র শাখা হিসাবে চিহ্নিত হয়েছে। দার্শনিক Mill গণিত এবং ঐ জাতীয় সকল বিজ্ঞানের ভিত্তিভূমি হিসাবে অনুমান প্রণালীকেই বর্ণনা করেছেন।

দার্শনিক Hume, Bacon প্রভৃতি এই মত সমর্থন করে নানাভাবে তা প্রতিষ্ঠা করার চেষ্টা করে গেছেন। গণিতজ্ঞ Laplaceও তাঁর Theory of Probabilityর মাধ্যমে পরোক্ষভাবে এই মতকে সমর্থন করেছেন। ব্রিটিশ গণিতজ্ঞ ও প্রখ্যাত অর্থনীতিবিদ Lord Keyenes, দার্শনিক Wittgenstein, Ramsay ইত্যাদিও এই মতবাদের সমর্থক। আবার George Boole, Russell প্রভৃতি গণিতজ্ঞ অমূর্ত প্রতীকের সাহায্যে গণিতের আবশ্যকীয় পদ্ধতিগুলি ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করেছেন। Euclid, Weirstrass, Peano, Russell প্রভৃতি গণিতবিদ মনে করেন যে চরম নির্ভুলতাই হ'ল গণিতের একমাত্র লক্ষ্য ও পরিচয়। গণিতের সত্যগুলি নিশ্চিত ও আবশ্যিক। কেউ কেউ বলেন গণিত হ'ল যুক্তিসম্মত বিচারকরণের বিজ্ঞান। Locke এর মতে একমাত্র গণিতই আমাদের মধ্যে যুক্তি-সম্মত চিন্তনের অভ্যাস গঠন করতে পারে। এটি সঠিক ও প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করে। দার্শনিক Mach এর মতে গণিতের প্রধান বৈশিষ্ট্য হচ্ছে তা চিন্তা ভাবনাকে সংক্ষেপিত করে। আবার Poincare, Riemann প্রভৃতি গণিতজ্ঞের মতে 'স্বজ্ঞা' (intuition) হচ্ছে গণিতের মূল ভিত্তি। Hilbert গণিতে যুক্তি-তর্ক পদ্ধতিকে অসম্পূর্ণ বলে সমালোচনা করেছেন। তিনি বলেন সাংগঠনিক নিয়ম (Formal law) ছাড়া গণিত গড়ে উঠতেই পারে না। এককথায় বলা যায় গণিত হচ্ছে এই জাতীয় নিয়মের সহায়তায় গড়ে তোলা একটি সংগঠন। এই জাতীয় গণিতকে তিনি বলেছেন Meta Mathematics.

যাই হোক এঁরা বিভিন্ন দৃষ্টিকোণ থেকে বিভিন্নভাবে গণিতকে বিচার বিশ্লেষণ করলেও প্রায় সকলেই একমত যে গণিত দুই ধরনের প্রতীক ও তাদের অন্তর্নিহিত সম্পর্কের সহায়তায় গড়ে ওঠা একটি শাস্ত্র। দু ধরনের প্রতীকের মধ্যে একটি হ'ল—সাধারণ ধারণা সংক্রান্ত (ideas and conceptions) আর অন্যটি হ'ল তাদের মধ্যে সংযোজন, বিয়োজন ও অন্যান্য কাজ চালানোর প্রণালী (operations)।

গণিত সম্বন্ধে যে বিভিন্ন সংজ্ঞা পাওয়া গেছে, সেগুলি পর্যালোচনা করলে দেখা যাবে সংজ্ঞাগুলি মোটামুটি এই জাতীয় :—

১। প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হতে সাহায্য করে যে বিজ্ঞান—তাই হল গণিত।

২। নির্ভুল সিদ্ধান্তে পৌঁছে দেয় যে বিজ্ঞান—তার নাম গণিত।

৩। সংখ্যাশাস্ত্রের বিজ্ঞানই হল' গণিত (Science of Numbers)।

৪। বিমূর্ত চিন্তনে সাহায্য করে যে বিজ্ঞান - তাই হ'ল গণিত।

৫। প্রতীকমূলক ভাষাই হ'ল গণিত (Symbolic Language)।

৬। J. W. Young এর মতে যাবতীয় অমূর্ত গাণিতিক পদ্ধতি ও তাদের বাস্তব প্রয়োগকেই গণিত বলে। এই অমূর্ত পদ্ধতি বলতে Young আধেয় শূন্য প্রতীকের কথাই বলেছেন।

গণিতের বিভিন্ন সংজ্ঞা পর্যালোচনা করলে দেখা যায়—কোন সংজ্ঞাই স্বয়ংসম্পূর্ণ, পরিষ্কার ও প্রাঞ্জল নয়। এগুলি হয় অস্পষ্ট অথবা সঙ্কীর্ণ। গণিত হল একটি প্রয়োজনীয় বিজ্ঞান যা দেশ, কাল বা পাত্রের সংকীর্ণ গণ্ডীর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে না; এমন একটি বিজ্ঞান যা প্রগতির সঙ্গে সমান তালে চলতে পারে এবং বিভিন্ন ধারণা সম্বন্ধে, তা সে মূর্তই হোক্ আর অমূর্ত ই হোক্ মৌলিক তথ্য পরিবেশন করে। সমস্ত বিজ্ঞানের মূল প্রবেশ দ্বারই হ'ল গণিত এবং গণিতই হ'ল প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তের বিজ্ঞান। মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক পাঠক্রমের দিকে লক্ষ্য রেখে বলা যায় যে গণিত সংখ্যা, প্রতীক, বিভিন্ন মাত্রিক আকার, গতি এবং কালের বিজ্ঞান। গণিত এইগুলি সম্বন্ধে মৌলিক ধারণা প্রদান করে।

বিভিন্ন আলোচনার মাধ্যমে গণিত সম্বন্ধে মোটামুটি যে সর্বজনগ্রাহ্য, বহুল ব্যবহৃত ও প্রচলিত ধারণার সন্ধান পাওয়া যায় সেগুলি উল্লেখ করলে সংক্ষেপে বলা যায়।

(১) গাণিতিক ধারণাগুলি ব্যক্তি নিরপেক্ষ ও পরিমানধর্মী।

(২) গণিতের পদ্ধতি—প্রতীকমূলক।

(৩) গাণিতিক পদ্ধতি—যুক্তি ও বিচারমূলক; আরোহী ও অবরোহী দুটি পদ্ধতিই গ্রহণ করা হয়।

(৪) গণিতের পদ্ধতি সুষ্ঠু ও সুনির্দিষ্ট চিন্তা ও ধারণার উপর নির্ভরশীল।

(৫) গণিতে সন্দেহের কোন অবকাশ নেই। নির্ভুলতা, নিশ্চয়তা ও প্রয়োগশীলতা এর অবিচ্ছেদ্য অংশ।

(৬) গণিতের পদ্ধতি সুস্পষ্ট ও অভিনব।

(৭) গণিত ভাষা ও চিন্তার সংক্ষিপ্ত রূপ এবং সেই সঙ্গে দ্ব্যর্থহীন।

(৮) বুদ্ধির উৎকর্ষ-অপকর্ষের সঙ্গে গণিতের বিশেষ সম্পর্ক আছে।

(৯) গণিত ব্যক্তিগত ইচ্ছা, আকাঙ্ক্ষা, প্রবৃত্তি ও প্রক্ষোভের উপর নির্ভরশীল নয়।

(১০) গণিতের প্রয়োগমূলক ও প্রয়োজনের দিকটি অত্যন্ত পরিষ্কার।

(১১) গণিতের মৌলিক দিকটি অত্যন্ত লক্ষ্যনীয়।

শাস্ত্র হিসাবে গণিত যে অত্যন্ত বিশাল ও ব্যাপক, এ বিষয়ে সম্ভবতঃ কোন দ্বিমত নেই। আমাদের দৈনন্দিন জীবন প্রবাহে ভাষার ব্যবহার যেমন নিত্য প্রয়োজনীয় ও সুদূর বিস্তৃত, গণিতের ব্যবহারও প্রায় সেইরকম। তবে পার্থক্য কিছুটা নিশ্চয়ই আছে। ভাষা যেমন সকলের নিকট সহজবোধ্য, গণিত তেমনটি নয়। প্রচলিত ধারণানুযায়ী গণিত কিছুটা জটিল। আবার ভাষা যেমন যান্ত্রিকভাবে আমরা ব্যবহার ও প্রয়োগ করতে পারি গণিত তেমনভাবে ব্যবহার করা যায় না। গণিতের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত কার্যাবলীর মধ্যে কিছুটা চেষ্টাপ্রসূত মানসিক কাজ মিশ্রিত থাকে। আবার অনেকের মতে, এই মানসিক কাজগুলি মস্তিষ্কের উর্বরতা, উন্নত ধরনের বুদ্ধি, চিন্তনের ক্ষমতা ইত্যাদির উপর নির্ভর করে।

অতীতে জীবনযাত্রা ছিল অত্যন্ত সহজ। মানুষের জীবনযাপন প্রণালীও ছিল সরল। সেই সময় মানুষ, হিসাব করার জন্যও যে একটা শাস্ত্রের প্রয়োজন তা অনুভব করত না। পুরোহিতদের প্রভাব ছিল অপরিসীম। তাঁরা কিছু কিছু হিসাব-শাস্ত্র জানতেন আর তা সাধারণ লোকের উপর প্রয়োগ করে তাঁরা বিস্ময়ের সৃষ্টি করতেন। বর্তমান শতাব্দীর পূর্ব পর্যন্ত শিক্ষিত লোকেরা ভাষামূলক শাস্ত্রের উপর যতটা আগ্রহ দেখাতেন, সংখ্যামূলক শাস্ত্রের উপর ততটা দেখাতেন না। পরে তাঁরা এই সংখ্যামূলক শাস্ত্রের দিকে আগ্রহ দেখাতে সুরু করলেন। তাঁদের মাত্রাতিরিক্ত আগ্রহ লক্ষ্য করে Burke মন্তব্য করেছিলেন : "The age of chivalry is gone. That of Sophists, economists and calculators has succeeded, and the glory of Europe is extinguished for ever."

আগেকার দিনে গণিতশাস্ত্রকে মনে করা হত—এক শ্রেণীর লোকের অবসর বিনোদনের শাস্ত্র হিসাবে। কিন্তু বর্তমানে এটিকে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বিষয় বলেই ধরা হয়। গণিতশাস্ত্রের অন্যান্য প্রয়োজনীয়তার সঙ্গে সামাজিক প্রয়োজনীয়তাও আছে এবং সার্থক ও সুন্দর জীবনযাপন করতে হলে গণিতের সাহায্য শুধু প্রয়োজনীয়ই নয়, অত্যাবশ্যক।

শিল্প-কলা বা সাহিত্য যেমন মানসিক চিন্তাধারা ও কল্পনার ফল, গণিতও তেমন। পার্থিব জগতের উপর ভিত্তি করে গণিতের বাস্তবতা নির্ণয় করা হয় না। শিল্পীর সার্থক শিল্প বা কবির রসোত্তীর্ণ কবিতা যেমন আমাদের মনের দিগন্ত বিস্তৃত করে, গণিত তেমনি উপস্থাপন (Representation) এবং সংব্যাখ্যানের (Interpretation) সাহায্যে আমাদের মনের দিগন্ত বিস্তৃত করে। গণিতকে বলা যেতে পারে পার্থিব ও অপার্থিব জগতের মধ্যে যোগসূত্র স্থাপনকারী বিজ্ঞান। তবে এই বিজ্ঞানের প্রকৃতি অত্যন্ত জটিল এবং এটি আয়ত্ত করাও খুব সহজ নয়।

গণিতের সঙ্গে দর্শনশাস্ত্রের প্রভূত সাদৃশ্য আছে। বিষয়বস্তু, পদ্ধতি প্রভৃতির ক্ষেত্রে এই সাদৃশ্য দেখা যায়। প্রাচীন যুগে গ্রীক দার্শনিকগণ প্রকৃতির রহস্য উদ্‌ঘাটন করার জন্য গণিতের সাহায্য নিয়েছিলেন। তখন থেকে সুরু করে পরবর্তী যুগের দার্শনিকেরাও গণিতকে বেছে নিয়েছেন দর্শনশাস্ত্রের সহায়ক হিসাবে। গণিতের সিদ্ধান্ত অভ্রান্ত এবং অপরিবর্তনীয় বলেই তাঁরা গণিতকে এতো বেশী পছন্দ করতেন। প্লেটো, অ্যারিষ্টটল, কাণ্ট, পার্সিনান্ প্রভৃতি দার্শনিক দক্ষ গণিতজ্ঞও ছিলেন।

যদিও গণিতের অপার্থিব জগতের সঙ্গেই বেশী সংস্রব দেখা যায়, তবুও একথা বলা যায়, পার্থিব জগতের অনেক বস্তুকেই গণিতের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা সম্ভব। যে কোন নতুন আবিষ্কারের ক্ষেত্রে বা আবিষ্কারের সংব্যাখ্যানের ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। ডারউইন বলেন, "Every new body of discovery is mathematical in form, because there is no other guidance we can have."

গণিতের বিভিন্ন শাখা (Different Branches or Scope)

প্রথমেই বলা হয়েছে—গণিত সমস্ত বিজ্ঞানের যেন একটি প্রবেশদ্বার। যে কোন বিজ্ঞান তখনই নিখুঁত ও খাঁটি হয়, যখন তা গণিতের সহায়তা নেয়। যে কোন আধুনিক বিজ্ঞান সম্পূর্ণরূপে গণিতের উপর নির্ভরশীল। Helmholtz বলেন: প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের চরম লক্ষ্যই হল গণিতের সঙ্গে একাত্মীভূত হয়ে যাওয়া। James Jeans বলেন: বিজ্ঞান প্রকৃতি থেকে যা আহরণ করে তা-মূলতঃ গাণিতিক, মনে হয় কোন একজন দক্ষ গণিতজ্ঞ এই বিশ্বের পরিকল্পনা করেছেন।

গণিতের শিক্ষাক্ষেত্র অত্যন্ত ব্যাপক এবং এর শাখাও অনেকগুলি। তাদের মধ্যে প্রধান প্রধান শাখা হল **পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি**। বর্তমানে অবশ্য গণিতের বিভিন্ন শাখা বিশ্লেষণ করে আবার ক্ষুদ্রতর শাখা আবিষ্কার করার চেষ্টা চলছে। কিন্তু কেবলমাত্র পৃথকীকরণের মধ্যেই প্রচেষ্টাগুলি সীমাবদ্ধ নয়, এগুলি যে একটি অখণ্ড ও সম্পূর্ণ শাস্ত্রের অংশ অর্থাৎ একীকরণ-তা প্রমাণ করাও নতুন আবিষ্কারের অঙ্গ। তাই আমরা এখন যেন দেখতে পাচ্ছি, গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে পার্থক্যের সীমারেখাটি ধীরে ধীরে অবলুপ্ত হয়ে যাচ্ছে—মূল শাখাগুলি পরস্পরের সঙ্গে মিশে যাচ্ছে।

আমরা বিদ্যালয়ে যে গণিত দেখি তা অবশ্য সুবিধার জন্য কয়েকটি অংশে ভাগ করে নেওয়া হয়েছে। কিন্তু মনে রাখতে হবে কোন বায়ু-নিরোধক কক্ষে এই ভাগগুলি করা হয়নি। যাই হোক, এই ভাগগুলি হল :—

(১) **পাটীগণিত**:—এটি সংখ্যা বা পরিমাণের গণিত। এই শাখাটি সংখ্যাকে অবলম্বন করেই গঠিত। কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ বা বর্গমূল ইত্যাদি যখন আমরা নির্ণয় করি, তখন আমরা পাটীগণিতের ক্রিয়া-পদ্ধতিই অনুসরণ করি।

(২) **বীজগণিত**: কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা না নিয়ে যখন আমরা সংখ্যা সম্বন্ধীয় এমন সম্বন্ধ স্থাপন করি যা সমগ্র সংখ্যাদলেই প্রযোজ্য হবে, তখন আমরা বীজগণিতের বিষয়বস্তুতে প্রবেশ করি। এটিও সংখ্যা বা পরিমাপেরই বিজ্ঞান। যখন আমরা বলি :—

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, তখন x ও y এর মান যাই ধরা হোক্ না কেন, সূত্রটির সম্বন্ধ অপরিবর্তিতই থাকবে।

(৩) **জ্যামিতি**: এটি হল বিন্দু, তল বা ত্রিমাত্রিক আকার ইত্যাদি সম্বন্ধীয় গণিত। বিভিন্ন মাত্রিক আকার, তাদের ধর্ম ও পারস্পরিক সম্বন্ধ সম্পর্কে এ শাখাটি আলোচনা করে এবং তাদের পরিমাপ করে। বিন্দু, রেখা ও দ্বিমাত্রিক তলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের শাখাটিকে সামতলিক জ্যামিতি বলা হয়। আবার ত্রি-মাত্রিক আকার নিয়ে ঘন জ্যামিতি গড়ে ওঠে।

(৪) **ত্রিকোণমিতি**:—এটি জ্যামিতির একটি বিশেষ শাখা। ত্রিভুজের

কয়েকটি অংশ জানা থাকলে অন্য অংশগুলি নির্ণয় করা এবং বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ-সংক্রান্ত নানা সমস্যার সমাধান করাই এই শাখার প্রধান কাজ।

(৫) **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি :**—এই শাখাটি বীজগণিত ও জ্যামিতির সমন্বয়ে গঠিত। এই শাখার সাহায্যে বিভিন্ন মাত্রিক আকারের অবস্থান নির্ণয় করা সম্ভব। সরলরেখা, বৃত্ত, উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত প্রভৃতি আকারকে বীজগণিতের সূত্র সাহায্যে এই শাখা ব্যাখ্যা করে।

(৬) **পরিসংখ্যান :** এই শাখাকে বলা যায় পাটীগণিত ও বীজগণিতের সমন্বয়। নম্বর দ্বারা প্রকাশিত কোন কাঁচা তথ্য (Raw Score) সংগ্রহ করে, তাদের শ্রেণীবিন্যাস ও সাধারণ সূত্র নির্ণয় করাই এই শাখার কাজ। এই শাখাতে সম্ভাবনা-তত্ত্বের অবদান প্রচুর।

মানুষ যেদিন সংখ্যা, পরিমাণ ও তজ্জনিত পার্থক্যের জ্ঞান উপলব্ধি করল সে দিনটি নিঃসন্দেহে গণিতের ইতিহাসে চিরস্মরণীয় হয়ে থাকবে। তারপর এই জ্ঞান ক্রমশঃ সূক্ষ্ম হতে সূক্ষ্মতর হতে লাগল যার জন্য গণিতের পরিধিও ক্রমশঃ বিস্তৃততর হতে লাগল। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিও তার গণ্ডী ছাড়িয়ে মূলদ সংখ্যার সন্ধানে ছড়িয়ে পড়ল। এই অমূর্ত চিন্তন গণিতের ক্ষেত্রে বাস্তবরূপ খুঁজে পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে মানুষের মনোজগতেও তার প্রতিফলন লক্ষ্য করা গেল। পরবর্তীকালে Plato, Descartes প্রভৃতি মনীষিগণের চিন্তাধারার মধ্যেও তার ছাপ দেখা গেল। পাটীগণিতের অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে জ্যামিতিও এগিয়ে চলল। জ্যামিতির ক্ষেত্রে পাটীগণিতের অনুপ্রবেশ দেখা গেল। পাটীগণিত সম্প্রসারিত হয়ে বীজগণিতের আবির্ভাব ঘটাল এবং Descartes জ্যামিতির সঙ্গে বীজগণিতকে যুক্ত করে সৃষ্টি করলেন 'স্থানাঙ্ক জ্যামিতি'। তার অনেক পরে দেশ ও কালের ধারণাকে একসূত্রে বেঁধে মহাবিশ্বের অনন্ত রহস্য উদ্ঘাটনের জন্য নতুন গণিত সৃষ্টি করলেন বিখ্যাত বিজ্ঞানী আইনস্টাইন, তারও আগে Riemann জ্যামিতির একটি নতুন শাখা—Non Euclidean Geometry-র ভিত্তি স্থাপন করেছিলেন। বিশুদ্ধ গণিতের আর একটি দিক—অমূর্ত বীজগণিত। ভাষা ও চিন্তাকে বীজগণিতীয় প্রতীক ও প্রণালীর সাহায্যে ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করেন George Boole। আবার Peano, Ferge, Russell প্রভৃতি গণিতজ্ঞরা স্বাভাবিক সংখ্যাকে যুক্তি-বিজ্ঞানের সাহায্যে অমূর্তভাবে ব্যাখ্যা করার পথ আবিষ্কার করার চেষ্টা করলেন। অন্যদিকে কেবলমাত্র ত্রিভুজ ও তার ধর্ম এবং সম্পদ—বাহু ও কোণকে—অবলম্বন করে বীজগণিত ও জ্যামিতির সমন্বয়ে গড়ে উঠেছে ত্রিকোণমিতি। ঘন ও ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি হল—পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি—তিনটিরই সমন্বয়। Newton ও Leibuitz স্বাধীনভাবে স্থান ও কালকে সূক্ষ্মতম অংশে বিভক্ত করার কল্পনা করেন ও এইভাবে বিশ্লেষণের মাধ্যমে Calculas-এর তত্ত্ব আবিষ্কার করেন। আবার আইনস্টাইন তাঁর বিখ্যাত Theory of Relativity-র মাধ্যমে গণিতকে বৃহত্তর স্থান ও কালের দিকে এগিয়ে নিয়ে গেছেন।

Astronomy, Astrophysics প্রভৃতি বিজ্ঞান এই বৃহত্তর স্থান ও কালের গণিতের ভিত্তির উপরই দাঁড়িয়ে আছে।

গণিতের এই যে শ্রেণীবিভাগ, এর ভিত্তি কিন্তু খুব দৃঢ় নয় এবং এগুলি বায়ু-নিরোধক কক্ষেও অবস্থিত নয়। বর্তমানে বিভিন্ন শাখাগুলির পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হবার একটা প্রবণতাই লক্ষ্য করা যায়। পাটীগণিতে বীজগণিতের নিয়ম অনুসরণ করা হচ্ছে এবং পরিমিতিরও প্রবর্তন হয়েছে। আবার বীজগণিতের ক্ষেত্রেও পরিমিতি সংক্রান্ত তথ্যের প্রয়োগ দেখা যায়। জ্যামিতির মধ্যেও বীজগণিত আত্মপ্রকাশ করেছে। ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে বীজগণিত ও জ্যামিতির বহুল প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। আশা করা যায় প্রাথমিক গণিতে এর বিভিন্ন শাখার মধ্যবর্তী ব্যবধান ক্রমশঃ কমে যাবে এবং পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি ঘনিষ্ঠভাবে জড়িত হবে।

* Mathematics is the gate and key of all Sciences—Roger Bacon.
* The Mathematics, carried along on his flood of symbols, dealing apparently with purely formal truths, may still reach results of endless importance for our description of the physical universe—Karl Pearson.
* Mathematics is a way to settle in the mind a habit of reasoning—Locke.
* Mathematics is the language of Physical Sciences and certainly no more marvellous language was ever created by the mind of man—Lindsay.
* Mathematics in its widest sense is the development of all types of deductive reasoning—Whitehead.

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. "No other School Subject is so admirably adopted to a judicious mode of study as Mathematics"—Dicsuss. [C. U. B. T.—'53]
2. "Mathematics is more than a mere accumulation of technical Knowledge; it is a mode of thought and the teacher should try to afford his pupils an opportunity of sharing in this kind of thinking, if only in a very simple and elementary way." Elucidate. [C. U. B. Ed.—70]
3. What Should be Correct and Suitable definition of Mathematics? Discuss its main Characteristics.
4. What are the different branches of Mathematics? Are they inter-related? If so, how?

দ্বিতীয় অধ্যায়

গণিত শিখনের উপযোগিতা ও উদ্দেশ্য

(Aims and objectives of Teaching Mathematics)

একজন শিক্ষক যখন কোন একটি বিষয়ে শিক্ষাদান করতে যান তখন তাঁর মনে সচরাচর কতকগুলি প্রশ্ন জাগে। তাঁকে জানতে হয়—**'কি শিক্ষা দেব'** এবং **'কেমন করে শিক্ষা দেব'**। কিন্তু মনে হয় এটুকু জানাই কোন শিক্ষকের পক্ষে যথেষ্ট নয়। তাঁকে বিশেষ করে জানতে হবে **'কেন'** তিনি শিক্ষা দিচ্ছেন। বস্তুতঃ এই **'কেন'** প্রশ্নের উত্তর **'কি'** এবং **'কেমন করে'** এই দুটি প্রশ্নের উত্তরদানেও সহায়তা করে। একথা গণিত শিক্ষকের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। শিক্ষার্থীরও জানা প্রয়োজন সে কেন গণিত শিক্ষা করছে।

গণিতের বিষয়বস্তু ও প্রয়োগ দিন দিন যেভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে তাতে বিষয়টির সঠিক সংজ্ঞা দিতেই যথেষ্ট বেগ পেতে হয়। এইরকম বিশাল পরিধিবিশিষ্ট একটি বিষয় কেন শেখানো হচ্ছে তা পরিষ্কারভাবে বলা প্রায় অসম্ভব। এক্ষেত্রে শিক্ষার বিশেষ বিশেষ স্তরে গণিত শিক্ষার উপকারিতা ও কার্যকারিতা কি কেবলমাত্র তার উপরই কিছু আলোচনা করা সম্ভব। কিন্তু বর্তমান শিক্ষাব্যবস্থার একটা প্রধান ত্রুটি হ'ল—বিভিন্ন স্তরে শিক্ষার লক্ষ্য সঠিকভাবে নিরূপন করা হয় না। শিক্ষাদানের প্রকৃত উদ্দেশ্যটি জানা না থাকলে যথেষ্ট যোগ্যতা ও জ্ঞান থাকা সত্ত্বেও শিক্ষক যে ব্যর্থ হবেন এবং তাঁর শিক্ষাদান ভুল পথে এগিয়ে যাবে সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নাই।

প্রত্যেকটি বিষয়ের শিক্ষাদানে বিশেষ বিশেষ লক্ষ্য অনুসরণ করা হয় এবং ঐ লক্ষ্যের উপর বিষয়টির শিক্ষাদানের মূল্য নির্ভর করে। বিষয়টি শিক্ষাদানের ক্ষেত্রে যে উদ্দেশ্যটি সামনে রেখে এগিয়ে যেতে হয় তাই হল বিষয়টি শেখানোর মূল লক্ষ্য। আর এই মূল লক্ষ্য বরাবর এগিয়ে গেলে যে ফললাভ হয় তাই হ'ল বিষয়টি শেখানোর মূল্য।

স্কুলে যে সমস্ত বিষয় সাধারণতঃ পড়ানো হয়. সেগুলির উদ্দেশ্য দ্বিমুখী।—একটি হ'ল **সাধারণ উদ্দেশ্য**, আর একটি হল **বিশেষ উদ্দেশ্য**। বিষয়টির পাঠের মাধ্যমে ঐ উদ্দেশ্যগুলি রূপায়িত করা হয়। সচরাচর কোন বিষয়ের পাঠদানের ফলে সেই বিষয়টি সম্বন্ধে শিক্ষার্থী জ্ঞানলাভ করে এবং কতকগুলি সু-অভ্যাস গঠন করে।

এখন দেখা যাক, গণিত শিখণের উদ্দেশ্য কি? যে সমস্ত উদ্দেশ্য রূপায়িত করার জন্য গণিত পড়ানো হয়, সেগুলিকে প্রধানতঃ **তিন ভাগে** ভাগ করা হয়। যথা—

(১) গণিতের **ব্যবহারিক** (Practical) উদ্দেশ্য।
(২) **কৃষ্টিমূলক** (Cultural) উদ্দেশ্য ; এবং
(৩) **শৃঙ্খলামূলক** (Disciplinary) উদ্দেশ্য

১। ব্যবহারিক উদ্দেশ্য—

গণিতের ব্যবহারিক উদ্দেশ্য অত্যন্ত গভীর এবং ব্যাপক। বর্তমান যুগকে বল হয় বিজ্ঞানের যুগ, আর বিজ্ঞান তখনই নির্ভুল হয়, যখন গণিতের ব্যবহার করা হয় প্রত্যক্ষভাবে না হলেও পরোক্ষভাবে আধুনিক সভ্যতার একটা বড় অংশ গণিতের উপ নির্ভরশীল। প্রতিটি মানুষ যেন গণিতের সমুদ্রে সাঁতার কাটছে। ঘুম থেকে ওঠা পর থেকে আবার ঘুমাতে যাওয়া পর্যন্ত, জীবনের প্রতিটি মুহূর্তে বা প্রতিটি পদক্ষেপে প্রত্যেক মানুষই জ্ঞাতসারে বা অজ্ঞাতসারে গণিত ব্যবহার করে চলেছে। অবশ্য একথ সত্য যে, হিসাব করতে গিয়ে ব্যবসায়ী বীজগণিত বা ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করছে না বা ইন্‌জিনিয়ার, সার্ভেয়ার প্রভৃতি যন্ত্রবিদ্ যখন যান্ত্রিকভাবে কোন সূত্রে প্রয়ো করেন, তখন সেই সূত্রের আভ্যন্তরীণ গাণিতিক তত্ত্বের কথা চিন্তা করেন না। কিন্তু তবুও একথা বেশ জোর দিয়েই বলা যেতে পারে যে, প্রতিটি লোক তার দৈনন্দিন জীবনে গণিত প্রয়োগ না করে চলতে পারে না। প্রায় প্রত্যেককে হিসেব করতে হয় বিল তৈরী করতে হয়, বিল পরীক্ষা করতে হয় বা টাকা-পয়সা গণনা করতে হয়। আবার নাপিত, দর্জি, ছুতোর বা রাজমিস্ত্রী—এরা প্রত্যক্ষভাবে গণিতের ব্যবহার করে থাকেন। অশিক্ষিত কুলি বা মুটে-মজুরও দূরত্ব অনুযায়ী ভাড়ার হিসেব করে এবং সেইভাবে ঠিক ঠিক ভাড়া আদায় করে গণনা করে। পোস্ট অফিসে, দোকানে, ব্যাঙ্কে, রেল-স্টেশনে, স্কুল-কলেজে এমন কি বিয়ে বাড়ীর নিমন্ত্রণ কোথায় গণিতের ব্যবহার নেই? আমাদের সমাজ জীবনেও গণিতের স্থান বেশ উঁচু। ঘর-বাড়ীর নক্‌শা তৈরী, আসবাবপত্রের আকৃতি, ড্রইং-রুমে সেগুলি কিভাবে সাজানো হবে, এ সমস্ত ব্যাপারেও গণিত আমাদের সাহায্য করে। গণিত না থাকলে জীবনযাত্রা অচল হয়ে পড়ত। এছাড়া বৈদ্যুতিক পাখা, রেফ্রিজারেটার, রেডিও, টেলিভিসান, সিনেমা— এদের আবিষ্কারের ক্ষেত্রেও গণিতের অবদান কম নয়। গণিতই হল বৈজ্ঞানিকদের শ্রেষ্ঠ হাতিয়ার।

এখন দেখা যাক দৈনন্দিন জীবনে গণিতের আর কি ব্যবহার আছে। অবশ্য গণিত বলতে এর বিভিন্ন শাখা—যথা বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি, পরিমিতি, এ সমস্তকে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। মানুষের মনে যখন প্রথম প্রশ্ন জাগলো—কয়টি? কতটা? তখনই তার সমাধানের জন্য গণিতের ডাক পড়ল। পাটীগণিতের জটিল সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগণিত ব্যবহৃত হল। গ্রহ-নক্ষত্রের অবস্থান জানার জন্য ত্রিকোণমিতি, জমি জরিপ করার জন্য পরিমিতি, ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন জানার জন্য ক্যালকুলাস প্রভৃতির ব্যবহার অবশ্যম্ভাবী হয়ে পড়ল। আবার সমাজের তথা দেশের প্রয়োজনে তথ্য সংগ্রহের জন্য ব্যবহৃত হল পরিসংখ্যান। এক কথায়, জ্ঞানের সামগ্রিক পরিমাপের জন্যই গণিতের ব্যবহার বৃদ্ধি পেতে লাগলো।

বর্তমান যুগ হল "যন্ত্রের যুগ"। এক দেশ আর এক দেশকে প্রতিযোগিতায় হারিয়ে দিয়ে এগিয়ে যেতে চায়। যে দেশ গণিতে যত বেশী উন্নত, তার শিল্প

(Industry), কৃষি, বাণিজ্যও তত উন্নত হবে। কাজেই দেশের উন্নতির জন্য গণিতের প্রয়োগ কম গুরুত্বপূর্ণ নয়।

আর কয়েকটা উদাহরণ দিলেই দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক রূপটি স্পষ্ট হয়ে উঠবে। গণিতের ব্যবহার সকলকেই করতে হয়, যদিও ব্যবহারের মাত্রাটা সকলের এক নয়। একজন দিনমজুর তার সামান্য মাইনের হিসেব হয়তো নয়া-পয়সার সাহায্যেই করতে পারে, কিন্তু ভারতের অর্থমন্ত্রীর বাজেটের হিসেব থাকে কোটি টাকার অঙ্কে। তেমনি আমাদের পাড়ার পানওয়ালা তার লাভ-লোকসান হিসেব করে টাকা-পয়সাতে, আবার টাটা, বিড়লা, ডালমিয়া সেই হিসেবই করেন কোটি টাকাতে। গ্রামের একজন সাধারণ লোক যখন মাটির বাড়ী তৈরী করে, তখন সে যেভাবে হিসেব করে, শহরের শ্রেষ্ঠ স্থপতি মার্বেল-প্রাসাদ তৈরী করার সময় সেইভাবেই হিসেব করে; স্কুলের ছাত্র যখন ঘুড়ি ওড়ায়, তখন সে যেভাবে ঘুড়ির ভারসাম্য বজায় রাখার চেষ্টা করে, কৃতী পাইলটও তার এরোপ্লেনের ভারসাম্য সেইভাবেই বজায় রাখেন। কাজেই দেখা যাচ্ছে, প্রয়োজন অনুযায়ী প্রতিটি লোককে কিছু না কিছু গণিত ব্যবহার করতেই হয়।

দৈনন্দিন জীবন ছাড়াও আরো অন্যান্য অনেক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। যেমন:—

(ক) **ভৌত বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার করা হয়;**
(খ) **অন্যান্য বিজ্ঞানে গণিতের প্রয়োগ দেখা যায়;**
(গ) **সমাজ বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার;**
(ঘ) **ব্যবসা-বাণিজ্য ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ;**
(ঙ) **স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রে (Computing machines) গণিতের প্রয়োগ;**
(চ) **চিকিৎসা শাস্ত্রে গণিতের প্রয়োগ;**
(ছ) **যুদ্ধবিদ্যাতে গণিতের প্রয়োগ;**
(জ) **শিল্প-কলাতে গণিতের প্রয়োগ;**
(ঝ) **খেলাধুলাতে গণিতের প্রয়োগ ইত্যাদি।**

অর্থাৎ এক কথায় বলা যেতে পারে, আমাদের জীবনে এমন কোন দিক নেই যেখানে গণিত তার আলোকরশ্মি বিচ্ছুরিত করেনি। বর্তমান জীবনে বিজ্ঞানের প্রভাবই সবচেয়ে বেশী অনুভূত হয়; আর বিজ্ঞানের প্রাণকেন্দ্রই হল গণিত। Roger Bacon-এর মতে—Mathematics is the gate and key of all Sciences; আবার Comte-র মতে—All Scientific education which does not commence with mathematics is of necessity defective at its foundation. কাজেই দেখা যাচ্ছে, কোন একটি বিজ্ঞানকে সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত করতে হলে, বা প্রাকৃতিক ঘটনাসমূহের ব্যাখ্যা করতে হলে কিংবা মানব জীবনকে সুশৃঙ্খল ও নিয়মানুবর্তী করার জন্য গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য।

২। **কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য**—প্রত্যক্ষভাবেই হোক আর পরোক্ষভাবেই হো আধুনিক সভ্যতা যে গণিতের কাছে বিশেষভাবে ঋণী তা অস্বীকার করা যায় ন বর্তমান যুগ বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যার যুগ, যে দুটিরই ভিত্তি হল **গণিত**। বর্তম সভ্যতার মেরুদণ্ড যেন গণিত। অধ্যাপক J. W. A Young এর মতে—"Whe ever we turn in those days of iron, steam and electricity, we fin that mathematics has been the pioneer. Were its backbon removed, our material civilisation would inevitably collapse."

গণিত শিখণের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যটি তখনই পরিষ্কার হবে যখন গণিত শিখণে ফলে আমরা কি কি প্রয়োজনীয় অভ্যাস গড়ে তুলতে পারি, তার আলোচনা করব গণিত-ই একমাত্র শাস্ত্র যাতে স্মৃতি তথা মুখস্থ করার স্থান অত্যন্ত কম এবং বিচার করণের স্থান অত্যন্ত বেশী। কাজেই গণিত শিখণের উদ্দেশ্য মুখস্থ করার চর্চা নয় অন্যান্য বিষয় উপলব্ধি করার বা বিচারকরণ ক্ষমতার চর্চা করা। যিনি গণিতে অনেক তত্ত্ব মুখস্থ করে রেখেছেন, তাঁকে বড় গণিতজ্ঞ বলা চলে না। কিন্তু যি উপযুক্ত স্থানে গণিতের তত্ত্বের প্রয়োগ করতে পারেন, তাঁকেই বড় গণিতজ্ঞ বলা চলে শেষোক্ত শ্রেণীতে যাঁরা আছেন, তাঁরা নতুন তত্ত্ব আবিষ্কার করতে পারেন; কো তত্ত্ব ভুলে গেলে তা নতুন করে তৈরী করে নিতে পারেন। এইজন্যই গণিত শিখণে উদ্দেশ্য কেবল নীরস তত্ত্ব আহরণ করা নয়; এর উদ্দেশ্য হল যুক্তি-শক্তির যথোপযু বিকাশ সাধনে শিক্ষা দেওয়া ও সাহায্য করা। গণিত শিখণে সবচেয়ে প্রয়োজনী বস্তু হল—পদ্ধতি (Method)। বাস্তবিক পক্ষে যে পদ্ধতিতে গণিতের শিক্ষা দেওয় হয় তাতে বিচারকরণের শিক্ষাই বহুলাংশে দেওয়া হয়, যদিও কিছু কিছু তত্ত্ব ও তথ মুখস্থ করতে বলা হয়ে থাকে। কিন্তু গাণিতিক বিচারকরণে কতকগুলি বৈশিষ্ট থাকে। সেগুলি হল:—

(ক) **সরলতা** (**Simplicity**)—শিক্ষণ পদ্ধতির মূল কথাই হল— সরল বিষ থেকে কঠিন বা জটিল বিষয়ের শিক্ষা দেওয়া। এতে শিখণ অত্যন্ত কার্যকরী হয় গণিত শিখণে সরলতার স্থান সর্বাগ্রে। সহজ জিনিষ, সহজ অধ্যায়, সহজ অঙ্ক ন শিখলে কঠিন অংশে যাওয়া যায় না। শতকিয়া, নামতা ইত্যাদি না জানলে যোগ বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি শেখানো যায় না। তেমনি কোন একটি নিয়ম প্রথ শেখাবার সময় পরিচিত দ্রব্যের, ঘটনার বা বাস্তব অভিজ্ঞতার সাহায্য লওয় বাঞ্ছনীয়। জটিল অঙ্ক অপেক্ষা মানসাঙ্ক অধিকতর চিত্তাকর্ষক।

(খ) **যথার্থতা** (Accuracy)—"যথার্থ বা সঠিক চিন্তন করার ক্ষমতা অর্জন" হ'ল শিক্ষার বিভিন্ন উদ্দেশ্যের অন্যতম। সঠিক চিন্তন হল সাফল্যের চাবিকাঠি অধিকাংশ ছাত্রেরই সঠিক চিন্তনের বা চিন্তাধারা প্রকাশ করার ক্ষমতা থাকে না তারা সমস্যাগুলির সমাধান করে যান্ত্রিক উপায়ে এবং সমস্যাগুলির আভ্যন্তরীণ অর্থ হৃদয়ঙ্গম করার কোন চেষ্টাই করে না। কিন্তু অঙ্কের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক পদ্ধতি বা ভাষার কারুকার্য সমস্যার সমাধানে কোন সাহায্যেই করে না। অঙ্কে মিথ্যা বলার কোন

সুযোগ থাকে না। কেবলমাত্র সঠিক চিন্তন ও সঠিক পদ্ধতিতেই অঙ্কের সমাধান করা সম্ভব। কাজেই অঙ্কের অনুশীলনের ফলে সর্বক্ষেত্রে সঠিক চিন্তনের ক্ষমতা এবং অভ্যাস অর্জিত হয়।

(গ) **উত্তরের নিশ্চয়তা** (Certainty of Results)—অঙ্কের উত্তরের মধ্যে বিভিন্নতা বা বৈষম্য থাকবে না। 8-কে 9 দিয়ে যে ভাবেই গুণ করা যাক না কেন, উত্তর সব সময়ই 72 হবেই। এই উত্তর যে সঠিক উত্তর, তা পরীক্ষা করা যায় 8-কে পর পর 9 বার যোগ করে, 9-কে 8 দিয়ে গুণ করে, আর 9-কে পর পর 8 বার যোগ করে বা 72-কে 8 অথবা 9 দিয়ে ভাগ করে। নির্ভুল ভাবে একটি অঙ্কের সমাধান করে ছাত্রের মনে যে আনন্দের সঞ্চার হয়, সেই আনন্দের ভাবটি চিরস্থায়ী না হলেও দীর্ঘস্থায়ী করার জন্যই সে প্রতিটি অঙ্কের নির্ভুল উত্তর নির্ণয় করতে চেষ্টা করবে। অন্যান্য ক্ষেত্রেও সে নির্ভুলভাবে সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করবে।

(ঘ) **মৌলিক ক্ষমতা** (Originality)—ছাত্রেরা স্কুলে যে সমস্ত বিষয় অধ্যয়ন করে, সেগুলি তারা ভালো করে মুখস্থ করে এবং পরে প্রয়োজন মতো সেগুলি স্মরণ করে। যখন সে ইতিহাসের কোন ঘটনার পুনরুল্লেখ করে বা কোন অর্থ নৈতিক তত্ত্বের ব্যাখ্যা করে, তখন সে স্মৃতির সাহায্যই বেশী গ্রহণ করে। অর্থাৎ সেই ব্যাখ্যার মধ্যে তার মৌলিক কোন ছাপ থাকে না। কিন্তু বিভিন্ন অঙ্কের সমাধান কোন একটি সর্বজনীন সূত্র ধরে হয় না। কাজেই এই ক্ষেত্রে ছাত্রকে তার নিজস্ব মানসিক ক্ষমতা প্রয়োগ করতে হয়। এই প্রয়োগ-ক্ষমতাই হল তার মৌলিক ক্ষমতা। এই মৌলিক ক্ষমতার উৎকর্ষ সাধিত হলে তবেই ভবিষ্যৎ জীবনের বিভিন্ন সমস্যাগুলির সুষ্ঠু সমাধান সম্ভব হয়।

(ঙ) **জীবনের সঙ্গে যোগসূত্র** (Similarity to life)—অনেক সমালোচক বলেন, গণিত বিশেষ বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্রে কার্যকরী, যেমন—বিজ্ঞান-বিষয়ক চিন্তা, যুক্তি-সম্মত বিচারকরণ ইত্যাদি। দৈনন্দিন জীবনেও যে গণিতের ব্যবহার থাকতে পারে এ কথা তাঁরা বিশ্বাস করেন না। গণিতের ক্ষেত্রে চিন্তা করার যে বিশেষ একটি অভ্যাস অর্জিত হয় সেটিকে দৈনন্দিন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করা মোটেই অসম্ভব ব্যাপার নয়। অনেক সময় আমরা এই অভ্যাস প্রয়োগ করি কিন্তু সেই প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ অগোচরেই থাকে। পরিষ্কার-পরিচ্ছন্নতা, চিন্তনের যাথার্থ্য ইত্যাদি গণিত শিখণের ক্ষেত্রে যেমন প্রয়োজনীয় দৈনন্দিন জীবনেও তেমন।

(চ) **যুক্তির পরিমাণ** (Amount of Reasoning)—গণিতই একমাত্র বিষয় যেখানে স্মৃতির প্রভাব কম এবং যুক্তির প্রভাব বেশী। যদি এই বিষয়টি ঠিক মতো পড়ান যায়, তাহলে দেখা যাবে সমস্ত বিষয়টি যুক্তির উপর ভিত্তি করে দাঁড়িয়ে আছে। অত্যন্ত জটিল অধ্যায় বা কঠিন সমস্যা যুক্তির সাহায্যে সহজ-সরলরূপ পরিগ্রহ করে। একথা অবশ্য ঠিক যে কিছু কিছু সূত্র (formula) এবং তথ্য (theory) মুখস্থ করতে হয়। কিন্তু তাদের সংখ্যা অত্যন্ত কম। দৈনন্দিন জীবনে

আমাদের বহুবিধ সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। কিন্তু বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে কোন পদ্ধতি গ্রহণ করলে সমস্যার সুষ্ঠু সমাধান করা সম্ভব তা নির্ণয় করা হয় যুক্তির দ্বারা, গণিতের চর্চার পরিমাণ যত বেশী হয় যুক্তির পরিমাণও তত বেশী হয়।

৩। শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্য—

যে বিষয়ে যুক্তির প্রয়োগ যত বেশী থাকে সেই বিষয়ের শৃঙ্খলামূলক মূল্যও তত বেশী। অনেক মনোবিজ্ঞানী বলেন, শৃঙ্খলামূলক মূল্য কোন একটি বিষয়ের মধ্যে বা একই বিষয়বস্তু সন্নিহিত বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে তা হয় না। শৃঙ্খলামূলক মূল্য ছাত্রের মনের মধ্যে এমন একটি বিশেষ পরিবর্তন ঘটায় যা চিরস্থায়ী এবং যা বিভিন্ন বিষয়ের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব। বাস্তবে এমন অনেক ঘটনা দেখা যায় যে, কোন একজন ছাত্রের গণিতে আসক্তি বৃদ্ধির ফলে অন্যান্য বিষয় পাঠের আগ্রহ বৃদ্ধি পায় এবং গণিতে আসক্তি কমার ফলে আগ্রহও কম হয়।

অন্যান্য উদ্দেশ্য—

উপরোক্ত তিনটি প্রধান উদ্দেশ্য ছাড়াও গণিত শিখণের আরও কয়েকটি অপ্রধান উদ্দেশ্য আছে। সেগুলি হল—

(১) সামাজিক উদ্দেশ্য
(২) নৈতিক উদ্দেশ্য
(৩) সৌন্দর্যমূলক উদ্দেশ্য
(৪) জ্ঞানমূলক উদ্দেশ্য
(৫) প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহার করার উদ্দেশ্য
(৬) বিভিন্ন বিষয়ে বিজ্ঞাসম্মত ও অগ্রগতি আবিষ্কারে সাহায্য করার উদ্দেশ্য
(৭) শিশুমনে আবিষ্কার স্পৃহা জাগরণের উদ্দেশ্য
(৮) কল্পনা শক্তির বিকাশসাধন
(৯) সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন
(১০) সত্যনিষ্ঠা ও আত্মসমীক্ষা ইত্যাদি।

গণিত শিখণের ফলে ছাত্রদের মধ্যে আরও কিছু পরিবর্তন দেখা যায়। এই পরিবর্তনগুলির উল্লেখযোগ্য কয়েকটি পরিবর্তন হল মনোযোগদানের ক্ষমতা বৃদ্ধি, আবিষ্কার করার ক্ষমতা অর্জন, আত্মনির্ভরতা, চরিত্রগঠন, কল্পনাশক্তির সুষ্ঠু ব্যবহার ইত্যাদি।

পরিশেষে একথা বলা যেতে পারে যে গণিত শিখন শিক্ষককেন্দ্রিক বা শিশুকেন্দ্রিক না হয়ে গণিতকেন্দ্রিক হবে। এর জন্য শিক্ষকদের যথোপযুক্ত শিক্ষণ থাকা প্রয়োজন, গণিতের পাঠক্রমের আমূল সংস্কার প্রয়োজন এবং বিভিন্ন স্কুলের শিক্ষকদের মধ্যে

একটা ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ থাকা প্রয়োজন। গণিত শিখণের কার্যসূচী এমনভাবে প্রণয়ন করতে হবে যাতে ছাত্ররা যুক্তির ব্যবহার করতে পারে; চিন্তন এবং মুখস্থ করার পার্থক্য বুঝতে পারে, বিভিন্ন বিষয় পাঠের সময় যুক্তিসম্মত পদ্ধতি গ্রহণ করতে পারে, স্বনির্ভর হতে পারে এবং গণিত তথা অন্যান্য বিষয় পাঠে আগ্রহী হয়। গণিত যেমন বিজ্ঞানের হাতে অস্ত্র, তেমনি অন্যান্য বিষয়ের ক্ষেত্রেও একটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় কৌশল।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. Indicate the main aims and values of teaching mathematics and the procedure by which you would ensure that these are being realised in practice. [C. U—65]

2. What are the specific aims of teaching arithmetic,-algebra and geometry in Secondary schools ? What procedure would you follow for the attainment of those amis ? [C. U.—69]

3. Discuss briefly the aims of teachieg mathematics in Secondary schools in India ? [C. U.—72 [

4. Analyse briefly the different values of the study of mathematics in general and how they are helpful in the teaching of the subject. [C. U,—73]

———

তৃতীয় অধ্যায়

গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিজ্ঞানের সম্বন্ধ

(Relation of Mathematics with other Sciences)

বিংশ শতাব্দীকে বলা হয় বিজ্ঞানের যুগ। ঐ শতাব্দীতে বিভিন্ন দিকে বিজ্ঞানের জয়যাত্রা অব্যাহত গতিতে এগিয়ে চলেছে। বর্তমানে অধিকাংশ শিক্ষিত ব্যক্তিই এই ধারণা পোষণ করেন যে, বর্তমান সভ্যতার অগ্রগতি সম্ভব হয়েছে বিজ্ঞানের অগ্রগতির জন্যই। অবশ্য বিজ্ঞান বলতে তাঁরা পদার্থ-বিদ্যা, রসায়ন-বিদ্যা, প্রাণীবিদ্যা, জ্যোতি-র্বিদ্যা এই সমস্তকেই বুঝিয়ে থাকেন। তাঁরা কিন্তু বিভিন্ন বিজ্ঞানের অগ্রগতিতে অঙ্কশাস্ত্রের অবদানের কথা চিন্তাই করেন না। অবশ্য এর অন্যতম কারণ হিসাবে বলা যাতে পারে, স্কুলে বা কলেজে যখন অঙ্কশাস্ত্র পড়ানো হয়, তখন বাস্তব জগতের সঙ্গে বা দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে তার সম্বন্ধ কতটুকু তা পরিষ্কারভাবে আলোচনা করা হয় না। কিন্তু বিজ্ঞানজগতে সবচেয়ে বেশী প্রয়োজনীয় ও কার্যকরী বিষয় হল—গণিত। গণিতের কোনরূপ সাহায্য না নিয়েই সভ্যতার অগ্রগতি সম্ভব—এ ধারণা সম্পূর্ণ ভ্রান্ত। ষ্টীম-ইঞ্জিন, মোটর-গাড়ী, এরোপ্লেন প্রভৃতি তৈরী করার আগে নকশা এঁকে নিতে হয়। আর এই নকশা আঁকার জন্যই গণিতের সাহায্য নিতে হয়। যেখানেই নিখুঁত পরিমাণের প্রয়োজন, সেখানেই গণিত অপরিহার্য। এখন দেখা যাক গণিত কিভাবে বিভিন্ন বিজ্ঞানকে প্রভাবিত করেছে।

১। **পদার্থ-বিদ্যা, রসায়ন বিদ্যা ও অন্যান্য ভৌত বিজ্ঞানে গণিতের ব্যবহার**—বিজ্ঞান জগতে নিখুঁত ও সহজবোধ্য প্রতীকের প্রচলন সম্ভব হয়েছে গণিতের জন্যই। তাছাড়া ভৌত বিজ্ঞানগুলির মধ্যে বিভিন্ন সম্বন্ধ নির্ণায়ক সমীকরণের উদ্ভবও গণিত থেকেই। বিজ্ঞানের অনেক নিয়মাবলী, সূত্র বা প্রাকৃতিক ঘটনা গণিতের সাহায্যে বা লেখচিত্রের সাহায্যে খুব সহজ ও সুন্দর ভাবে প্রকাশ করা যায়। আবার বৈজ্ঞানিক ঘটনাবলীর সংব্যাখ্যানের ক্ষেত্রেও গণিতের সাহায্য নিতে হয়। গবেষণার ক্ষেত্রেও বিজ্ঞানজগতে অকৃত্রিম বন্ধু হ'ল গণিত। বিজ্ঞান তখনই নিখুঁত হয় যখন গণিতের প্রয়োগ সম্ভব হয়। আর গণিতকে বাদ দিয়ে বিজ্ঞান হয়—অসম্ভব ও অবাস্তব।

২। **গণিত ও পূর্ত বিদ্যা**—প্রকৃতির শক্তির উৎস অসীম। এই শক্তিকে মানুষের সেবায় বা কল্যাণকর কাজে নিয়োজিত করাই হল পূর্তবিদ্যার উৎস। এ কথা কারো অজানা নয় যে এই পূর্তবিদ্যার ভিত্তিই হল গণিত। যে কোন একটি প্রকল্পের ভার হাতে নিলেই ইঞ্জিনিয়ারদের পর্যবেক্ষণ, পরিমাপ ইত্যাদি কতকগুলি সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়। গণিতের সাহায্যে এই সমস্যাগুলির সমাধান করায় পর আসল

কাজটি বাস্তবে রূপায়িত করার পথে অগ্রসর হওয়া সম্ভব হয়। ধরা যাক, কোন একজন ইঞ্জিনিয়ারকে নির্দিষ্ট সময়ে সেতু নির্মাণ করতে হবে। নির্মাণ করার আগে তাঁকে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা ইত্যাদি মাপ করতে হবে। প্রত্যহ কি পরিমাণ কাজ হলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হবে তা নির্ণয় করতে হবে; ঐ পরিমাণ কাজ করতে প্রত্যহ কতজন লোক লাগবে; তাদের বেতন কত দিতে হবে; মোট কত খরচ হবে ইত্যাদি নির্ণয় করার ব্যাপারে গণিতের সাহায্য অপরিহার্য। কাজেই ইঞ্জিনিয়ারের পক্ষে গণিতের সাহায্য না নিয়ে বেশীদূর অগ্রসর হওয়া সম্ভব নয়।

৩। **জীববিজ্ঞান ও গণিত**—জীববিজ্ঞানীরাও গণিত, বিশেষতঃ পরিসংখ্যানের যথেষ্ট প্রয়োগ করে থাকেন। বিভিন্ন জীবের মধ্যে শ্রেণীবিভাগ, জন্ম-মৃত্যুর হার বা নিয়মাবলী ইত্যাদি নির্ধারণের ক্ষেত্রে গণিত অপরিহার্য। টমাস ম্যালথাস, ডারউইন, আলফ্রেড্ রাসেল, ওয়ালেশ, মেণ্ডেল ইত্যাদি জীববিজ্ঞানী গণিতের সাহায্যে তাঁদের সূত্রাবলী প্রকাশ করেছেন ও সেগুলির ব্যাখ্যা করেছেন। আবার বর্তমান যুগে Bio-math নামক একটি নতুন শাস্ত্রের উদ্ভব হয়েছে। এই শাস্ত্রটির দুটি দিক আছে। একটি হ'ল Bio-Physics এবং অপরটি হ'ল Bio-Chemistry। অবশ্য শেষোক্ত বিষয় দুটি এখন পৃথক পৃথক বিজ্ঞান-বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়। কাজেই পদার্থ বিদ্যা বা রসায়নে যেমন গণিত প্রয়োগ করতে হয়, জীববিজ্ঞানে ঠিক সেইভাবেই গণিত প্রয়োগ করতে হয়। জীববিজ্ঞানীকেও পর্যবেক্ষণ পদ্ধতির সাহায্যে বিভিন্ন জীবকে বিভিন্ন শ্রেণীতে শ্রেণীভুক্ত করতে হয় এবং তার পরিপ্রেক্ষিতে সাধারণ সূত্র নির্ণয় করতে হয়। পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষণের ক্ষেত্রে গণিতের সাহায্যেই নিখুঁত পরিমাপ পাওয়া সম্ভব।

৪। **চিকিৎসা বিজ্ঞান ও গণিত**—চিকিৎসা বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও গণিতের নিজস্ব একটি স্থান আছে। অবশ্য এখানেও পরিসংখ্যানের ব্যবহারই অধিক। চিকিৎসা বিজ্ঞানের বিভিন্ন দিকে গণিতের ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। একটা সহজ উদাহরণ দেওয়া যাক। জন্মের পর নয়মাস বয়স পর্যন্ত শিশুর বৃদ্ধিকে নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়:—

$\log \frac{x}{341\cdot5x} - \mathrm{k}(t=1\cdot66)$ যখন x হল আউন্সে ওজন, t হল মাস হিসাবে বয়স এবং k একটি ধ্রুবক।

৫। **অর্থনীতি ও গণিত**—অর্থনীতিকে একটি সামাজিক বিজ্ঞান বলা যেতে পারে। অর্থনীতির ক্ষেত্রে গণিতের পদ্ধতি ও পরিভাষার ব্যবহার অত্যন্ত বেশী। বর্তমান যুগে অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিত ও পরিসংখ্যানের ব্যবহার যথেষ্ট বৃদ্ধি পেয়েছে। বলতে গেলে অর্থনীতির প্রায় সব সূত্রকেই গণিতের সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক। কোন জিনিষের চাহিদা সেই জিনিষটির দামের উপর নির্ভরশীল। যদি D হয় চাহিদা আর P হয় দাম, তবে $D=f(P)$। PD হল বিক্রীত জিনিষের মোট দাম। P বা D সঠিক কত, তা না জানলেও এই

সম্বন্ধটি যে সব সময় ঠিক, একথা বলা যেতে পারে। এই সম্বন্ধের সাহায্যেই আমরা বলতে পারি P কত হলে বিক্রেতার লাভ সবচেয়ে বেশী হবে। এ ছাড়া জীবন-বীমা, মূলধন, জাতীয় আয়, ব্যাঙ্ক ইত্যাদি ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার ক্রমশঃ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে বলে অনেক বিশ্ববিদ্যালয়ে অর্থনীতি বিষয়ে 'উন্নত গণিতকে' (Advanced Mathematics) একটি আবশ্যিক বিষয় হিসাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে।

৬। **মনোবিজ্ঞান ও গণিত**—যদিও গণিতের বিষয়বস্তু হল সংখ্যা আর মনোবিজ্ঞানের বিষয়বস্তু হল মন, তবুও এই মনোবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ অনেক বেশী। বুদ্ধ্যঙ্ক, সহ সম্বন্ধ নির্ণয়, বুদ্ধির বণ্টন, স্মৃতির বিস্তার, মনোযোগের বিস্তার ইত্যাদি নির্ধারণের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার করতে হয়। মনোবিজ্ঞানের পরীক্ষার ফলাফলের সংব্যাখ্যান করা হয় পরিসংখ্যানের সাহায্যে। মনোবিজ্ঞানকে সার্থক বিজ্ঞান হিসাবে গড়ে তুলতে সাহায্য করে গণিত।

৭। **তর্কশাস্ত্র ও গণিত**—সঠিক চিন্তন ও কার্যকরী সিদ্ধান্তের বিজ্ঞানসম্মত পর্যালোচনাই হ'ল তর্কশাস্ত্র। জ্যামিতি হল ব্যবহারিক তর্কশাস্ত্র। তর্কশাস্ত্রের প্রতীকের সাহায্যে আমরা আমাদের চিন্তাধারার একটা পরিমিত ও সুসংহত গতি নির্ণয় করতে পারি। তর্কশাস্ত্রবিদ ও গণিতবিদের লক্ষ্য একই, উভয়েরই লক্ষ্য হ'ল, তাঁদের নিজ নিজ বিষয়গুলি সংক্ষিপ্ত অথচ কার্যকরী ও নিখুঁত করা। কাজেই এ কথা বলা যেতে পারে তর্কশাস্ত্রের ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত ব্যাপক।

৮। **দর্শন ও গণিত**—দর্শনের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধ অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ। পৃথিবীর বিখ্যাত দার্শনিকদের মধ্যে অনেকেই খ্যাতনামা গণিতজ্ঞ ছিলেন। দর্শন আমাদের শিক্ষার লক্ষ্য স্থির করে দেয়। কিন্তু গণিতই দর্শনকে ঠিক পথে পরিচালিত করে। গণিতের সিদ্ধান্ত যেমন অমোঘ ও অপরিবর্তনীয়, দর্শনেরও তাই। এই জন্য যে সমস্ত দার্শনিক গণিতে পারদর্শী, তাঁদের মতামতগুলি বিশেষভাবে সমাদৃত হয়।

৯। **নীতিশাস্ত্র ও গণিত**—নীতিশাস্ত্রেও গণিতের প্রচলন আছে। নীতিশাস্ত্রের কিছু কিছু উপাদান ধনাত্মক (+), আবার কিছু কিছু ঋণাত্মক (−)। এই সমস্ত উপাদানকে একটি সাধারণ সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় :—$M=G$। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক। অমল ও বিমল ঘনিষ্ঠ বন্ধু এবং দুজনে একই অফিসে একই পদমর্যাদাতে একসঙ্গে কাজ করে আসছে। এখন এই দুজনের মধ্যে একজনের (যে কোন একজন) বেতন বৃদ্ধি পেতে পারে। অমল জানতে পারল—অরুণবাবুকে যে ধরতে পারবে তার বেতনই বাড়বে। অমল কি এই খবর বিমলকে জানাবে ?

অমল এই ভাবে সিদ্ধান্ত নিতে পারে :—

বেতন বৃদ্ধির ফলে যে পার্থিব লাভ তা দু'বন্ধুর ক্ষেত্রেই সমান। অর্থাৎ

$$gA=gB=g$$

অমল যদি বিমলকে খবরটি দেয়, তবে বিমলের অমলের সঙ্গে যে অপার্থিব (immaterial) বন্ধুত্ব f, তা রক্ষিত হয়) অর্থাৎ $M=g$

আর যদি বিমলকে অমল খবরটি না দেয়, তবে একদিন না একদিন ঐ বন্ধুত্ব নষ্ট হবেই। অর্থাৎ

$$M = g - f.$$

এখন যেহেতু g-এর পরিমাণ g—f অপেক্ষা বেশী, অতএব অমলের বিমলকে খবরটি দেওয়াই উচিত। নীতিশাস্ত্রের নতুন নতুন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আগমনমূলক পদ্ধতি (Inductive Method) ব্যবহার করাই শ্রেয়ঃ।

১০। **চারুকলা ও গণিত**—গণিতের সঙ্গে বিভিন্ন চারুকলার বিশেষ সম্পর্ক আছে। যে কোন শিল্পকার্য বা চিত্রকলাতে গাণিতিক আকৃতি বা অংশবিন্যাসে তার সৌষ্ঠব বৃদ্ধি পায়। গণিতেরও নিজস্ব একটি সৌন্দর্য আছে এবং গণিত-চর্চার ফলেই এই সৌন্দর্যের রসস্বাদনের ক্ষমতা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। তেমনি সঙ্গীতের ক্ষেত্রে শব্দ তরঙ্গ, শব্দের কম্পন ইত্যাদি নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও গণিতের প্রয়োজন। দক্ষ সঙ্গীতজ্ঞ, স্থপতি বা চিত্রকরকে ভালো গণিতজ্ঞও হতে হয়। জ্যামিতির উৎকর্ষের সঙ্গে চারুকলা বিশেষতঃ স্থাপত্য ও ভাস্কর্যের উৎকর্ষ বিশেষভাবে জড়িত। প্রাচীন গ্রীস স্থাপত্য ও ভাস্কর্যের ক্ষেত্রে যে এত বিখ্যাত হয়েছিল তার কারণ প্রাচীন গ্রীসে জ্যামিতি যথেষ্ট পরিমাণে উন্নত ছিল।

কাজেই দেখা যাচ্ছে প্রকৃতরি দিক থেকে পৃথক হলেও বিভিন্ন বিষয়ের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। গণিত যেন প্রতিটি বিষয়ের কেন্দ্রে অবস্থিত হয়ে বিষয়টিকে সার্থকতা ও সাফল্যের পথে এগিয়ে নিয়ে চলেছে। এখানেই গণিতের চরম কৃতিত্ব।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. Discuss the relation of Mathematics with other branches of study.

2. Considering Mathematics as the central subject, discuss its influence over other subjects.

3. All scientific education which does not commence with mathematics, is of necessity, defective at its foundation"—(Comte). Discuss.

চতুর্থ অধ্যায়

বিদ্যালয়ের পাঠক্রমে গণিত

(Mathematics in School Curriculum)

যে সমস্ত বিষয় স্কুল পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত, তাদের দুটি গুণ থাকবেই। প্রথমটি হল বিষয়টি থেকে প্রয়োজনীয় জ্ঞান আহরণ করা যাবে। দ্বিতীয়টি হল, সুনাগরিক হবার জন্য বিষয়টি কতকগুলি সু-অভ্যাস গঠনে সহায়তা করবে। জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োজন। সর্বস্তরের লোকও গণিত ব্যবহার করে থাকে। গণিতই হল সমস্ত বিজ্ঞান বিষয়ের মূলভিত্তি। ভবিষ্যতে ছাত্ররা যে উচ্চশিক্ষা গ্রহণ করবে সেই উচ্চশিক্ষার জন্য বা উপযুক্ত বৃত্তি নির্বাচন করার জন্য গণিতের একান্ত প্রয়োজন। গণিতের শিক্ষাগত মূল্যের জন্যই গণিতকে বিদ্যালয়ের পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত করা হয়।

তাছাড়া শিক্ষার উদ্দেশ্য হল নির্দিষ্ট কোন লক্ষ্যে উপনীত হওয়া। স্কুলপাঠ্য প্রতিটি বিষয় লক্ষ্যে পৌছানোর জন্য নিজ নিজ ক্ষমতানুযায়ী সাহায্য করে। কিন্তু এই লক্ষ্যে পৌছানোর ব্যাপারে গণিতই সর্বাপেক্ষা বেশী সাহায্য করে। মানব জীবনের ও মানব মনের প্রয়োজনের দিকে লক্ষ্য রেখে কোন বিষয় যদি সাহায্য করে থাকে, তবে সে বিষয় হল গণিত।

গণিতের বৈশিষ্ট্য হল শিক্ষাগত সূক্ষ্মতা ও ত্রুটিহীনতা। গণিতে সব কিছুই স্বচ্ছ, স্পষ্ট ও পরিষ্কার। কোন সমস্যার সম্মুখীন হলে শিক্ষার্থীর তা এড়িয়ে যাবার কোন উপায় থাকে না। গণিতে সূক্ষ্মতা ভাষার সূক্ষ্মতারই সমগোত্রীয়। শিক্ষণের দিক থেকে বিচার করলে সূক্ষ্মতার মাপকাঠিতে আইনশাস্ত্রের পরই গণিতের স্থান।

সংক্ষেপে বলা যেতে পারে গণিত এমন একটি বিষয় যার থেকে আমরা কোন ফল লাভ করি এবং যা আমাদের মনে আলোক সম্পাত ক'রে অজ্ঞানতা দূরীকরণে সহায়তা করে। এই জন্যই বলা হয়: Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords and the knowledge of fact it imparts. গণিতের **তত্ত্বগত ও ব্যবহারিক** উপযোগিতাগুলি আলোচনা করলেই স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে গণিতের গুরুত্ব আমরা উপলব্ধি করতে পারব।

তত্ত্বগত উপযোগিতা (Theoretical utility):

প্রথমে গণিতের তত্ত্বগত উপযোগিতাগুলির কথা আলোচনা করা যাক।

১। গণিত **যুক্তিসম্পন্ন চিন্তনে** সহায়তা করে। পাটীগণিতে সরল সুদকষার অঙ্ক না শিখলে চক্রবৃদ্ধির অঙ্ক করা সম্ভব নয়। তেমনি বীজগণিতে ল. সা. গু. বা গ. সা. গু. যদি না জানা থাকে, তবে কঠিন উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। আবার জ্যামিতিতে যতক্ষণ পর্যন্ত না ছাত্রদের জ্যামিতিক চিত্র বা ব্যবহারিক জ্যামিতির সঙ্গে পরিচয় ঘটছে, ততক্ষণ উপপাদ্যের পাঠ সুরু করা চলে না।

২। গণিত পাঠের ফলে **যুক্তিশক্তি বিকাশ** লাভ করে। অবশ্য গণিতে যে যুক্তির প্রয়োজন, সে যুক্তি উচ্চ দার্শনিক যুক্তি নয় ; এযুক্তি সহজ, ও সরল ও দৈনন্দিন জীবনে যে যুক্তির প্রয়োজন হয় তারই অনুরূপ যুক্তি। জ্যামিতি হল গণিতে যুক্তি প্রয়োগের প্রকৃষ্ট উদাহরণ।

৩। গণিত চিন্তনে **সত্যতা ও স্পষ্টতা** আনয়ন করে। ছাত্র যখন $5+3=8$, এই সম্বন্ধটি শিখে, তখন সে অন্য কোন সম্বন্ধ আর স্বীকার করতে চাইবে না। $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ বা ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি যে দুই সমকোণ এ সমস্ত নিয়মের কোন ব্যতিক্রম হয় না।

৪। গণিত শিক্ষণে **মনোযোগের একাগ্রতা** বৃদ্ধি পায়। মনোযোগের অভাব ঘটলে কখনও গণিতে শুদ্ধ ও সঠিক ফল পাওয়া যায় না। যে ছাত্র মনোযোগের অভাবের জন্য ভুল করে 30 টাকাকে 300 টাকা পড়ে বা লেখে বা যে ছাত্র x^3 কে x^2 পড়ে বা লিখে তার পক্ষে সঠিক উত্তর পাওয়া কখনও সম্ভব নয়। জ্যামিতিতেও তুচ্ছ ভুল বা দৃষ্টি এড়ানো তুচ্ছ ঘটনার জন্য প্রতিপাদ্য বিষয়টি প্রতিপন্ন করা একটা অসম্ভব ব্যাপার হয়ে দাঁড়ায়।

৫। গণিত শিক্ষণে ছাত্রদের **আবিষ্কার ও সৃজনী স্পৃহা** বৃদ্ধি পায়। অন্যান্য বিষয় পাঠেও আবিষ্কার ও সৃজনী প্রতিভার উন্মেষ বা বৃদ্ধি ঘটতে পারে। কিন্তু গণিত পাঠের ফলেই চরম ফল পাওয়া সম্ভব। এই সুফল আবার অনেকটা শিক্ষণ পদ্ধতির উপর নির্ভরশীল। কোন্ পদ্ধতি অবলম্বন করলে আবিষ্কার ও সৃজনী প্রতিভার চরম উন্মেষ সাধিত হয়, তা শিক্ষক মহাশয়কে জানতে হবে। এর জন্য আবিষ্কারক পদ্ধতি, আরোহ ও অবরোহ পদ্ধতি, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতি, পরীক্ষাগার পদ্ধতি প্রভৃতিই অধিক কার্যকরী হয়।

৬। **সহসম্বন্ধ নির্ণয়ে** গণিত সহায়তা করে। গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে অর্থাৎ পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে, গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের এবং গণিতের সঙ্গে জীবনের সহসম্বন্ধ (correlation) আছে। এইজন্যই স্কুলপাঠ্য বিষয়গুলির মধ্যে গণিতের গুরুত্ব সবচেয়ে বেশী।

ব্যবহারিক উপযোগিতা (Practical utility) ঃ

এবার আসা যাক ব্যবহারিক উপযোগিতার প্রসঙ্গে। গণিতের ব্যবহারিক উপযোগিতাও অন্যান্য বিষয়ের তুলনায় অধিক। কোন্ কোন্ দিকে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায় সে সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা হল :—

(১) আধুনিক যুগ হল বিজ্ঞান তথা গণিতের যুগ। যুগের সঙ্গে তাল রাখতে হলে গণিত শিক্ষণ প্রয়োজন।

(২) গণিত আমাদের প্রত্যেকের জীবনে প্রয়োজনীয়। শুধু শিক্ষিত ব্যক্তিই নয়, অশিক্ষিত ব্যক্তিদেরও গণিত ব্যবহার করতে হয়।

(৩) গণিত শিক্ষণের ফলে অন্যান্য বিষয়গুলি শেখা সহজ হয়। জ্যামিতির

সাহায্য নিয়েই ভূগোল ও ইতিহাসের মানচিত্র অঙ্কন করা সম্ভব হয়। তাছাড়া কৃষি, বিজ্ঞান, দারুশিল্প, অর্থনীতি, সমাজবিজ্ঞান, মনোবিজ্ঞান, প্রভৃতিতে গণিত ব্যবহার করা হয়। শুধু বিজ্ঞান বিষয়ই নয়, স্থকুমার শিল্প, সাহিত্য প্রভৃতিতেও গণিত ব্যবহার করা হয়। সাহিত্যে ছন্দ নির্ণয়ে গণিত একান্ত প্রয়োজনীয়। মেয়েদের ছুঁচের কাজ, রান্নার কাজ প্রভৃতি ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার করা হয়।

সকল গুরুত্বপূর্ণ বিষয়গুলির মধ্যে গণিতই একমাত্র বিষয় যার সাহায্য ব্যতীত বিজ্ঞানের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয় না। পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, জীববিদ্যা প্রভৃতি বিজ্ঞান-গুলিতে গণিতের যথেষ্ট প্রয়োগ দেখা যায়। ভৌতবিজ্ঞানের এবং পদার্থের ধর্মের গুণগত দিকটি দেখলে চলবে না; পরিমাণগত দিকটাও দেখতে হবে। জল কেবলমাত্র হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনের মিশ্রণের ফলে উদ্ভূত হয়—শুধু এ জ্ঞানই যথেষ্ট নয়। ঐ গ্যাস দুটি কি অনুপাতে মিশ্রিত হয়ে জলের সৃষ্টি হয় তা জানা প্রয়োজন। তখনই আমাদের জ্ঞান সম্পূর্ণ ও কার্যকরী হয়।

উপসংহার :

তাহলে দেখা যাচ্ছে, কেবলমাত্র অমূর্ত বা দার্শনিক মূল্যের জন্য নয়, শিক্ষাগত ও ব্যবহারিক মূল্যের জন্যও গণিতকে স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে নির্বাচিত করা হয়। গণিত চর্চার ফলেই ছাত্রের চিন্তা, যুক্তি ও বিচার শক্তির বিকাশ সাধন হয় ও মনোযোগের একাগ্রতা ও পরিসর বৃদ্ধি পায়। সৃজনমূলক ও গঠনমূলক কল্পনাশক্তি ও সৃজনীপ্রতিভা গণিত চর্চার ফলেই উন্নত হয়। ছাত্রের আত্মশক্তি ও আত্মপ্রত্যয়ও বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। এ সমস্তের ফলেই ছাত্রদের মধ্যে কতকগুলি সুসংবদ্ধ অভ্যাস গড়ে উঠে। তারা সত্যবাদী ও সৎ হয়। তাদের সু-চরিত্র গঠিত হয়।

গণিত বিষয়টি একটি অমূর্ত বিষয়। এর জন্য এমন পদ্ধতির প্রয়োজন যার ফলে ছাত্রের পরিশ্রম লাঘব হয় এবং গণিতের সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনের যোগসূত্রটি তার নিকট পরিষ্কার হয়। প্রয়োগধর্মী গণিত (Applied Mathematics) তার প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধের জন্য প্রভূত গুরুত্ব অর্জন করেছে। তাছাড়া অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধের কথা তো আগেই বলা হয়েছে।

মাধ্যমিক শিক্ষাকে এখন আর বিশ্ববিদ্যালয়ের উচ্চ শিক্ষার প্রারম্ভিক স্তর বলা হয় না। মাধ্যমিক শিক্ষাকে বর্তমানে নির্দিষ্ট লক্ষ্যবিশিষ্ট একটি স্বয়ংসম্পূর্ণ স্তর হিসাবেই ধরা হয়। মাধ্যমিক শিক্ষাকে এখন বিভিন্ন বৃত্তিতে নিযুক্ত হবার একটি শর্ত হিসাবে ধরা হয়। কাজেই মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিতের পাঠক্রমটি কোন একটি উচ্চশিক্ষার ক্ষেত্রে প্রবেশের উপযোগী করে তৈরী করা চলবে না। এর পাঠক্রমটি জীবনের দিকে লক্ষ্য রেখেই নির্বাচিত করতে হবে। **গণিত শিক্ষণের মূল কথা জ্ঞান অর্জন নয়, ক্ষমতা অর্জন।**

ছাত্রা নিজেদের পরিবেশে যে সমস্ত পরিমাণগত ও স্থানগত সমস্যার সম্মুখীন হয় তার সমাধান করার জন্য যাতে তারা গণিত প্রয়োগ করতে পারে তার শিক্ষা দিতে হবে। এর জন্যে প্রাথমিক ও মাধ্যমিক স্তরে তাদের সাহায্য করতে হবে।

অনেকে বলেন যে প্রত্যেক ছাত্রই তো আর যন্ত্রবিদ বা ইঞ্জিনিয়ার বা গণিতজ্ঞ হতে যাচ্ছে না। তাহলে সব ছাত্রকে গণিত শিখতে বাধ্য করার কি প্রয়োজনীয়তা আছে? কথাটা সত্য। কিন্তু কোন্ ছাত্র ভবিষ্যতে কি হবে, বা কোন বৃত্তি অবলম্বন করবে—তা আগের থেকে বলা যায় না, ভবিষ্যতে সে যে কোন বৃত্তিই গ্রহণ করুক না কেন, যাতে তার কোন অসুবিধা না হয় তার জন্য তাকে গণিতের মৌল নীতিগুলির শিক্ষা দেওয়া হয়। গণিত সম্পূর্ণ বাদ দিলে ছাত্রের নিকট অনেক বিষয় ও বৃত্তির দরজা সম্পূর্ণ বন্ধ হয়ে যাবে।

সাধারণ শিক্ষিত ব্যক্তির দৈনন্দিন জীবনে গণিতের অনেক তথ্যই কাজে লাগে না। কাজেই ঐ সমস্ত তথ্য বাদ দিয়ে স্কুলে গণিতের পাঠক্রম স্থির করা হোক—এ রকম মনোভাব অনেকেরই আছে। দৈনন্দিন জীবনে যা কার্যকরী করা এই মুহূর্তে সম্ভব হল না—তা যে অপ্রয়োজনীয় বা নিরর্থক, এমন চিন্তা করা সমীচীন নয়। কোন একটি তথ্য কতবার প্রয়োগ করা সম্ভব—তা বিচার করে গণিতের গুরুত্ব বা প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করলে চলবে না। দেখতে হবে গণিত প্রয়োগের ফলে কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে ও কি পরিমাণে সময়, অর্থ ও পরিশ্রম কম লাগছে। কাজেই গণিতের গুরুত্ব উপলব্ধি করার সময় এ সমস্তও চিন্তা করতে হবে।

অতএব দেখা যাচ্ছে গণিতকে কেন স্কুলপাঠ্য বিষয় হিসাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে, তার দুটি কারণ রয়েছে। প্রথমতঃ বিষয়টি পাঠে দৈনন্দিন জীবনে বাস্তব উপযোগিতা এবং দ্বিতীয়তঃ মানসিক শিক্ষণ। অতীতে কেবলমাত্র গণিতের শৃঙ্খলামূলক মূল্যের জন্য গণিতের পাঠ দেওয়া হত। কিন্তু শৃঙ্খলামূলক মূল্য ছাড়াও প্রয়োজনীয় আরো অনেক মূল্য গণিতের আছে। বর্তমান যুগে বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যার প্রভূত উন্নতির ফলে গণিতের অন্যান্য মূল্যগুলিরও যথার্থ মর্যাদা দেওয়া হচ্ছে। কাজেই জ্ঞান অর্জন এবং বিশেষ বিশেষ ক্ষমতা অর্জন—দুটিকেই সমান গুরুত্ব দেওয়া হচ্ছে।

একদল গণিতবিদ আছেন যাঁরা উপরের মতবাদে আস্থাশীল নন। তাঁরা বলেন, সাধারণ নাগরিকদের গণিতের তত্ত্ব ব্যবহার খুব বেশী প্রয়োজন হয় না। যেটুকুও বা হয়, তা হল পাটীগণিতের খুব সহজ সাধারণ সূত্রগুলির। আবার অধিকাংশ বৃত্তিমূলক বা পেশাগত কলেজে বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি বা জ্যামিতি ব্যবহার করা হয় না। ইঞ্জিনিয়ার, যন্ত্রবিদ বা নাবিকেরা গণিতের ব্যবহার করেন বটে, কিন্তু সম্পূর্ণ যান্ত্রিকভাবে। কেবলমাত্র যাঁরা মৌলিক চিন্তা করেন, নূতন নূতন ডিজাইন তৈরী করেন বা যাঁরা গণিত নিয়ে গবেষণা করেন, তাঁরাই স্বাধীন ভাবে গণিতের ব্যবহার করেন এবং এদের নিকট গণিত অপরিহার্য। কাজেই সকলের জন্য গণিত শিক্ষণের সমান সুযোগের ব্যবস্থা না করলেও চলবে।

আবার এ কথাও সত্য, জ্ঞান চিরকাল অপরিবর্তনীয় থাকে না। একজন ছাত্র আজ যা শিখল, আগামী কাল তার কোন গুরুত্ব না থাকতেও পারে। কাজেই একটি বিশেষ জ্ঞান আয়ত্ত করে না রেখে বিশেষ জ্ঞানটি আয়ত্ত করার ক্ষমতা অর্জন করতে হবে। ভবিষ্যতে ছাত্রের কোন্ কোন্ বিষয়ের প্রয়োজন হতে পারে স্কুলে তা

সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না। সেইজন্য ভবিষ্যতের দিকে লক্ষ্য রেখে বিশে বিশেষ বিষয়ের জ্ঞান আয়ত্ত করার ব্যাপারে তাদের সাহায্য করা যায় না। কিন্ত কোন বিষয়ের জ্ঞান কিভাবে আয়ত্ত করা যেতে পারে সেই কৌশল বা ক্ষমতাটি যদি ছাত্রদের আয়ত্তাধীন করে দেওয়া যায় তবে ভবিষ্যতে তাদের আর কোন অসুবিধা হবে না। কাজেই গণিত শিক্ষকের প্রধান কাজ হবে ছাত্রদের এমন ভাবে শিক্ষা দেওয়া যাতে তারা স্বাধীনভাবে শিখতে পারে, চিন্তা করতে পারে, তাদের বুদ্ধিমত্তার যথোপযুক্ত প্রয়োগ করতে পারে, পরিষ্কার-পরিচ্ছন্নতার ভাব অর্জন করে এবং চিন্তা ও তার প্রকাশে মিতব্যয়ী হতে পারে।

কাজেই প্রয়োজনীয় তত্ত্বের জ্ঞান অর্জন এবং শৃঙ্খলামূলক মূল্য এই দুটিকেই গণিতে সমান গুরুত্ব দিতে হবে। অবশ্য প্রয়োজনীয় তত্ত্বগুলি সকলের নিকট সমান প্রয়োজনীয় নাও হতে পারে। কিন্তু তবুও গণিত মানব-জাতির সেবায় কিভাবে সাহায্য করে চলেছে তা জানবার জন্য প্রত্যেককেই প্রয়োজনীয় তত্ত্বগুলি জানতে হবে। শিক্ষকের কর্তব্য হবে ছাত্রকে দুভাবে শিক্ষিত করে তোলা। এক মানসিক শিক্ষণের দিক দিয়ে এবং অপরটি হল প্রয়োজনীয় জ্ঞান আহরণ করার দিক দিয়ে। আর এই দু রকম শিক্ষণের জন্য একই পাঠক্রম বা তত্ত্ব ব্যবহার করতে হবে। দুটির জন্য দু রকম পাঠক্রম ব্যবহার করা মোটেই যুক্তিযুক্ত হবে না। বিখ্যাত মনোবিজ্ঞানী থর্নডাইকের (Thorndike) মতে : Teach nothing because of its disciplinary value, but everything so as to get what disciplinary value it does have.

মাধ্যমিক স্তরে গণিতের লক্ষ্য, পাঠক্রম ও তাহার সমালোচনা (Aims of Secondary Mathematics, the Curriculum & its Criticism)

আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে গণিত শিক্ষণের সাধারণ ও বিশেষ উদ্দেশ্যগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। শিক্ষার্থীর মানসিক বিকাশের স্তর অনুযায়ী বিশেষ বিশেষ স্তরে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য ও বিষয়বস্তু নির্ধারণ করা উচিত। মাধ্যমিক স্তরে গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য কি হওয়া উচিত তা নির্ণয় করা অত্যন্ত কঠিন। এই স্তরে গণিতের স্থান নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি এবং সেগুলির পারম্পর্য বিবেচনা করা উচিত।

(১) শিশুর মানসিক বিকাশ, পরিবেশ, ও পূর্বজ্ঞান।
(২) সাধারণ শিক্ষার লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য।
(৩) গাণিতিক বিষয়বস্তুর ধারণা ও চিন্তনের বিকাশ পদ্ধতি।

মাধ্যমিক শিক্ষা সাধারণতঃ ১০+বছর বয়স থেকে আরম্ভ হয় এবং ১৬+ বা ১৭+ বছর বয়স পর্যন্ত বিস্তৃত হয়। এই সময় শিক্ষার্থীর দৈহিক, মানসিক, বৌদ্ধিক, প্রাক্ষোভিক ও সামাজিক বিকাশ অত্যন্ত দ্রুত হয়। শিক্ষার্থী এই সময় প্রত্যক্ষণ, অনুমান করণ, উদ্দেশ্যমূলক কাজ করা, ভাষা প্রয়োগ করা, বিমূর্ত ধারণা করা,

বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী লাভ করা ইত্যাদি বৃত্তি লাভ করে। তাছাড়া সে এগুলি ব্যক্তিগত ও দলগত প্রয়োজনে প্রয়োগ করার চেষ্টাও করে।

শিক্ষার লক্ষ্য স্থির করার সময় ব্যক্তি ও সমাজ উভয় দিকেই লক্ষ্য রাখা হয়। ব্যক্তিকে বিচার করা হয় একটি সামাজিক প্রাণী হিসাবে। প্রত্যেক শিক্ষার্থীর দৈহিক, মানসিক ও বৌদ্ধিক প্রয়োজনগুলির দিকে লক্ষ্য না রাখলে কোন কার্যকরী সামাজিক শিক্ষা দেওয়া যায় না। আবার শিক্ষার্থীর অন্তর্নিহিত সুপ্ত সম্ভাবনাগুলির পরিপূর্ণ বিকাশ সাধন করতে না পারলে ব্যক্তি এবং সমাজ উভয়েই ক্ষতিগ্রস্ত হয়। শিক্ষার প্রধান কাজই হল—শিক্ষার্থীর সুপ্ত গুণাবলীর পরিপূর্ণ বিকাশ সাধন করা এবং আদিম প্রবৃত্তিগুলিকে বর্তমান সুসভ্য সমাজের উপযোগী করে পরিচালিত করে শিক্ষার্থীকে সামাজিক মানুষ ও সুসভ্য নাগরিক হিসাবে গড়ে তোলা।

এই দ্বিবিধ আপাত-বিরোধী লক্ষ্যে পৌছানো কিন্তু খুব সহজ নয়। শিক্ষা একটি ব্যাপক ও জীবনব্যাপী প্রক্রিয়া। কেবলমাত্র মাধ্যমিক স্তরেই এই শিক্ষা সম্পূর্ণ হতে পারে না। তাছাড়া বুদ্ধি ও সম্ভাবনার মধ্যেও আবার ব্যক্তিগত পার্থক্যের নীতিটিও লক্ষ্য করা উচিত। কিন্তু বর্তমান গণতান্ত্রিক ও সমাজতান্ত্রিক আদর্শ এই বৈষম্যের পরিধিকে যথাসম্ভব সংকুচিত করতে চায়। এইজন্য শাসনতন্ত্রের মধ্যে মাধ্যমিক স্তরে একটি অল্পবিস্তর স্বয়ংসম্পূর্ণ শিক্ষার নীতি স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে। ভবিষ্যৎ উচ্চতর শিক্ষার জন্য সকলে সমান আগ্রহী নয়—আবার সকলে অধিকারীও নয়। এইজন্য মাধ্যমিক শিক্ষাকে কেবলমাত্র উচ্চতর শিক্ষার প্রস্তুতি বা প্রারম্ভিক স্তর বলা যায় না। বর্তমানে একটি নির্দিষ্ট উদ্দেশ্যকে লক্ষ্য করেই এটি গড়ে তোলা হয়েছে। আবার একথাও বলা যেতে পারে যে মাধ্যমিক শিক্ষার পাঠক্রম রচিত হয়েছে জীবনের দিকে লক্ষ্য রেখে। সঙ্গে সঙ্গে ভবিষ্যৎ উচ্চতর শিক্ষার বিভিন্ন ক্ষেত্রে ও বিভিন্ন বৃত্তিতে প্রয়োগমূলক প্রস্তুতির স্তর হিসাবেও মাধ্যমিক শিক্ষার পাঠক্রম নির্ধারণ করা হয়ে থাকে। গণিত একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সুতরাং এই দুটি দিকে লক্ষ্য রেখে গণিতের পাঠক্রম মাধ্যমিক স্তরে নির্ধারিত হওয়া উচিত। একটা কথা এই প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে, জ্ঞান অর্জন করাটাই গণিত শিক্ষার মূল কথা নয়—জ্ঞান অর্জন করার ক্ষমতা লাভই এর মূল উদ্দেশ্য।

আমরা আগেই বলেছি যে সব দেশে, সব কালে গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য অপরিবর্তিত থাকতে পারে না। দেশের সামাজিক, অর্থনৈতিক ইত্যাদি বিভিন্ন জাতীয় অবস্থা ও চাহিদার উপর গণিত শিক্ষণের লক্ষ্য নির্ভর করে। UNESCO-র সহযোগিতায় International Bureau of Education পৃথিবীর ৬২টি দেশের শিক্ষাবিভাগের মতামত গ্রহণ করে মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিত শিক্ষণের কতকগুলি লক্ষ্য স্থির করেছেন। এগুলিকে প্রধানতঃ চারটি ভাগে ভাগ করা যায়।

১। শিক্ষামূলক উদ্দেশ্য। ২। সাধারণ শিক্ষামূলক উদ্দেশ্য। ৩। দৈনন্দিন জীবন ধারণের উপযোগী ব্যবহারিক উদ্দেশ্য। ৪। ভবিষ্যৎ শিক্ষার প্রস্তুতিমূলক উচ্চতর শিক্ষার উদ্দেশ্য।

প্রথমে যে উদ্দেশ্যটির কথা বলা হয়েছে তার সঙ্গে গণিতের শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্যটির যথেষ্ট মিল আছে। এই উদ্দেশ্যটি শিক্ষার্থীর মানসিক ও বুদ্ধিগত বিকাশের সমার্থক। এককথায় বলা যায়—শিশুর ব্যক্তিত্ব বিকাশে সহায়ক যে মানসিক ও নৈতিক শক্তি, গণিত শিক্ষার মাধ্যমে সেইগুলির অনুশীলন ও বিকাশ সাধন করাই এই উদ্দেশ্যের মূল কথা। দ্বিতীয় ও তৃতীয় উদ্দেশ্যের সঙ্গে ন্যূনতম জীবনযাপন মূলক উদ্দেশ্যটির কোন প্রভেদ নেই। এ-দুটির মধ্যে সামাজিকতা ও নাগরিকতার শিক্ষার একটা আভাস দেওয়া আছে। সাধারণ শিক্ষার পরিধি অত্যন্ত ব্যাপক। এই শিক্ষায় ব্যক্তিকে যেমন উৎপাদনশীল নাগরিক হিসাবে গড়ে তোলার একটা পরিকল্পনা আছে, তেমনি দায়িত্বশীল একজন নাগরিক হিসাবে কৃষ্টি ও সামাজিক সঙ্গতি বজায় রাখার উদ্দেশ্যটিও নিহিত থাকে। এই উদ্দেশ্যের মাধ্যমে কতকগুলি গাণিতিক অভ্যাস অর্জিত হয় ও গণিতের প্রতীকমূলক ভাষা ব্যবহারের একটা ক্ষমতাও গড়ে ওঠে। চতুর্থ উদ্দেশ্যের কথাও আগে বলা হয়েছে। গণিত শিক্ষার অন্যতম প্রধান উদ্দেশ্য হল উচ্চতর স্তরে বিজ্ঞান তথা প্রযুক্তি বিদ্যার শিক্ষার্থীদের জন্য একটি নির্ভরযোগ্য ভিত্তি স্থাপন করা। এই বিজ্ঞান ও প্রযুক্তিবিদ্যার শিক্ষা বর্তমান যুগে বিভিন্ন জাতীয় বৃত্তিতে প্রযুক্ত হচ্ছে।

মাধ্যমিক স্তরে সাধারণ শিক্ষার মধ্যে যে সমস্ত বিশেষ উদ্দেশ্য আছে তার মধ্যে প্রধান হল শিশুর অন্তর্নিহিত সুপ্ত সম্ভাবনাগুলির বিকাশ সাধন করা। এগুলির মধ্যে পড়ে ভাষা-জ্ঞান, ভাষার ব্যবহার, ধারণার দ্রুততা, বক্তব্য উপস্থাপনে যথার্থতা, পর্যবেক্ষণ শক্তি, কার্য-কারণ সম্পর্ক নির্ণয়, সাধারণ নিয়ম আবিষ্কার করণ ইত্যাদি। এই সমস্ত উদ্দেশ্য সফল করতে এবং স্থায়ী কোন অভ্যাস গঠন করতে যে সমস্ত বিষয়-বস্তুর প্রয়োজন সেইগুলিই মাধ্যমিক স্তরে পাঠ্যসূচীর প্রধান অংশ হওয়া উচিত।

ভারতে মাধ্যমিক স্তরে গণিতের লক্ষ্য – ভারত সরকারের শিক্ষামন্ত্রক মাধ্যমিক স্তরে গণিত শিক্ষার যে উদ্দেশ্যের কথা ব্যক্ত করেছেন সংক্ষেপে তা হল :—

১। দৈনন্দিন জীবনের কর্মসম্পাদনে প্রধান সহায়ক হিসাবে পাটীগণিতের নানাবিধ সমস্যা বুঝতে পারা, সমস্যাগুলির যথাযথভাবে উপলব্ধি করা, এবং নির্ভুলভাবে ও আত্মবিশ্বাসের সঙ্গে সমস্যাগুলির সমাধান করার ক্ষমতা অর্জনে সহায়তা করা।

২। শিশুর বুদ্ধির বিকাশ সাধন করা, তাকে বিমূর্ত চিন্তনে, বিচারকরণে ও যুক্তিপ্রয়োগে সহায়তা করা।

৩। উচ্চস্তরে যেটুকু গণিত না শিখলে বিজ্ঞান ও গণিত শেখা সম্ভব নয়, গণিতের সেই ন্যূনতম জ্ঞানটুকু শিক্ষা দেওয়া।

পরিবর্তিত সিলেবাস অনুযায়ী গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য : পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ ১৯৭৪ সালে যে পরিবর্তিত সিলেবাস সুপারিশ করেছেন, তাতে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যের সম্বন্ধে বলা হয়েছে :—

১। বিচারকরণের ক্ষমতা অর্জনে সহায়তা করা। (To develop powers of reasoning).

২। বিদ্যালয়, গৃহ ও সামাজিক পরিবেশে যে সমস্ত সংখ্যামূলক ও জ্যামিতিক সমস্যার উদ্ভব হয়, সেগুলি দ্রুততার সঙ্গে সম্পাদনের ক্ষমতা অর্জনে শিক্ষার্থীদের সহায়তা করা। (To enable pupils to solve speedily the numerical and geometrical problems that arise in their school, family and community activities).

৩। চিন্তার অভিব্যক্তি ও কার্যসম্পাদনে যথার্থ হবার গুণ ও ক্ষমতা অর্জনে সহায়তা করা। (To encourage pupils to cultivate the qualities of exactness in expression and performance).

৪। মানুষের আবিষ্কারের ক্ষেত্রে ও মহাকাশ অভিযানের ক্ষেত্রে যে-গণিত যথেষ্ট সহায়ক, সেই গণিত সম্বন্ধে ছাত্রদের মনে একটা প্রশংসামূলক মনোভাব গড়ে তোলা। (To arouse in pupils admiration for Mathematics whose application has considerably helped man's adventure in the Outer Space).

এ ছাড়াও পর্ষদ মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে পাটীগণিত ও বীজগণিত শিক্ষার কয়েকটি লক্ষ্যের কথাও উল্লেখ করেছেন।

(১) সংখ্যা শাস্ত্র, গণিতের প্রাথমিক নিয়মাবলী ও তৎসংক্রান্তীয় তথ্য আহরণ ও সমস্যার পর্যবেক্ষণে ছাত্রদের পরিচিত করা। (To make the pupils familiar with number system and basic operations on them and laws related to these operations).

(২) সংখ্যা শাস্ত্র সম্বন্ধে প্রাথমিক জ্ঞান অর্জনের মাধ্যমে দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা সমাধানে সহায়তা করা। (To acquire knowledge of manipulation with the elements of number system so as to make use of them in problems of daily life).

বিভিন্ন স্তরে গণিতের পাঠক্রমের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্য : মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিতকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়। এই স্তর বিভাগের বাঁধাধরা এবং সুনির্দিষ্ট কোন নিয়ম নেই ; প্রধানতঃ মানসিক শক্তির বিকাশ এবং অভিজ্ঞতার সম্ভাবনাগুলির কথা চিন্তা করেই এই স্তর-বিভাগ করা হয়েছে। ঠিক কোন্ বয়সে বা কোন্ শ্রেণী থেকে স্তরগুলি পৃথক ও বিশেষায়িত হবে তা নিয়েও মতবিরোধ থাকতে পারে। তবে প্রচলিত যে স্তর-বিন্যাস আছে সেগুলি প্রধানতঃ এই রকম :—

১। প্রাথমিক স্তর : ৬ থেকে ১০ বছর বয়স পর্যন্ত। (১ম—৪র্থ শ্রেণী)।
২। নিম্ন মাধ্যমিক স্তর : ১১ থেকে ১৪ বছর বয়স পর্যন্ত। (৫ম—৮ম শ্রেণী)।
৩। উচ্চ মাধ্যমিক স্তর : ১৫ থেকে ১৬ বা ১৭ বছর বয়স পর্যন্ত। (৯ম—১০ম শ্রেণী)।

প্রাথমিক স্তর : লক্ষ্য : ১। শিশুর জীবনে সহজ ও দৈনন্দিন সাধারণ

সমস্যাগুলি উপলব্ধি করতে শিশুকে সাহায্য করা এবং সেগুলি নিয়ে দক্ষতার সা
কাজ করতে শেখানো।

২। নির্ভুলতা ও দ্রুততার অভ্যাস অর্জনে শিশুদের সহায়তা করা।

৩। গণিত সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক ধারণা গঠনে সহায়তা করা।

৪। সংখ্যা ও সংশ্লিষ্ট বিষয়গুলির মধ্যে সহজ সম্পর্কটি উপলব্ধি করতে সহায়
করা।

৫। ব্যবহারিক জীবনে সংখ্যা প্রয়োগের দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করা।

৬। হাতে-কলমে কাজের মাধ্যমে গণিত পাঠে আগ্রহ সঞ্চার করা।

বিশেষ উদ্দেশ্য ঃ (১) গণিতে দক্ষতা অর্জন।

(২) সংখ্যা পড়া ও সেগুলি লেখার অভ্যাস করানো।

(৩) স্থানাঙ্কের ব্যবহার শিক্ষা করা।

(৪) ছোট, বড় ইত্যাদি জাতীয় পরিমাণ ও ক্রমিক সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অ
করা।

(৫) প্রথম চারটি নিয়ম আয়ত্ত করা।

(৬) পরিমাণ ও একক সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

(৭) সহজ সংখ্যামূলক সমস্যা পর্যবেক্ষণ করা, উপলব্ধি, বিশ্লেষণ ও সমাধ
করা।

(৮) নির্ভুলতা ও দ্রুততার সঙ্গে মানসিক কাজে অভ্যস্ত করা।

(৯) 'বিশুদ্ধ শূন্য' ও স্থানীয় শূন্য' সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

(১০) ভগ্নাংশ সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সেগুলি প্রয়োগ কর

(১১) দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

(১২) দশমিক মুদ্রা ও অন্যান্য পরিমাপের ক্ষেত্রে মেট্রিক পদ্ধতিতে দক্ষতা অ
করা।

(১৩) সহজ জ্যামিতিক অঙ্কন, বিশেষতঃ ক্ষেত্র অঙ্কনে অভ্যস্ত করা।

(১৪) দিক্‌নির্ণয় ও নকশা অঙ্কনে অভ্যস্ত করা।

এই বিশেষ উদ্দেশ্যগুলির উপর ভিত্তি করেই এই স্তরে গণিতের বিষয়বস্তু নির্বা
করা হয়ে থাকে।

নিম্ন মাধ্যমিক স্তর ঃ লক্ষ্য ঃ (১) গণিতের সঙ্গে শিশুর পরিবেশ ও বৃহ
সমাজের ঘনিষ্ঠ সম্পর্কটি উপলব্ধি করতে সাহায্য করা।

(২) গণিতের বিভিন্ন ও বিচিত্র বিষয়বস্তু ও কার্যাবলী সম্বন্ধে ছাত্রদের জ্ঞা
আগ্রহ ও দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করা।

(৩) ব্যবহারিক জীবনে গণিতের উচ্চতর ক্ষেত্রে ও গণিত-নির্ভর বিভিন্ন বিষ
গণিতের প্রয়োগে ছাত্রদের আগ্রহী করে তোলা।

(৪) জীবনের বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা
গাণিতিক সুষ্ঠু দৃষ্টিভঙ্গী গঠনে ছাত্রদের সহায়তা করা।

(৫) শিক্ষাক্ষেত্রে ও বৃত্তিক্ষেত্রে যথোপযুক্ত নির্বাচন করার ক্ষমতা ও যোগ্যতা অর্জনে সহায়তা করা।

(৬) গণিত থেকে সৃষ্ট অভ্যাসগুলিকে যথাসম্ভব প্রয়োগ করতে সাহায্য করা।

বিশেষ উদ্দেশ্য ঃ যে কোন স্তরে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির সার্থকতা তার অগ্রবর্তী স্তরের উদ্দেশ্যগুলির সফলতার উপর বহুল পরিমাণে নির্ভর করে। অভ্যাস এবং চর্চা গণিতের এমন একটি উদ্দেশ্য যা সর্বদেশে এবং সর্বকালে প্রযোজ্য। সুতরাং বলা যেতে পারে এই স্তরের গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির মধ্যে পূর্ববর্তী স্তরের উদ্দেশ্যগুলি অঙ্গাঙ্গীভাবে নিহিত থাকবে। এই স্তরের বিশেষ উদ্দেশ্যগুলি হল :—

১। জটিলতর সংখ্যা ও ভগ্নাংশ এবং দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় গাণিতিক কার্যাবলী সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা ও সেগুলির ব্যবহারিক প্রয়োগ।

২। মেট্রিক প্রণালীর উন্নততর ও ব্যাপকতর প্রয়োগ।

৩। গণিতের প্রতীকমূলক ভাষা উপলব্ধি করা ও সেগুলি ব্যবহার করার শক্তি অর্জন করা।

৪। গণিতের সূত্র ও সাধারণ নিয়ম ব্যবহারে অভ্যস্ত হওয়া।

৫। সমস্যার বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণে যুক্তি প্রয়োগে অভ্যস্ত হওয়া।

৬। আরোহ-অবরোহমূলক পদ্ধতি প্রয়োগে প্রাথমিক দক্ষতা অর্জন করা।

৭। গণিতে সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন করা।

৮। গণিতের বিভিন্ন বিষয় ও শাখার ব্যবহার সম্বন্ধে ধারনা অর্জন করা ও সেগুলির সম্পর্ক সম্বন্ধে কিছু ধারণা লাভ করা।

৯। সঠিক প্রমাণ ও নির্ভুল সমাধানে আগ্রহান্বিত হওয়া।

১০। যথাযথ ও স্বচ্ছ চিন্তনের ক্ষমতা অর্জন করা।

১১। ভুল এবং ত্রুটি নির্ণয়ের মাধ্যমে আত্ম-সমালোচনা করার ক্ষমতা অর্জন করা।

১২। যতদূর সম্ভব বস্তুনিষ্ঠ মনোভাব সৃজনের চেষ্টা করা।

১৩। পাঠের পুনরালোচনা ও পুনরনুশীলনের অভ্যাস গঠনে সহায়তা করা।

১৪। সহজ উদাহরণ ও সমস্যার মাধ্যমে সাফল্য অর্জনের সচেতনতার মধ্য দিয়ে ছাত্রদের মধ্যে গণিতে প্রেরণা ও আগ্রহের সৃষ্টি করা।

১৫। 'সম্ভাব্য হিসাব' করার ক্ষমতা অর্জনে সহায়তা করা।

উচ্চ মাধ্যমিক স্তর ঃ এই স্তরে গণিতের পাঠদান তিনটি স্তরের মধ্যে বিভাজিত করা যেতে পারে :—

(ক) দশম শ্রেণীর স্কুলে—৯ম ও ১০ম শ্রেণী।

(খ) একাদশ শ্রেণীর স্কুলে—৯ম থেকে ১১শ শ্রেণী।

(গ) কোর গণিত—৯ম ও ১০ শ্রেণী।

এই স্তরে গণিত শিক্ষণের প্রধান লক্ষ্য হচ্ছে ভবিষ্যৎ জীবনের প্রয়োজন অনুসারে গণিতে নিম্নতম আবশ্যকীয় কার্যে দক্ষতা সৃষ্টি করা। সুনাগরিকতার শিক্ষার জন্য

গণিত শিক্ষা একান্ত প্রয়োজনীয়। সেইজন্য একাদশ শ্রেণীর বিদ্যালয়ে গণিতকে 'কোর-বিষয়' হিসাবে পরিগণিত করা হয়েছিল। এই স্তরে দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয় কিছু বিষয়বস্তুর সংযোজন করা হয়। যদি বীজগণিত ও জ্যামিতির অপেক্ষাকৃত কঠিন ও বিস্তৃততর অংশগুলি বাদ দেওয়া হয় তবে নিম্ন মাধ্যমিক স্তরের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি এই স্তরে সর্বতোভাবে প্রয়োগ করা যায়। অবশ্য এই স্তরে বিষয়বস্তুর গুণগত ও পরিমাণগত পরিসর কিছুটা বাড়ানো হয় শিক্ষার্থীর অভিজ্ঞতা ও মানসিক শক্তির বৃদ্ধির উপর লক্ষ্য রেখে। নিম্ন মাধ্যমিক স্তরের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলির সঙ্গে এই স্তরের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি সংযোজিত হওয়া বাঞ্ছনীয়।

লক্ষ্য ঃ ১। সংখ্যা ও পরিমাণের ক্ষেত্রে জটিলতা ও আনুমানিকতার ব্যবহার করা।

২। ব্যক্তিগত, সামাজিক ও অর্থনৈতিক জীবনে গণিত প্রয়োগ করা।

৩। বৃত্তিমূলক ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ।

৪। গণিতে উন্নততর জ্ঞান ও দক্ষতা অর্জন করা।

৫। বিমূর্ত চিন্তা, উপযুক্ত ভাষা ব্যবহার, সিদ্ধান্ত গ্রহণের দ্রুততা, সামান্যীকরণের ক্ষমতা, মানসিক ও বুদ্ধিমূলক কার্যে দক্ষতা ইত্যাদি ক্ষেত্রে ক্ষমতা অর্জনে সহায়তা করা।

৬। বিজ্ঞানসম্মত মনোভাব গড়ে তোলা।

৭। গণিতের আবিষ্কারমূলক দিকটির পরিস্ফুটন ও সম্প্রসারণ এবং গণিতের অতীত, বর্তমান ও সম্ভাব্য আবিষ্কারগুলি অনুধাবনে সাহায্য করা।

৮। সাধারণ জীবনে প্রযোজ্য অন্যান্য বিষয়গুলির মধ্যে গণিতের প্রভাব উপলব্ধি করতে সাহায্য করা।

৯। সৌন্দর্যবোধ সৃষ্টিতে ও সৃজনমূলক ক্ষমতা বিকাশে গণিতের প্রভাব উপলব্ধি করতে সাহায্য করা।

বিশেষ উদ্দেশ্য ঃ ১। গণিতের ক্ষেত্রে প্রতীকমূলক ভাষা আরো ব্যাপকভাবে ব্যবহার করার অভ্যাস গঠন করা।

২। গণিতের কার্য-কারণ ও আরোহ-অবরোহমূলক যুক্তি আরো ব্যাপকতর ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা।

৩। গণিতের জটিলতর তত্ত্বগুলি উপলব্ধি করা।

৪। সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা পরিবর্ধিত করা ; অমূলক ও কাল্পনিক সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

৫। দ্রুত অথচ নির্ভুল হিসাবের ক্ষমতা অর্জন করা।

৬। স্বজ্ঞা, সংজ্ঞা ও প্রকল্পের ভিত্তিতে যুক্তিসম্মত ও নির্ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া।

৭। ব্যবহারিক জীবনে প্রযোজ্য জ্যামিতিক বস্তু ও ক্ষেত্রগুলি সম্বন্ধে পরিমাপমূলক দক্ষতা অর্জন করা।

৮। লেখচিত্রের উন্নততর ও জটিলতর ব্যবহার ও প্রয়োগ।

৯। সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে 'চলকে'র (Variables) প্রয়োগ।

১০। বিভিন্ন একক সম্বন্ধে পূর্ণাঙ্গ ধারণা অর্জন করা।

১১। গণিতের আভ্যন্তরীণ ও বাহ্যিক অনুবন্ধ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

১২। সূচক-তত্ত্ব ও লগারিদম্ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

১৩। বর্তমান সভ্যতার স্তম্ভ হিসাবে গণিত সম্বন্ধে একটি সুষ্ঠু ও অনুকূল মনোভাব গঠনে সহায়তা করা।

১৪। 'শূন্য' ও 'অসীম' সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

১৫। ভাষা ও চিন্তার প্রয়োগক্ষেত্রে পরিমিত হওয়ার ক্ষমতা অর্জন করা।

১৬। বিভিন্ন জাতীয় গাণিতিক যন্ত্রপাতির ব্যবহার সম্বন্ধে অবহিত করা।

১৭। শিক্ষার্থীর পরিবেশে গণিতকে সক্রিয় অংশ গ্রহণে সহায়তা করা।

এই আলোচনা থেকে বোঝা যাচ্ছে যে গণিতের জ্ঞান বহু বৃত্তি ও শিল্পে বিভিন্ন জাতীয় নিপুণতা প্রদান করে। বর্তমান যুগকে বলা হয় বিজ্ঞানের যুগ। বিজ্ঞানের অগ্রগতি হচ্ছে অত্যন্ত দ্রুতহারে। সেই দ্রুতগতির সঙ্গে সামঞ্জস্য বজায় রাখতে হলে গণিতের পাঠক্রমটিকেও যথাযথভাবে পরিবর্তিত ও উন্নততর করতে হবে। উচ্চতর শিক্ষা, বিশেষতঃ বৈজ্ঞানিক শিক্ষা দাঁড়িয়ে আছে গণিতের ভিত্তির উপর। গণিতের ব্যবহারিক দিকটিও যথেষ্ট ব্যাপক। বিদ্যালয়ে গণিতের পাঠক্রম স্থির করার সময় গণিতের বিভিন্ন জাতীয় লক্ষ্যের ও উদ্দেশ্যের প্রতি সবিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে।

গণিত পাঠক্রমের সমালোচনা—বর্তমান যুগে শিক্ষা জীবন থেকে বিচ্ছিন্ন নয়। বরং বলা যায়, শিক্ষাই হল জীবন ; জীবনই শিক্ষা। কাজেই জীবনের যা লক্ষ্য, শিক্ষারও তাই। জীবন যেমন জড়, গতিবিহীন নয়, শিক্ষাও তেমনি। জীবনের পরিবর্তিত গতির সঙ্গে সঙ্গে শিক্ষার লক্ষ্যও পরিবর্তিত হয়ে যায়। আমরা শিক্ষার সাহায্য নিয়েই জীবনের চাহিদাগুলি মিটিয়ে থাকি। আবার শিক্ষাই হল সভ্যতা, সংস্কৃতি, কৃষ্টি বা প্রগতির ক্ষেত্রে সাফল্য ও অগ্রগতির উৎস। কিন্তু শিক্ষা বলতে আমরা 'তোতাকাহিনীর' মতো কতকগুলি নিষ্ক্রিয় তথ্য আয়ত্ত করাই বুঝি না। শিক্ষা একটা গতিশীল প্রাণপ্রবাহ। অতীতের কঙ্কালের উপর বসে তার চর্বিত-চর্বন বা ভবিষ্যৎ-সম্ভাবনার অলস মায়াজাল বোনা, এই দুটির কোনটিই কিন্তু প্রকৃত শিক্ষা নয়। প্রকৃত শিক্ষা হবে **বাস্তবনির্ভর ও অভিজ্ঞতাভিত্তিক**। শিশু নিজে যা প্রত্যক্ষ করেছে এমন জিনিসই শিক্ষার বিষয়বস্তু হওয়া বাঞ্ছনীয়। শিক্ষকের কাজ হবে সেই বাস্তব জ্ঞানকে সামগ্রিকভাবে শিশুর সামনে উপস্থাপিত করা। শিশুর পরিবেশটি এমন ভাবে গড়ে তুলতে হবে, সমস্যাগুলি তার উপযোগী করে এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে, যাতে শিশু সেগুলির সমাধানে উৎসাহিত হয়, আত্মনির্ভর হয়। শিশুর সক্রিয়তা ও বাস্তব অভিজ্ঞতাকে মূলধন করেই শিক্ষককে অগ্রসর হতে হবে।

মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরকে একটি স্বয়ংসম্পূর্ণ স্তর বললে ভুল বলা হবে না। এই স্তরে পাঠক্রম রচনা করার সময় সাধারণ শিক্ষার লক্ষ্যগুলিকেও বিচার ও পর্যালোচনা করা

হয়। এই কারণেই মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরের পাঠক্রমে জীবনকেন্দ্রিক কয়েকটি মূ
বিষয়ের উপর সবিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়। যে সমস্ত বিষয়ের সঙ্গে আমাদে
দৈনন্দিন জীবনের বিশেষ সম্পর্ক আছে এবং যেগুলির বাস্তবজীবনে বিশেষ প্রয়োগ
মূলক মূল্য থাকে, সেগুলিকে আবশ্যিক বিষয় হিসাবে ধরা হয়ে থাকে। আবার এ
বিষয় গুলির মধ্যেই এমন কতকগুলি বিষয় আছে যেগুলির কোন একটিকে বাদ দিয়ে
মাধ্যমিক শিক্ষার পরিকল্পনা অসম্পূর্ণ ও অবাস্তব হয়ে পড়ে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে
এগুলিকেই "কোর বিষয়" বলে অভিহিত করা হয়েছিল। গণিত ছিল এই বিষয়-
গুলির অন্যতম।

কোন একটি বিষয় পাঠ্যসূচীতে নির্বাচিত হলে তারপর সেই বিষয়টির পাঠ্যসূচী
বা পাঠক্রম নির্ধারণ করতে হয়। বিষয়বস্তুর এই বিন্যাস নির্ভর করে সেই বিষয়টির
শিক্ষণের কতকগুলি বিশেষ উদ্দেশ্যের উপর। কোর গণিতের ক্ষেত্রে আমরা প্রধানত
দুটি উদ্দেশ্যের কথা উল্লেখ করতে পারি। **প্রথমতঃ**, বিষয়বস্তুগুলি এমনভাবে
নির্বাচিত করতে হবে, যেন সেগুলি পারিবেশিক অভিজ্ঞতার ক্ষেত্রে দৈনন্দিন ব্যবহারিক
জীবনের বিষয় এবং ভবিষ্যৎ নাগরিক জীবনের সঙ্গে উচ্চ সম্বন্ধবিশিষ্ট হয়। **দ্বিতীয়তঃ**
মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরের পরই যেহেতু উচ্চতর স্তরের শিক্ষা সুরু হব, সেইজন্য বিষয়বস্তু-
গুলি পরবর্তী উচ্চতর শিক্ষার সহায়ক হওয়া বাঞ্ছনীয়। দ্বিতীয় উদ্দেশ্যটি অন্যান্য
কোর বিষয়ের ক্ষেত্রে ততটা প্রযোজ্য না হলেও কোর গণিতের পক্ষে এটি বিশেষভাবে
প্রযোজ্য। মানবিক, বাণিজ্যিক ও অন্যান্য বিজ্ঞানমূলক যে কোন শিক্ষাক্রমেই কোর
গণিতের একটা বিশেষ মূল্য আছে। মাধ্যমিক বিদ্যালয়গুলিতে যে পাঠ্যসূচী নির্ধারিত
রয়েছে তাতে প্রথম উদ্দেশ্যটির উপরই সবিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। পাঠক্রম
রচয়িতাদের কথাতেই বলি : The present course in Core Mathematics
in our Secondary Schools is re-oriented to the use of mathematics
in daily life.

গণিতের বর্তমান পাঠক্রমটি বিশ্লেষণ করলে কয়েকটি বিভাগ পাওয়া যায়, যেমন—
পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি ও পরিসংখ্যান। সাধারণ
জীবনে যেভাবে গণিত ব্যবহার করা হয়, তার মধ্যে পাটীগণিতের ভূমিকাই প্রধান।
সংখ্যার প্রয়োগ, বিভিন্ন জাতীয় এককের প্রয়োগ, মেট্রিক পদ্ধতি, ঐকিক নিয়ম, সঞ্চয়
কার্য সংক্রান্ত প্রাত্যহিক সমস্যাবলী, শতকরা, সুদকষা ইত্যাদি বহু বিষয় পাটীগণিতের
মধ্যে সন্নিবিষ্ট করা হয়েছে। তাছাড়া ত্রৈরাশিক, স্টক এক্সচেঞ্জ, জীবনবীমা এগুলিও
রয়েছে। এগুলির বিশেষ বাস্তবমূল্য আছে বলে এগুলির অন্তর্ভুক্তি গণিতকে জীবন-
কেন্দ্রিক করেছে। আবার উচ্চতর শিক্ষার ক্ষেত্রেও এগুলি সহায়ক।

আবার বর্তমান নাগরিক জীবনে সমষ্টিগত জীবনযাত্রার মানের প্রভাবও কম
গুরুত্বপূর্ণ নয়। ব্যক্তি-আচরণ মাত্রই সমষ্টিগত আচরণের পরিপ্রেক্ষিতে বিচার্য।
সমষ্টিগত আচরণের একটা বস্তুনিষ্ঠ নির্ভুল ধারণা পাওয়া গেলে সেটিকেই সামাজিক
জীবনের মাপকাঠি হিসাবে ব্যবহার করা চলে। 'রাশিবিজ্ঞান' বা 'পরিসংখ্যান' এই

রকম একটি ধারণা গড়ে তুলতে সাহায্য করে। সেইজন্য রাশিবিজ্ঞানকে কোর গণিতের মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। তাছাড়া উচ্চতর শিক্ষার বেশ কতকগুলি ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান যথেষ্ট সহায়ক। রাশিবিজ্ঞানের ভূমিকা ও প্রয়োগক্ষেত্র যেরকম ভাবে বিস্তৃততর ও ব্যাপকতর হচ্ছে তাতে কোর গণিতের মধ্যে রাশি বিজ্ঞানের প্রাথমিক ধারণাগুলি সন্নিবিষ্ট না করলে মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিত উদ্দেশ্যের দিক থেকে অসম্পূর্ণ থেকেই যেত।

দৈনন্দিন জীবনে ওজন, ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল সংক্রান্ত বিষয় ছাড়াও আয়তন ও অন্যান্য পরিমাণ সংক্রান্ত কিছু কিছু বিষয়ের সম্মুখীন আমাদের হতে হয়। ঘনক, গোলক, চোঙ, ত্রিভুজাকৃতি এই জাতীয় কিছু কিছু বস্তুর মাপ আমাদের জানতে হয়। এগুলি জানা যায় গণিতের বিশেষ শাখা পরিমিতির সাহায্যে। কাজেই কোর গণিতে পরিমিতির উপস্থিতি দৈনন্দিন জীবনের প্রশ্নটিকে আরো বিস্তৃতভাবে বিবেচনা করেছে।

উদ্দেশ্য ও বিষয়বস্তুর দিক থেকে বিচার করলে কোর গণিতের পাঠ্যসূচী মোটামুটি সমর্থন করা গেলেও কোর-গণিতের পাঠক্রম নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বেশ কতকগুলি নীতি অবহেলা করা হয়েছে। বিষয়বস্তুর দিক থেকে পাঠ্যসূচীটি একটু বেশী তথ্যভারাক্রান্ত বলেই মনে হয়। পাঠ্যসূচী থেকে তেমন গুরুত্বপূর্ণ নয় বা তেমন প্রয়োজনীয় নয়, এমন বেশ কিছু অংশ বাদ দেওয়া যেত। সাধারণ শিক্ষার্থী এমনিতেই গণিত সম্বন্ধে একটা ভীতিজনক মনোভাব পোষণ করে। গণিতের বিরাট কলেবর তাদের এই এই ভীতি আরো বাড়াতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয় সমস্ত বিষয়বস্তু সন্নিবিষ্ট করার কোন প্রয়োজন নেই; প্রধান প্রধান বিষয়গুলিকে অবলম্বন করে প্রাথমিক দক্ষতা অর্জন করার উপযোগী বিষয়বস্তু সন্নিবিষ্ট করলেই যথেষ্ট।

এবার আসা যাক বীজগণিতের কথায়। বীজগণিতের পাঠক্রমে নূতনত্বের বদলে প্রাচীন ধারণাই বহুলাংশে অনুসরণ করা হয়েছে। তবে ১৯৭৪ সালে মাধ্যমিক শিক্ষা-স্তরে যে নতুন পাঠক্রমের সূচনা হয়েছে তাতে পাটীগণিতের সমস্যাবলীর সমাধানে বীজগণিতের ব্যবহারের উপর খুব বেশী জোর দেওয়া হয়েছে। বিশুদ্ধভাবে গণিত ব্যবহারের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিটি সহজ ও সুবিধাজনক, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই; কিন্তু আমাদের দৈনন্দিন জীবনে বীজগণিতের সমীকরণ ব্যবহার খুব একটা কাজে লাগে না। মানসিক শৃঙ্খলার দিক থেকে ও উচ্চতর শিক্ষার প্রয়োজনের দিক থেকে বিচার করলে বীজগণিত অবশ্যই কোর গণিতের অন্তর্ভুক্ত হওয়া উচিত, তবে এর বিষয়বস্তুর সংকলন ও পদ্ধতির নির্বাচন বিজ্ঞান ও মনোবিজ্ঞানসম্মত হওয়া বাঞ্ছনীয়। বর্তমান পাঠ্যসূচীর সম্বন্ধে বলা যায়, এটি যান্ত্রিক, গতানুগতিক ও তর্কবিজ্ঞানসম্মত।

জ্যামিতির ক্ষেত্রেও একই কথা বলা যেতে পারে। এর পাঠক্রম ও গতানুগতি-কতার প্রভাব থেকে মুক্ত নয়। জ্যামিতির তত্ত্বগত দিকটির উপর যত গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে ব্যবহারিক দিকটিতে ততটা হয়নি। অবশ্য পরিমিতি অন্তর্ভুক্ত হওয়ায় জ্যামিতির ব্যবহারিক দিকের উপর কিছুটা আলোকপাত করা হয়েছে। তবে

বর্গাকৃতি ও ঘনাকৃতি বস্তুর মুষ্টিমেয় উদাহরণ ছাড়া পাটীগণিতে জ্যামিতির আর খুব বেশী প্রয়োগ একটা দেখা যায় না। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অবশ্য বিশুদ্ধ জ্যামিতির প্রয়োগ খুবই সীমাবদ্ধ। গণিতে শৃঙ্খলামূলক দিকটির কথা চিন্তা করলে বলা যায়, জ্যামিতিতে আরো কিছু বিশ্লেষণমূলক পদ্ধতি অনুসরণ করতে পারলে ভালো হত। এর অপ্রাচুর্যের জন্য শিক্ষার্থীদের উৎসাহ, অনুসন্ধিৎসা ও স্বাভাবিক আগ্রহ কিছুটা বাধাপ্রাপ্ত হয়েছে।

গণিতের প্রধান উদ্দেশ্য দুটিকে সামনে রেখে বিষয় ও পদ্ধতির কথা যুগপৎ বিবেচনা করে Prof Young যে পাঁচটি নীতির নির্দেশ করেছিলেন সেগুলি অনেক ক্ষেত্রেই অনুসৃত হয়নি। Young-এর নীতিগুলি ছিল—(১) যথাসম্ভব স্পষ্ট ও সুবিধাজনক ভাবে গাণিতিক চিন্তা প্রকাশ করা; (২) প্রাকৃতিক নিয়মগুলি আরো সুস্পষ্টভাবে বুঝতে সাহায্য করা, (৩) বর্তমান সমাজ-জীবনের সঙ্গে গণিতের সম্পর্কগুলি পরিষ্কার ভাবে প্রকাশ করা ও বর্তমান সমাজ-জীবনের সমস্যাগুলির সমাধানে গণিতকে প্রয়োগ করা; (৪) শিক্ষার্থীর সম্ভাব্য ভবিষ্যৎ প্রয়োজনে গাণিতিক পদ্ধতিগুলির প্রয়োগে উপযুক্ত দক্ষতা, কৌশল ও অভ্যাস সৃষ্টি করা এবং (৫) শিক্ষাবিজ্ঞানের নীতি অনুযায়ী বিষয়বস্তুগুলিকে সামগ্রিকভাবে সংগঠিত করা।

এই নীতিগুলির মধ্যে ২য়, ৩য় ৪র্থ নীতিগুলি গণিতের ব্যবহারিক ও শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্যের দিকে লক্ষ্য রেখে পরিকল্পিত। বিষয়বস্তুর সন্নিবেশ ও সংস্থাপনের দিক থেকে বিচার করলে ১ম ও ৫ম নীতিটি মনোবিজ্ঞানসম্মত। ৩য় নীতিটিকেও মনোবিজ্ঞানসম্মত বলা যেতে পারে। শিক্ষা তখনই সম্পূর্ণ ও যথার্থ হয় যখন তত্ত্বগত দিকের সঙ্গে ব্যবহারিক দিকটির ও জ্ঞানমূলক দিকের সঙ্গে প্রয়োগমূলক দিকটির একটা মণিকাঞ্চন যোগ ঘটে। আবার ৪র্থ নীতিটির মধ্যে ভাবী জীবনের প্রস্তুতির দিকটিও তুলে ধরা হয়েছে। এককথায় বলা যায়, নীতিগুলি মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির দিকে লক্ষ্য রেখে একটি মনোবিজ্ঞানসম্মত, শিক্ষার্থীকেন্দ্রিক, কার্যকরী এবং উপযোগিতামূলক পদ্ধতি অনুসারে নির্ণীত হয়েছে। আবার যুক্তিপূর্ণ অনুবন্ধমূলক দিকটিকেও অস্বীকার করা হয়নি।

প্রচলিত পাঠক্রমটি পর্যালোচনা করলে দেখা যায়, এটি পদ্ধতির দিক থেকে মনোবিজ্ঞানসম্মত হয়নি। শিক্ষার্থীর উৎসাহ, আগ্রহ ও প্রেরণা-বৃদ্ধির কোন ব্যবস্থা এতে নেই। পাটীগণিতে কিছু বীজগণিত ও জ্যামিতির প্রয়োগের চেষ্টা ছাড়া অনুবন্ধের আর কোন আভাস নেই। পাঠক্রমে গণিতকে একটি পূর্ণাঙ্গ ও সামগ্রিক বিষয় হিসাবে উপস্থাপিত করা হয়নি এবং সেইমত শিক্ষাদানের ব্যবস্থাও করা হয় নি। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদি বিভিন্ন বিভাগে গণিতকে বিভক্ত করা হয়েছে এবং শাখাগুলির প্রায় স্বয়ংসম্পূর্ণ ও বিচ্ছিন্নভাবে পাঠক্রম ও শিক্ষাদানের পদ্ধতি নির্ধারণ করা হয়েছে। আবার গাণিতিক দৃষ্টিভঙ্গী ও অন্যান্য মানসিক শৃঙ্খলামূলক মূল্যগুলির যথাযথ রূপায়ণের জন্য উপযুক্ত পদ্ধতির কোন অবকাশও রাখা হয়নি। গণিতের পাঠ্যসূচীতে ব্যবহারিক জীবনের প্রয়োগমূলক দিকটির উপরই বেশী গুরুত্ব

দেওয়া হয়েছে, কিন্তু গণিত শিক্ষণের মূল উদ্দেশ্যগুলির যথাযথ ও সার্থক রূপায়ণের কোন চেষ্টাই করা হয়নি। এদিক থেকে গণিতের পাঠক্রমটি ব্যর্থ হয়েছে।

শিক্ষার্থীর চাহিদা পাঠক্রমে উপেক্ষিত হয়েছে। পাঠক্রম শিক্ষার্থীকে অনুসরণ করেনি, বরং শিক্ষার্থীই পাঠক্রমটি অনুসরণ করে চলেছে।

পাঠক্রম সংগঠনে শিক্ষকেরও একটা গুরুত্বপূর্ণ দায়িত্ব ও ভূমিকা আছে। পাঠ্যসূচী নির্ধারণে শিক্ষকের অভিজ্ঞতাকেও কাজে লাগানো উচিত। প্রকৃতপক্ষে শিক্ষার্থীর সঙ্গে শিক্ষকের যোগাযোগই গভীর ও ঘনিষ্ঠ। কাজেই পাঠ্যসূচীর ত্রুটিহীন নির্বাচনে শিক্ষকগণের একটা সক্রিয় ভূমিকা থাকা উচিত। এর অন্যথা হলে পাঠ্যসূচী কেবল-মাত্র প্রত্যাশার একটা ইঙ্গিত বহন করে, সফলতার প্রতিশ্রুতি বহন করতে পারে না। আমাদের পাঠক্রম সংগঠনে দেশের শিক্ষকদের বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ কোন ভূমিকা পরিলক্ষিত হয় না। মাধ্যমিক শিক্ষাস্তরে কোর গণিতে কোন বহিঃপরীক্ষার ব্যবস্থা না থাকায় এটি ছিল যান্ত্রিক ও প্রায় অবহেলিত। এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর মানসিক পটভূমিকে স্পর্শ করতে পারত না। সেদিক থেকেও এটি ব্যর্থ।

সব শেষে বলা যায়, যদি ব্যবহারিক দিকটিকেই এতো বড়ো করে দেখা হয় তবে সেটিও ত্রুটিপূর্ণ। ব্যবহারিক প্রয়োজন সকলের এক হয় না। আবার পল্লী অঞ্চল ও শহর অঞ্চলে ব্যবহারিক প্রয়োজনও ভিন্নধর্মী। কাজেই একই রকম ব্যবহারিক প্রয়োগের দিকে লক্ষ্য রেখে পাঠক্রম নির্ধারণ করলে তা সকলের কাছেই সমানভাবে কাজে আসে না। গণিতের পাঠক্রমে এমন সব বিষয়ই অন্তর্ভুক্ত হওয়া বাঞ্ছনীয় যেগুলির বাস্তব মূল্য আছে ; জীবনের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ সংযোগ আছে। এমন বিষয়বস্তু থাকবে যেগুলি ছাত্রদের মধ্যে বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তুলবে ; তাদের আবিষ্কারকের উপযোগী দৃষ্টিভঙ্গী দান করবে এবং বহির্জগতের ভৌত নিয়মাবলীর প্রতি কৌতূহলী, অনুসন্ধিৎসু ও আগ্রহী করে তুলবে। পাঠক্রমটি সাজাতে হবে কর্মকেন্দ্রিক ভাবে, এর পদ্ধতি হবে আবিষ্কারমূলক। তবেই গণিতের পাঠক্রমকে সার্থক, সফল ও ত্রুটিমুক্ত করা সম্ভব হবে।

গণিত সম্বন্ধে কোঠারী কমিশনের অভিমত

কোঠারী কমিশন (1964-66) গণিতের পাঠক্রম, পাঠ্যপুস্তক, শিক্ষণ পদ্ধতি ইত্যাদি সম্বন্ধে কয়েকটি মূল্যবান অভিমত প্রকাশ করেছেন। নীচে সে সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করা হল।

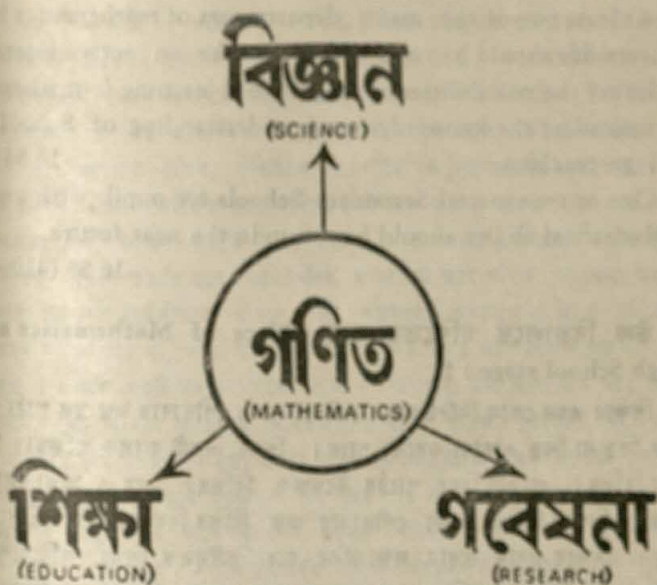
কেন গণিত শেখান হবে ?—বৈজ্ঞানিক গবেষণার ভিত্তিই হল গণিত। আর বর্তমান যুগ হল বিজ্ঞানের যুগ। কাজেই যুগের সঙ্গে তাল রাখতে হলে গণিতের সাহায্য না নেওয়া ছাড়া উপায় নেই। কেবলমাত্র ভৌত-বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেই নয়, জীব-বিজ্ঞান বা বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখাতেও গণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। তারপর আছে স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের ব্যবহার (automation)। বলতে গেলে, বর্তমান যুগটাই হল বৈজ্ঞানিক বিপ্লবের যুগ। এই সমস্ত বৈজ্ঞানিক পরিবর্তন ও বিপ্লব পরোক্ষভাবে

প্রত্যেককেই গণিত পাঠে বাধ্য করছে। গণিতের প্রয়োজনীয়তা অপরিসীম তা
বিস্তারিতই উপযুক্তভাবে এর ভিত্তি স্থাপন করতে হবে।

বিভিন্ন স্তরে গণিতের পাঠক্রম—"কোঠারী কমিশন গণিতের বর্তমা
বিভাগ ও উপবিভাগগুলির সমালোচনা করে বলেছেন, গণিতের মধ্যে পাটীগণি
জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি—এই রকম স্পষ্ট ও পৃথক বিভাগ করা ঠিক নয়। এত
গণিতের পাঠক্রমটি যেমন অযথা বেড়ে যায়, তেমনি একই জিনিসকে বিভিন্ন বিভা
পৃথক পৃথকভাবে পড়াতে হয় বলে সময় ও শ্রম উভয়ই নষ্ট হয়। গণিত বিষয়টি
একটি পূর্ণাঙ্গ এবং অখণ্ড বিষয় বলে ধরে নিতে হবে, আর জোর দিতে হবে গণিতে
নিয়ম, মূলনীতি, যুক্তিসম্মত বিচারকরণ প্রভৃতি শিক্ষা দেবার উপর। প্রাথমিক স্ত
(Classes I to VII or I to VIII) গণিতের পাঠক্রম থাকবে সংখ্যা সম্বন্ধে ধার
সংখ্যা গণনা ও চিহ্নের ব্যবহার, সমীকরণ, লেখচিত্র এবং আপেক্ষিক সম্বন্ধ বিষয়
ধারণা (functions)। জ্যামিতির পাঠক্রমটিকে যুক্তিসম্মতভাবে সাজাতে হবে
মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরেও (VIII to X এবং X to XI) পাঠক্রম
পুনর্বিন্যাস করতে হবে। কতকগুলি অধ্যায়, যেমন উৎপাদক নির্ণয়, গ. সা. গু
ল. সা. গু নির্ণয় পৃথক ভাবে পড়ানোর কোন প্রয়োজনীয়তাই নেই। ত্রিকোণমিতি
পড়ানো যেতে পারে বীজগণিতের সঙ্গে। অভেদাবলী, ত্রিভুজের সমাধান, উচ্চতা
দূরত্ব সম্বন্ধীয় প্রশ্ন অনেক সময় বাদ দেওয়া যেতে পারে। তেমনি জ্যামিতিতে সম্পা
বা উপপাদ্য মুখস্থ করা, extra কষানো প্রভৃতি বন্ধ করা যেতে পারে। জ্যামিতি শি
দেবার জন্য আধুনিক পদ্ধতির (axiomatic and systematic) সাহায্য নিতে হবে
জ্যামিতির সংজ্ঞা প্রভৃতির জন্য 'Set language' ব্যবহার করতে হবে। এর জ
School Mathematics Study Group (School Mathematics Stud
Group Series—Yale University Press, 1960) যে সমস্ত ভাষা, চিহ্ন
প্রতীক ব্যবহারের কথা বলেছেন, সেগুলি ব্যবহার করাই বাঞ্ছনীয়।

শিক্ষণ পদ্ধতি—কোঠারী কমিশন গণিত শিক্ষণ পদ্ধতি সম্বন্ধে এই অভিমত
পোষণ করেন যে গতানুগতিক পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষা দিলে তা যান্ত্রিক হবেই। সে
জন্য কমিশন গণিতে নির্ভুল হিসাবের উপর জোর না দিয়ে নির্ভুলভাবে গণিতে
নীতি অনুসরণ করার উপরই বেশী জোর দিয়েছেন। গণিত শিক্ষণে যে সব
আধুনিক পদ্ধতির কথা বলা হয়েছে কমিশন সেগুলি অনুসরণ করার কথা বলেছেন
তবে এগুলি যেন হঠাৎ অনুসরণ করা না হয়। এর জন্য ব্যাপক প্রস্তুতির প্রয়োজন
নূতন পদ্ধতি অনুসরণ করার আগে গণিত শিক্ষকদের উপযুক্তভাবে শিক্ষণ দিতে হ
এবং যাঁরা দীর্ঘদিন পূর্বে শিক্ষণ-প্রাপ্ত হয়েছে, তাঁদের জন্য পুনরায় শিক্ষণের ব্যব
করতে হবে (refresher course)।

কমিশন এ কথাও বলেছেন—কোন একটি শ্রেণীতে একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুযা
শিক্ষা দিতেই হবে এমন কোন কথা নেই। ছাত্রদের বয়স, বুদ্ধি ও উপলব্ধি কর
ক্ষমতা অনুযায়ী শিক্ষণ পদ্ধতির পরিবর্তন করা যেতে পারে।

গণিতের স্থান—বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে গণিতের স্থান কোথায়, সে সম্বন্ধেও কমিশনে সুস্পষ্ট ইঙ্গিত আছে। বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে কমিশন গণিতকে একটি উচ্চ ও গুরুত্বপূর্ণ স্থান দিয়েছেন। বিজ্ঞান শিক্ষা ও গবেষণার সঙ্গে গণিতের সম্পর্ক অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ এবং একথা বলা যেতে পারে—গণিত রয়েছে এদের কেন্দ্রস্থলে।

কমিশন পরবর্তী পাঁচ থেকে দশ বৎসরের মধ্যে অন্ততঃ তিন চারিটি বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিতে উচ্চতর শিক্ষণ ও গবেষণার ব্যবস্থা করার কথা বলেছেন। তাঁদের মতে—মাদ্রাজ বিশ্ববিদ্যালয় এবং Ramanujan Ins itute of Mathematics হল এর জন্য উপযুক্ত কেন্দ্র। তাছাড়া স্কুল ও কলেজের শিক্ষকদের গণিত সম্বন্ধে আগ্রহী করার জন্য তাঁদের সুপ্ত সম্ভাবনার বিকাশের জন্য এবং তাঁদের গণিতে অধিকতর দক্ষতা অর্জনের জন্য কমিশন 'বিধিবদ্ধ শিক্ষার' (Programmed learning) কথাও বলেছেন। এরজন্য U S A. থেকে প্রকাশিত প্রয়োজনীয় পুস্তকাদির সাহায্যও নেওয়া যেতে পারে। এ ছাড়া স্কুলের ছাত্রদের জন্যও আবাসিক গণিত গবেষণা কেন্দ্র প্রতিষ্ঠা করার সুপারিশ কমিশন করেছেন। আর একটি কারণে কমিশন গণিতকে এত বেশী গুরুত্ব দিয়েছেন। তা হল—অন্যান্য বিষয়ে ছাত্রদের প্রতিভা বা মেধার সন্ধান করতে যে পরিমাণ সময় ও পরিশ্রমের প্রয়োজন গণিতে ছাত্রদের প্রতিভা বা মেধার সন্ধান করতে সময় লাগে তার চেয়ে অনেক কম।

কমিশন থেকে কিছু উদ্ধৃতি দিয়ে বক্তব্য শেষ করা যাক :—

It is important that a deliberate effort is made to place India

on the 'world map of mathematics' within next two decades or s
Advanced centres of study in mathematics should be establishe
at three or four universities in the next five to ten years.

16.53 (41

At least one of the major departments of mathematics in t
Universities should be encouraged to take an active interest i
exploring the possibilities of programmed learning in mathemati
for upgrading the knowledge and understanding of School an
College teachers. 16 54 (41

One or two special Secondary Schools for pupils with unusu
mathematical ability should be set up in the near future.

16 55 (410—41

উচ্চ বিদ্যালয়ে গণিতের স্থান (Place of Mathematics at th High School stage) :

শিক্ষার এমন কোন নির্দিষ্ট লক্ষ্য নেই যে লক্ষ্যে পৌছাবার জন্য স্কুল পাঠ্য প্রতি বিষয় কিছু না কিছু সাহায্য করতে পারে। শিক্ষা একটি ব্যাপক প্রক্রিয়া। শিক্ষা লক্ষ্য বিভিন্ন। প্রতিটি বিষয় পাঠের উদ্দেশ্যও বিভিন্ন। তবে এ কথা বলা যেত পারে যে শিক্ষার বিভিন্ন লক্ষ্যে পৌছাবার জন্য বিভিন্ন বিষয়গুলি বিভিন্ন ভাবে চে করে। শিক্ষার প্রধান প্রধান লক্ষ্যগুলির মধ্যে কৃষ্টিমূলক শিক্ষা, পরিবেশের সা সার্থক সঙ্গতি বিধান, সু-চরিত্র ও সু-অভ্যাস গঠন, সুষম বিকাশ, সামাজিক উৎক অর্জন, সু-নাগরিকতার শিক্ষা প্রভৃতি উল্লেখযোগ্য। কোন বিষয় পাঠক্রমে আবশ্যি কিংবা ঐচ্ছিক কি ভাবে অন্তর্ভুক্ত হবে তা নির্ভর করে ঐ বিশেষ বিষয়টি শিক্ষা কোন্ কোন্ লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করছে তার উপর। গণিত উচ্চ বিদ্যাল স্তরের পাঠক্রমে আবশ্যিক হবে, না ঐচ্ছিক হবে তা নির্ণয় করার আগে দেখা যা গণিত শিক্ষার কোন্ কোন্ লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করছে।

গণিতে বিশেষ ভাবে ব্যুৎপত্তি অর্জন করাই গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য নয়। পূর্বব অধ্যায়ে আমরা গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য ও লক্ষ্যগুলি বিস্তারিতভাবে আলোচ করেছি। সংক্ষেপে বলা যেতে পারে, গণিত শিক্ষণের ফলে আমরা দৈনন্দিন জীবনে সমস্যাগুলি উপলব্ধি করতে পারি, আমাদের পর্যবেক্ষণ ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়, এবং আম নিখুঁত ভাবে বিচার ও চিন্তা করতে পারি। অবশ্য বিচারকরণ ও চিন্তা করা ক্ষমতা বিভিন্ন বয়সে বিভিন্ন রকমের হয়। কিন্তু গণিত এমন একটি বিষয়, যেটিক বয়সের অনুপাতে ঠিকভাবে সাজানো সম্ভব। আমাদের দেশে বহু ছাত্র-ছাত্রী প্রাথমিক বা মাধ্যমিক পর্যায়ের শেষে লেখাপড়া ছেড়ে দিতে বাধ্য হয়। অনেক বলেন, এই সমস্ত ছাত্র-ছাত্রী তো স্কুলের বাইরে আর গণিত ব্যবহার করছে না। কি

সত্যই কি তাই? আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কোন না কোন দিকে গণিত ব্যবহার করতেই হয়। তাছাড়া অধিকাংশ বৃত্তির ক্ষেত্রেও গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। অবশ্য সঙ্গে সঙ্গে সমালোচক যাঁরা তাঁরা বলবেন, স্কুলের পড়া শেষ করে সকলেই তো আর যন্ত্রবিদ, ইঞ্জিনিয়ার বা সার্ভেয়ার হচ্ছে না। তাহলে স্কুলে সকলকে আবশ্যিক ভাবে গণিত শেখানোর কি প্রয়োজন? কিন্তু বৃত্তিতে গণিতের ব্যবহার করতে হল না বলে যে আমরা জীবন থেকে গণিতকে কি মুছে দিতে পারি? তা মোটেই সম্ভব নয়। সকলেই কোন না কোন প্রকারে কিছু না কিছু গণিত ব্যবহার করেছেন। অবশ্য এই জন্য প্রাথমিক ও নিম্ন মাধ্যমিক স্তরের গণিত সম্বন্ধে জ্ঞান থাকলেই যথেষ্ট। এর জন্য একদল শিক্ষাবিদ বলেন, গণিতকে প্রাথমিক ও নিম্ন মাধ্যমিক স্তরে আবশ্যিক করলেই চলবে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে ঐচ্ছিক করতে হবে। যারা পরে গণিত নিয়ে আরো বেশী পড়াশুনা করতে চায়, কিংবা যারা এমন বৃত্তি গ্রহণ করতে ইচ্ছুক যাতে গণিত প্রয়োগ করতে হবে, তারা উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে গণিত পড়াশুনা করবে। কিন্তু যারা পরবর্তী ছাত্রজীবনে গণিত নিয়ে পড়াশুনা করতে চায় না ব গণিতযুক্ত বৃত্তি গ্রহণ করতে চায় না, তারা মাধ্যমিক স্তরে গণিত নিয়ে না পড়লেও চলবে।

কিন্তু এ প্রসঙ্গে একটি বক্তব্য থেকে যাচ্ছে। তা হল, উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে উন্নীত হবার সঙ্গে সঙ্গেই আমরা ছাত্রদের ভবিষ্যৎ বৃত্তি সম্বন্ধে সঠিক পূর্বাভাস দিতে পারি না। বর্তমান যুগে শিক্ষার সমস্যা এতো জটিল যে ছাত্র তার নিজস্ব আগ্রহ বা সামর্থ্য অনুযায়ী বৃত্তি নির্বাচন করার সুযোগও সব সময় পায় না। তা ছাড়া স্কুলে গণিতে যে ছাত্র বেশ আগ্রহবোধ করে না সেই ছাত্রই আবার কলেজে গিয়ে গণিতে যথেষ্ট আগ্রহ বোধ করতে পারে। স্কুলে ছাত্রদের সামনে ভবিষ্যৎ বৃত্তি সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা তুলে ধরতে হবে। যেহেতু অধিকাংশ বৃত্তিতেই গণিতের প্রয়োজন, সেইজন্য প্রত্যেক ছাত্রকেই মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে আবশ্যিক বিষয় হিসাবে গ্রহণ করতে হবে। গণিতকে মাধ্যমিক স্তরে ঐচ্ছিক বিষয়ে রূপান্তরিত করলে অনেক ছাত্রকে বিভিন্ন বৃত্তি গ্রহণের সুযোগ থেকে বঞ্চিত করা হবে।

এর উত্তরে অনেকে বলেন—ছাত্রদের গণিতে প্রবণতা দেখে মাধ্যমিক স্তরে গণিত শিক্ষণের ব্যবস্থা করলে অনেক সুবিধা হয়। এতে যাদের গণিতে ঝোঁক বা প্রবণতা নেই, তাদের গণিত শিক্ষণে বাধ্য করা হচ্ছে না। কিন্তু আমাদের দেশে মাধ্যমিক স্তর সুরু হচ্ছে ১৫+ বয়স থেকে। এতো কম বয়সে প্রবণতা ঠিকমত পরিমাপ করা যায় না। আবার বিষয়টি সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা, বিজ্ঞানসম্মত শিক্ষণ পদ্ধতি, উত্তম পাঠ্যপুস্তক ইত্যাদির উপরও প্রবণতা নির্ভর করে। কাজেই কেবলমাত্র প্রবণতার উপর নির্ভর করে গণিত শিক্ষণের ব্যবস্থা করলেও অনেক ছাত্রের প্রতি অবিচারই করা হবে।

উপরের আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে, গণিত আবশ্যিক হবে, না ঐচ্ছিক হবে তা নিয়ে শিক্ষাবিদগণ একমত নন। অধিকাংশ শিক্ষাবিদেরই ধারণা যে গণিতকে আবশ্যিক করলে অনেক ছাত্রকেই অসুবিধায় ফেলা হবে। বর্তমান শিক্ষা পদ্ধতিতে

গণিতের স্থান বেশ পরিষ্কার নয়। নিম্নমাধ্যমিক স্তর পর্যন্ত (অষ্টম শ্রেণী) গণিত আবশ্যিক। উচ্চমাধ্যমিক স্তরে ঐচ্ছিক। আবার দশ-শ্রেণীর বিদ্যালয়ে গণিত দশম শ্রেণী পর্যন্তই আবশ্যিক। পাঞ্জাবে মাধ্যমিক স্তরে গণিত আবশ্যিক। কিন্তু বর্তমানে তা ঐচ্ছিক করার পরিকল্পনা চলেছে। কিন্তু একথা সত্য যে, গণিতকে ঐচ্ছিক করলে বৃত্তি গ্রহণের সুযোগগুলি সঙ্কুচিত করা হবে। তাছাড়া কলেজ ও বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে এমন কতকগুলি বিষয় আছে—যেখানে গণিত একান্ত প্রয়োজন। যে সমস্ত ছাত্র অর্থনীতি, জীব-বিজ্ঞান বা মনোবিজ্ঞান নিয়ে পড়াশুনা করে, তারা যদি গণিত ভালোভাবে না আয়ত্ত করে থাকে, তবে বেশ অসুবিধার সম্মুখীন হতে হয়। কাজেই আমরা এই সিদ্ধান্তেই আসতে পারি যে, মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে আবশ্যিক করলে অধিকাংশ ছাত্রের সুবিধাই হবে। গণিত পাঠে ছাত্রদের যে বিতৃষ্ণা বা বিরক্তি, তা কিন্তু আসলে বিষয়টির জন্য নয়। গণিতের ত্রুটিযুক্ত পঠন-পদ্ধতিই এর জন্য দায়ী। বিষয় কঠিন হলেও যদি সহজ, সরল ও বিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে পাঠদান করা যায়, তবে ছাত্রেরা আগ্রহ বোধ করবে। এছাড়া বিষয়টি পাঠের উপকারিতাও তাদের নিকট পরিষ্কারভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। ছাত্ররা আগ্রহী হয়ে যদি গণিতে অনুরক্ত হয়, তখন আর কোন শিক্ষাবিদ বলবেন না গণিতকে ঐচ্ছিক করা হোক।

যে সমস্ত ছাত্র-ছাত্রী কলেজে উচ্চশিক্ষার জন্য যাবে না তাদের জন্য দুটি উপায় গ্রহণ করা যেতে পারে :

১। গণিতকে ঐচ্ছিক করতে হবে, অথবা

২। আবশ্যিক গণিতে কেবল এমন অধ্যায় অন্তর্ভুক্ত করতে হবে যেগুলি একান্ত প্রয়োজনীয়।

যখন গণিত ঐচ্ছিক হবে, তখন ছাত্ররা প্রাথমিক পর্যায়ের সহিত গণিত শিক্ষা করবে। ঐচ্ছিক গণিত মাধ্যমিক স্তরে যারা নির্বাচন করবে না, তাদের মানসিক বৃদ্ধি অবশ্য বেশ কিছুটা বাধাপ্রাপ্ত হবে। আবার পরিস্থিতির পরিবর্তনের জন্য পরবর্তী কালে যদি কোন ছাত্র কলেজে উচ্চ-শিক্ষা গ্রহণ করতে ইচ্ছুক হয়, তখন গণিত না থাকার জন্য তার বিশেষ অসুবিধা হবে। কাজেই গণিতকে ঐচ্ছিক বিষয় হিসাবে পরিগণিত করা যুক্তিযুক্ত হবে না।

গণিত যখন আবশ্যিক হবে, তবন তার পাঠক্রম দু'ভাগে ভাগ করতে হবে। একভাগে থাকবে—যারা কলেজে পড়বে না তাদের জন্য সহজ-সরল ও একান্ত প্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলি, যেগুলি তাদের দৈনন্দিন জীবনে কাজে লাগবে। আর এক ভাগে থাকবে—যারা কলেজে পড়বে, তাদের উচ্চশিক্ষার সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা করে এমন সমস্ত কঠিন অধ্যায়।

কাজেই আমরা দুটি সম্ভাবনার কথা দেখতে পাচ্ছি—(১) গণিতকে আবশ্যিক করা, অর্থাৎ পাটীগণিত বীজগণিত ও জ্যামিতি—তিনটিকেই আবশ্যিক করা, এবং (২) কেবলমাত্র পাটীগণিতকে আবশ্যিক করা, কিন্তু বীজগণিত ও জ্যামিতিকে ঐচ্ছিক

করা। এই সম্ভাবনা দুটির মধ্যে দ্বিতীয় সম্ভাবনাটিই অধিকতর যুক্তিযুক্ত এবং বাঞ্ছনীয়। এই সম্ভাবনাটি গ্রহণ করলে আর গণিতকে আবশ্যিক করা হবে, না ঐচ্ছিক করা হবে এই বিতর্কের কোন প্রয়োজন থাকবে না।

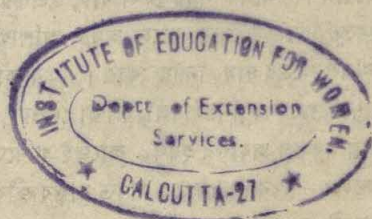
॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. Disc iss the place of M thematics in the Secondary School Curriculum.

2. "Mathem tics is more than a mere accumulation of technical knowledge : it is a mode of thought, and the teacher should try to afford his pupils an opportunity of sharing in this kind of thinking, if only in a very simple and elementary way."—Discuss.

3. "Mathematics is a creative activity with many aspects—more aspects than are generally recognised." In the light of this statement discuss the importance of mathematics in the School curriculum.

4. "Mathematics is primarily taught on account of the mental training it affords and the knowledge of fact it imparts".—Discuss

5. Does the present curriculum of mathematics in the Secondary Stage in West Bengal help in realising the aims of teaching mathematics ?—Discuss.

পঞ্চম অধ্যায়

গণিতে পাঠক্রম

(Curriculum in Mathematics)

গণিত কিভাবে পড়ানো হবে এবং কেন পড়ানো হবে, সে বিষয়ে আমরা আগে আলোচনা করেছি। এবার আলোচ্য বিষয় হল গণিতে কি পড়ানো হবে। তবে 'কি পড়ানো হবে', তা নির্ভর করে 'কেন পড়ানো হবে'—তার উত্তরের উপর (what to teach in mathematics and how to teach are governed by 'why is mathematics taught')। সাধারণের মধ্যে গণিত সম্বন্ধে একটা অহেতুক ভীতি আছে। অনেকে বলেন, গণিত বেশ চিত্তাকর্ষক নয়, এতে অকৃতকার্যতার হার অত্যন্ত বেশী। কিন্তু যাঁরা প্রকৃতপক্ষে গণিতকে ভালোবাসেন, তাঁরা এতে অত্যন্ত ব্যথিত হন। তাঁদের মতে দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রয়োজনীয়তাই ছাত্রদিগকে গণিতে আগ্রহী করে তুলবে। কিন্তু যতক্ষণ না ছাত্রদিগকে গণিতের প্রয়োজনীয়তার কথা বুঝিয়ে দেওয়া হয়, ততক্ষণ তারা গণিত পাঠে আগ্রহী হয় না। তারা যান্ত্রিক-ভাবে গতানুগতিক পদ্ধতিতে গণিত পাঠ গ্রহণ করে এবং তাদের গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য হল পরীক্ষায় পাশ করা। এর জন্য তারা গণিতের মত বিষয়টি মুখস্থ করতেও পশ্চাৎপদ হয় না। কিন্তু এই ত্রুটি দূরীভূত করা একান্ত প্রয়োজন ; আর এই ত্রুটি দূর করা যায় যদি যত্নের সঙ্গে গণিতের পাঠক্রম নির্ধারণ করা হয়।

পাঠক্রম নির্ধারণের সময় গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির কথা মনে রাখতে হবে। গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলিকে মোটামুটি দু'ভাগে ভাগ করা যায়। সেগুলি হল—

(১) **প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন এবং**

(২) **কতকগুলি মনোভাব, দৃষ্টিভঙ্গী ও অভ্যাস গঠন।**

প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন বলতে বোঝায় দৈনন্দিন জীবনে গণিতের সার্থক ও সুষ্ঠু প্রয়োগ। অনেক সময় দেখা যায়, শ্রেণীর সেরা ছাত্র বাজারে জিনিস-পত্রের দাম ঠিক করতে হিমসিম খেয়ে যাচ্ছে অথচ অশিক্ষিত বা অর্ধশিক্ষিত মুদি কত তাড়াতাড়ি জিনিস-পত্রের দাম নির্ণয় করে। এর কারণ হল গণিতে বাস্তব দৃষ্টিভঙ্গীর অভাব। গণিতে সূত্র বা নিয়মাবলী শিক্ষা দেওয়া হয়, কিন্তু উদাহরণগুলি অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কাল্পনিক বা অবাস্তব হয়। কাজেই গণিতের সঙ্গে জীবনের যোগসূত্রটি ছাত্র হারিয়ে ফেলে। যখন সে দেখবে গণিত বাস্তব জীবনে কোন কাজে লাগছে না তখন স্বাভাবিক ভাবেই সে গণিতে নিরাসক্ত হয়ে পড়বে। কাজেই পাঠক্রমটি এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যেন ছাত্র প্রয়োজনভিত্তিক জ্ঞান অর্জন করতে পারে।

মনোভাব, দৃষ্টিভঙ্গী ও অভ্যাসের কথা আগেই বলা হয়েছে। গণিতের শৃঙ্খলা-মূলক ও কৃষ্টিমূলক মূল্যের উপর বেশী গুরুত্ব আরোপ করতে হবে। পাঠক্রমে এমন

সব বিষয়বস্তু থাকবে যা ছাত্রের বুদ্ধির বিকাশ ঘটাবে, মনকে শিক্ষিত করবে, মানসিক ঔদার্য বাড়াবে এবং তার চিন্তা ও যুক্তিশক্তির বিকাশ সাধন করবে। বাস্তব অভিজ্ঞতা ছাড়াও এ সমস্ত গুণ অর্জন করা সম্ভব নয়। কাজেই এখানেও লক্ষ্য করা যাচ্ছে, গণিতের পাঠক্রম হবে বাস্তব-অভিজ্ঞতানির্ভর ও জীবনভিত্তিক। বিদ্যালয়ের পাঠ শেষ করে সবদিক দিয়ে যেন ছাত্রটি একজন সুনাগরিক হয়ে উঠতে পারে; আর সুনাগরিক হতে গেলেই গণিতে জ্ঞান থাকা একান্ত বাঞ্ছনীয়। গণিতই তাকে নিয়মানুবর্তী করবে, সত্যবাদী করবে, স্বল্পভাষী করবে।

এবার দেখা যাক, বিষয়বস্তু কিভাবে নির্বাচিত হবে। বিষয়বস্তু নির্বাচনে যথেষ্ট যত্ন নিতে হবে এবং সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে। J. W. A. Young তাঁর The teaching of Mathematics[1] পুস্তকে বিষয়বস্তু নির্বাচনের কয়েকটি সর্তের কথা বলেছেন। সেগুলি হল :—

১। সুস্পষ্ট ও সুবিধাজনক গাণিতিক চিন্তনের সুযোগ দান (To exhibit most clearly and to best advantages type of thought)

২। প্রাকৃতিক নিয়মাবলীর সুষ্ঠু উপলব্ধি। (To help to a better understanding of the laws of nature).

৩। আধুনিক জীবনের ক্রিয়াকলাপের ও সামাজিক সংগঠনের সঙ্গে গণিতের সম্বন্ধ নির্ণয় এবং জীবন ও সমাজ সম্বন্ধীয় সমস্যার সমাধানে গণিতের ভূমিকা। (To bring out distinctly the mathematical relationships that exist in the social organism and in the activities of modern life, and to show how mathematics aids in solving their problems).

৪। ছাত্রের ভবিষ্যৎ প্রয়োজনে গণিত প্রয়োগ-দক্ষতা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া। (To give sufficient skill in the actual performance of mathematical processes to meet the future needs of the pupil).

৫। বিজ্ঞানসম্মত শিক্ষাতত্ত্বের চাহিদা অনুযায়ী বিষয়বস্তুটির সুষম সমন্বয়। (To permit the organization of the material into a homogeneous whole, meeting the demands of scientific pedagogy).

শিশুকেন্দ্রিক পাঠক্রম :—পাঠক্রম হবে শিশুকেন্দ্রিক। পাঠক্রম নির্ধারণ করার সময় শিশুর রুচি, ক্ষমতা প্রবণতা, প্রভৃতির কথা চিন্তা করতে হবে। শিশু শিশুই—সে বয়স্ক লোকের ক্ষুদ্র সংস্করণ নয়। কাজেই তার রুচি, আগ্রহ প্রভৃতি বয়স্ক লোকের রুচি, আগ্রহের থেকে পৃথক হবেই। সে এখনও পূর্ণতা প্রাপ্ত হয়নি। কিন্তু তাই বলে তার বিদ্যালয়ের শিক্ষা তার ভাবীজীবনের প্রস্তুতি স্বরূপ নয়-সেইটাই তার তখনকার জীবন (It is not a preparation for life but life itself)। কাজেই বয়স্ক লোকের বা সমাজের প্রয়োজন অনুযায়ী পাঠক্রম নির্ধারণ না করে শিশুর

1 Pp 178-179. Chapter X

প্রয়োজন অনুযায়ী পাঠক্রম নির্ধারণ করতে হবে। এর জন্য যেমন তার আগ্রহ, রুচি প্রবণতা জানা প্রয়োজন তেমনি তার মনোপ্রকৃতি এবং মানসিক বয়সও জানা প্রয়োজন। শিশুকেন্দ্রিক পাঠক্রম হলে তবেই তা অনুসরণ করতে ছাত্র আগ্রহী হবে এবং উৎসাহিত বোধ করবে।

পাঠক্রম নির্ধারণের নীতি :—পাঠক্রম নির্ধারণ করার সময় বা বিষয়বস্তু সংগঠনের সময় দুটি বিভিন্ন মতবাদ অনুসরণ করা হয়, এর একটি হ'ল মনোবিজ্ঞান-সম্মত মতবাদ (Psychological) এবং অপরটি হল যুক্তিসম্মত মতবাদ (Logical)।

মনোবিজ্ঞানসম্মত মতবাদ : এই মতবাদের সমর্থকেরা বিষয়বস্তুকে মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে সংগঠিত করতে চান। তাঁদের মতে বিষয়বস্তুই শিশুর মানসিক বিকাশকে অনুসরণ করে চলবে। বর্ত্তমান যুগ হ'ল শিশুকেন্দ্রিক শিক্ষার যুগ। শিশুর রুচি, আগ্রহ, প্রবণতা, ক্ষমতা ইত্যাদির পরিপ্রেক্ষিতে বিষয়বস্তু নির্বাচন করা উচিত। এর ফলে শিশু শিক্ষার প্রতি আকৃষ্ট হবে এবং বিষয়বস্তুর প্রতি তার আগ্রহ ও মনোযোগ বৃদ্ধি পাবে। পাঠক্রমের বিষয়বস্তু সরল থেকে জটিল এবং জানা থেকে অজানার দিকে এগিয়ে যাবে। এই পাঠক্রমে শিশু বিষয়বস্তুকে অনুসরণ করে না বরং বিষয়বস্তুই শিশুকে অনুসরণ করে চলে।

যুক্তিসম্মত পদ্ধতি :—এই মতবাদের সমর্থকেরা শিক্ষার ক্ষেত্রে শিশুর উপর বেশী গুরুত্ব দেন না। তাঁরা যুক্তিসম্মত জ্ঞানের উপরই বেশী জোর দিয়ে থাকেন। এই পদ্ধতিতে যুক্ত ও বিচারকরণ ক্ষমতার উপর বেশী জোর দেওয়া হয়। এতে শিক্ষকের কোন স্বাধীনতা থাকে না। বিষয়বস্তু পাঠক্রমে যেভাবে সাজানো থাকে, চিত্তাকর্ষক বা সহজবোধ্য হোক বা না হোক সেইভাবেই পড়াতে হবে এই হ'ল যুক্তিসম্মত পদ্ধতির নির্দেশ। শিশুর স্বকীয় বৈশিষ্ট্য বা ক্ষমতা [মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে যার উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়] এই পদ্ধতিতে সম্পূর্ণ অবহেলিত।

যাই হোক, বাস্তবে কিন্তু মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত মতবাদের মধ্যে কোন বিরোধিতা বা পার্থক্য নেই। যুক্তিসম্মত মতবাদে বিষয়বস্তুর বিস্তৃতি অনেক বেশী এবং সেই বিষয়বস্তু থেকে প্রয়োজন অনুযায়ী একটি নির্বাচন করে নিতে বলা হয়। এই নির্বাচনের কাজটি করে মনোবিজ্ঞান। কাজেই প্রথমে যা থাকে যুক্তিসম্মত মতবাদ, পরে তাই হয়ে যায় মনোবিজ্ঞানসম্মত মতবাদ। অবশ্য মনোবিজ্ঞান শিক্ষামূলক এবং ব্যবহারমূলক, উভয় দিক বিবেচনা করেই নির্বাচন কাজটি সমাধা করে। বিশেষ বিশেষ বয়সে ছাত্র পাঠ্যবিষয়ের কতটুকু গ্রহণ করতে পারে, মনোবিজ্ঞান তাও বিবেচনা করে। কি প্রকার যুক্তি ছাত্রদের নিকট গ্রহণযোগ্য এবং সেই যুক্তি অর্জন করার জন্য ছাত্রদিগকে কোন্ কোন্ অধ্যায়ের পাঠ গ্রহণ করতে হবে, মনোবিজ্ঞান তাও বিবেচনা করে। কাজেই গণিতের বিষয়বস্তু সংগঠনে একই সঙ্গে মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত মতবাদের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। যুক্তিসম্মত মতবাদ অনুযায়ী বিভিন্ন অধ্যায় পর্যায়ক্রমে সাজানো হয়, যাতে পরস্পরের মধ্যে একটা যোগসূত্র বজায়

থাকে ; আর মনোবিজ্ঞানসম্মত মতবাদ অনুযায়ী অধ্যায়গুলির বিষয়বস্তু মানসিক বয়স অনুযায়ী নির্বাচিত করা হয়, যাতে ছাত্র বিষয়বস্তু সম্বন্ধে আগ্রহ বোধ করতে পারে এবং বিষয়বস্তুটি তার নিকট কার্যকরী বলে প্রতীয়মান হয়।

পাঠক্রম সাজাবার পদ্ধতি ঃ—পাঠক্রমের বিষয়বস্তুগুলি বিভিন্নভাবে সাজানো যায়। প্রধানতঃ যে সমস্ত পদ্ধতিতে বিষয়বস্তু সাজানো হয়, সেগুলি হ'ল :—

১। **বিষয়বস্তুমূলক পদ্ধতি** (Topical Method) :—এই পদ্ধতিতে কোন বিষয়বস্তু আরম্ভ করলে তার সম্বন্ধে যাবতীয় জ্ঞান শেষ না হওয়া পর্যন্ত অন্য কোন বিষয় ধরা হয় না। যেমন যদি 'সুদকষা' ধরানো হয়, তবে এই সম্বন্ধীয় যত রকম সমস্যা আছে সবগুলি আলোচনা করা হয়। কিন্তু এই পদ্ধতিটির অনেক দোষ আছে। একই বিষয় সম্পূর্ণরূপে আয়ত্ত করানোর জন্য দীর্ঘদিন ধরে পড়াতে হয় বলে পদ্ধতিটি বিরক্তিকর। তাছাড়া একটি শ্রেণীতে একই বিষয়ের সমস্ত অংশ ছাত্র-ছাত্রীদের বোধগম্য নাও হতে পারে কারণ বিষয়বস্তুর উপলব্ধি মানসিক বয়সের উপর নির্ভরশীল। আর একটা দোষ হ'ল—একটা বিষয় শেষ করার পর পরবর্তী কোন স্তরেই তার আর আলোচনা হয় না বলে তা ভুলে যাবার সম্ভাবনা অনেক বেশী।

২। **এককেন্দ্রিক পদ্ধতি** (Concentric Method) :—প্রত্যেক বিষয়ের কিছু অংশ সরল ও তার পরের অংশ অপেক্ষাকৃত কঠিন হয়। 'সুদকষার' অঙ্ক ষষ্ঠ শ্রেণীতেও আছে, দশম শ্রেণীতেও আছে। কিন্তু কাঠিন্যমাত্রা বিভিন্ন। একই বিষয়বস্তুকে কাঠিন্যমাত্রা অনুযায়ী ভাগ করে বিভিন্ন পাঠদান পদ্ধতিকে এককেন্দ্রিক পদ্ধতি বলা হয়। এটি মনোবিজ্ঞানসম্মত ও ছাত্রদের বিশেষ উপযোগী। এতে ভুলে যাবার সম্ভাবনাও কম। এতে বিষয়বস্তু ছাত্রদের মানসিক বয়স অনুযায়ী স্থির করা হয়।

৩। **কার্যসমস্যামূলক পদ্ধতি** (Project Method) :—এই পদ্ধতিতে কোন একটি কার্য বা সমস্যাকে কেন্দ্র করে বা অবলম্বন করে পাঠক্রমের বিন্যাস করা হয়। বুনিয়াদী শিক্ষায় পরিবেশ অনুযায়ী কোন একটি কর্ম বা সমস্যাকে কেন্দ্র করে সেই কর্মটির শিক্ষায় প্রকৃত যোগ্যতা অর্জন করার জন্য যা কিছু শিক্ষণীয় সেগুলি কর্মশিক্ষার সঙ্গে ধাপে ধাপে শিখতে হয়। পাঠক্রমও বিন্যস্ত হয় তার উপযোগী করেই। কর্ম-সমস্যাকে কেন্দ্র করে পদ্ধতিটি অবলম্বন করা হয় বলে এটিকে কর্মসমস্যামূলক বা কার্যসমস্যামূলক পদ্ধতি বলা হয়। পোষ্ট-অফিস বা বাস-বাস খেলার মধ্য দিয়ে বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা সমাধানের শিক্ষা দেওয়া সম্ভব।

৪। **উপযোগিতামূলক পদ্ধতি** (Principle of Utility) : এই পদ্ধতিতে গণিতের উপযোগিতার দিকটির উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়। সুনাগরিকতার জন্য শিক্ষাই এই পদ্ধতির লক্ষ্য। এই পদ্ধতি অনুযায়ী কোন একটি বিষয়কে পাঠক্রমে অন্তর্ভুক্ত করতে হলে দেখতে হবে—সেটি দৈনন্দিন জীবনে কাজে লাগে কিনা ; অন্যান্য বিষয় শিক্ষার ক্ষেত্রে সেটি কাজে লাগে কি না ; বৃত্তি শিক্ষার উপযোগী কি না এবং সুনাগরিক হবার শিক্ষার সহায়ক কি না প্রভৃতি।

৫। **কর্মতৎপরতামূলক পদ্ধতি** (Principle of Activity) :—শিক্ষা-

বিজ্ঞানে কর্মতৎপরতার একটি বিশেষ স্থান এবং মূল্য আছে। এই জাতীয় শিক্ষা শিশুদের নিকট আনন্দদায়ক বলে সবিশেষ উপযোগী। শিক্ষণীয় বিষয়টি হাতে-কলমে করতে পারলে শিশুরা যেমন আনন্দিত হয়, তেমনি আগ্রহীও হয়। শিক্ষা মূর্ত বস্তু দিয়ে আরম্ভ করতে হয়। অমূর্ত ধারণা ধীরে ধীরে আপনিই চলে আসবে' এই পদ্ধতিতে শিশুর কর্মতৎপরতা বিশেষভাবে লক্ষ্যণীয়। গতানুগতিক পদ্ধতিতে কোন বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় না করে যদি বলা হয়: "তেপান্তরের মাঠে, তাল-তেঁতুল বটে সমান দূরে রেখে, গুপ্তধনে দেখে" বের করো তো গুপ্তধনের জায়গাটি—তাহলে ছাত্রদের কর্মতৎপর হতেই হবে।

৬। **অনুবন্ধমূলক পদ্ধতি** (Principle of Correlation): অনুবন্ধ বা সহসম্পর্ক অনেক রকমের হতে পারে। যেমন জীবনের সঙ্গে অনুবন্ধ, অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে অনুবন্ধ, বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ এবং একই শাখার বিভিন্ন বিষয়বস্তুর মধ্যে অনুবন্ধ। বিদ্যালয়ে প্রত্যেক শ্রেণীর প্রত্যেকটি বিষয়ের পাঠক্রম বৎসরের প্রথমেই নির্ধারণ করা হয়। বৎসরের বিভিন্ন সময়ের জন্য পাঠক্রমটিকে কয়েকটি অংশে ভাগ করে নিতে হয় এবং নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে তা শেষও করতে হয়। ছাত্ররা একটি শ্রেণীতে যা শিখল, পরবর্তী উচ্চ শ্রেণীতে তার অন্য অংশ শেখার সময় অনুবন্ধপ্রণালীর সংস্পর্শে আসবে; আবার অন্যজাতীয় অনুবন্ধগুলিও অনুপস্থিত থাকবে না। তাছাড়া বিভিন্ন দিকের উপর লক্ষ্য রেখে পাঠক্রমটিকে জীবনভিত্তিক করার চেষ্টা করাও হয়।

বিদ্যালয়ের প্রতিটি শ্রেণীর বিভিন্ন বিষয়ের বিস্তারিত পাঠক্রম বৎসরের প্রথমেই বিষয়-শিক্ষকেরা নির্ধারণ করে নিলে খুবই ভালো হয়। অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা করে এই নির্বাচন করতে হবে। বৎসরের বিভিন্ন সময়ের জন্য পাঠক্রমটি কয়েকটি অংশে ভাগ করে নিতে হবে এবং লক্ষ্য রাখতে হবে যেন নির্দিষ্ট সময়ে পাঠক্রমটির নির্দিষ্ট অংশের পাঠদানের কাজ সম্পূর্ণ হয়। পাঠক্রমের বিষয়বস্তুগুলি জীবনভিত্তিক হলে ভালো হয়। ছাত্রদের নিজস্ব অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে বিষয়বস্তুগুলি নির্বাচন করলে আরো ভালো হয়। পাঠক্রমটি যেন অনড়, অচল বা অপরিবর্তনীয় না হয়। প্রয়োজনবোধে যেন তার পরিবর্তন, পরিবর্ধন বা পরিবর্জন সম্ভব হয়। পাঠক্রম হবে শিশুকেন্দ্রিক। পাঠক্রম শিশুকে তাড়িয়ে নিয়ে যাবে না, বরং শিক্ষার পথে তাকে এগিয়ে যেতে বন্ধুর মত সাহায্য করবে। শিক্ষকের উপর পাঠক্রম নির্ধারণ করার পূর্ণ স্বাধীনতা ন্যস্ত থাকবে। পাঠক্রমে 'যেটুকু না হলেই নয়'—কেবলমাত্র সেইটুকুই থাকলে ভালো হয়। পাঠক্রমটি পরীক্ষা-শাসিত হবে না। যাতে সমাজের চাহিদা যথেষ্টভাবে পূরণ করা যায়, তার ব্যবস্থাও রাখতে হবে পাঠক্রমে। পাঠক্রমে বিভিন্ন বৃত্তি গ্রহণের যেন সুযোগ থাকে। প্রাপ্তযৌবনের চাহিদাগুলিও যেন পাঠক্রমের সাহায্যে পূরণ করা যায়।

এবার বিভিন্ন স্তরে পাঠক্রম কিরকম হবে, সে বিষয়ে আলোচনা করা যাক। বর্তমানে গণিতের **পাঠক্রমটি** আমরা **তিনটি বিভিন্ন স্তরে** ভাগ করতে পারি। একটি হল প্রাথমিক স্তরের জন্য, একটি মাধ্যমিক স্তরের জন্য, আর একটি হল—

ঐচ্ছিক স্তর। প্রাথমিক স্তরের গণিতের পাঠক্রম নির্ধারণের উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে হল—

১। গণিতের প্রাথমিক ধারণা, প্রক্রিয়া, মৌল-নীতি ও গাণিতিক সম্বন্ধ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

২। নির্ভুল ও দ্রুত উত্তর দানের অভ্যাস ও দক্ষতা অর্জন করা।

৩। গণিতের ধারণা ও দক্ষতা দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জন করা।

৪। ব্যক্তিগত ও সামাজিক পরিবেশে গণিতের গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি করা।

মাধ্যমিক স্তর :—

মাধ্যমিক স্তরে গণিতকে 'কেন্দ্রীয়-বিষয়' (Core Subject) বলে ধরতে হবে। গণিতের জ্ঞান যেন ছাত্রদিগকে সুযোগ্য নাগরিক হিসাবে গড়ে তুলতে সাহায্য করে। মাধ্যমিক স্তরের পর যারা আর লেখাপড়া করবে না, পাঠক্রমটির সাহায্যে তাদের জ্ঞান যেন সম্পূর্ণ হয়, আবার যারা এই স্তরের পর উচ্চশিক্ষা অর্জন করতে যাবে, তাদের ক্ষেত্রে পাঠক্রমটি যেন উচ্চশিক্ষার ভিত্তি হতে পারে। মাধ্যমিক স্তরটি আবার দু'ভাগে বিভক্ত। একটি হল—নিম্ন মাধ্যমিক স্তর, (৫ম, ৬ষ্ঠ, ৭ম, ৮ম অথবা ৬ষ্ঠ, ৭ম ও ৮ম শ্রেণী) অপরটি হল উচ্চ মাধ্যমিক স্তর (৯ম, ১০ম, ১১শ বা ৯ম ও ১০ম শ্রেণী); নিম্ন মাধ্যমিক স্তরেই ছাত্রদের ভবিষ্যৎ জীবনের প্রস্তুতিপর্ব চলতে থাকে। এই স্তরে ছাত্রদের ফলাফল দেখেই তাদের ভবিষ্যৎ জীবনের প্রস্তুতিপর্ব চলতে থাকে। এই স্তরে ছাত্রদের ফলাফল দেখেই তাদের ভবিষ্যৎ শিক্ষাজীবন বা বৃত্তি-নির্বাচন করা উচিত। এই স্তরে গণিত-শিক্ষণের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে বিবৃত হল।

লক্ষ্য—

১। পরিবেশ ও সমাজের উপর গণিতের অপরিসীম প্রভাব ছাত্রদের উপলব্ধি করতে সাহায্য করা ; ২। পরিবেশ নিয়ন্ত্রণে ও মানবজাতির উন্নতিতে গণিতের অবদানের কথা উপলব্ধি করা ; ৩। গণিতে দক্ষতা অর্জন এবং গণিত সম্বন্ধে সুষ্ঠু মনোভাব গড়ে তুলতে সাহায্য করা ; ৪। ছাত্রদের আত্মোপলব্ধি করার ক্ষমতা বৃদ্ধি করা।

উদ্দেশ্য—

১। গণনামূলক দক্ষতা অর্জন করা ; ২। গাণিতিক ধারণা উপলব্ধি করা এবং সেগুলি ব্যবহার করা ; ৩। গণিতের ভাষা ও প্রতীক (Symbol) গুলি উপলব্ধি করা এবং সেগুলি যথাযথ ব্যবহার করা ; ৪। পরিসংখ্যানমূলক তথ্য এবং লেখচিত্র সংগ্রহ করা, প্রকাশ করা এবং ব্যাখ্যা করার ক্ষমতা অর্জন করা ; ৫। আত্ম-নির্ভরশীল বা আত্ম-বিশ্বাসী হওয়া ; ৬। বিশ্লেষণী ক্ষমতা অর্জন করা এবং সঠিক-

ভাবে কাজ করার ক্ষমতা অর্জন করা ; ৭। স্পষ্ট ও যথাযথ চিন্তা করার ক্ষমতা অর্জন করা ; ৮। সাধারণীকরণের ক্ষমতা অর্জন করা ; ৯। গণিতের সাথে অন্যান্য বিষয়ের, পরিবেশের এবং জীবনের যোগসূত্র নির্ণয় করা ; ১০। বিশ্বাসযোগ্য ও গ্রহণযোগ্য 'সম্ভাব্য হিসাব' (estimate) তৈরী করার ক্ষমতা অর্জন করা।

মাধ্যমিক স্তরে গণিত পাঠে ছাত্রদের আগ্রহী করে তোলার জন্য বিভিন্ন বিষয়বস্তুর সাহায্য লওয়া হয়। তার মধ্যে কতকগুলি হল—

১। পরিসংখ্যান, পরিমিতি, জ্যামিতি, অঙ্কন ইত্যাদিতে ব্যবহারিক বা হাতে কলমে কাজে (Practical work)।

২। গণিতে দৃষ্টিনির্ভর প্রদীপন (visual aid) ব্যবহার করা চলে, এমন বিষয়বস্তু।

৩। ছাত্রদের আগ্রহ, 'হবি' ইত্যাদির উপর নির্ভর করে নির্বাচিত বিষয়বস্তু (কার্যসমস্যামূলক পদ্ধতি অনুযায়ী কোন বাস্তব সমস্যা দিলে ভালো হয়, যেমন ঐতিহাসিক স্থানে ভ্রমণ করতে যাওয়া বা বনভোজন করা ইত্যাদি)।

৪। গণিতের ইতিহাস (উৎপত্তি ও ক্রমবিকাশের ইতিহাস)।

৫। গণিতে আনন্দ পাওয়া যাবে এমন বিষয়বস্তু (ধাঁধা, সমস্যামূলক চিত্র ইত্যাদি)।

ঐচ্ছিক গণিত (Elective Mathematics) :— ঐচ্ছিক গণিত কেন্দ্রীয় গণিত অপেক্ষা কিছু কঠিন এবং এর পাঠক্রমটিও কিছু বেশী বিস্তৃত। সাধারণ গণিত বা কেন্দ্রীয় গণিতে উদাহরণের সংখ্যা বেশী, কিন্তু ঐচ্ছিক গণিতে উদাহরণ অত্যন্ত কম। যাই হোক ঐচ্ছিক গণিত পাঠের লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যগুলি সংক্ষেপে আলোচনা করা যাক :—

লক্ষ্য :—

১। সংখ্যা ও পরিমাণের যথাযথ ব্যবহার সম্বন্ধে ছাত্রদের অবহিত করা।

২। ব্যক্তিগত, সমাজগত ও অর্থনৈতিক জীবনে গণিতের প্রভাব সম্বন্ধে ছাত্রদের অবহিত করা।

৩। গাণিতিক ভাবের মাধ্যমে সৌন্দর্যমূলক ও বুদ্ধিমূলক পরিতৃপ্তি লাভ করা এবং সৃজনমূলক ক্ষমতা প্রকাশের সুযোগ দান করা।

৪। বৃত্তিমূলক উদ্দেশ্যে গণিতের প্রয়োজনীয় জ্ঞান ও দক্ষতা অর্জনে ছাত্রদের সহায়তা করা। এককথায়, গণিতের সাহায্যে কোন উপযুক্ত বৃত্তির ভিত্তি স্থাপন করা।

উদ্দেশ্য :—

১। গণিতের বিভিন্ন ভাষা উপলব্ধি করা এবং সেগুলি সার্থকভাবে প্রয়োগ করা।

২। গাণিতিক তথ্য এক ভাষা থেকে অন্য ভাষাতে অনুবাদ করার দক্ষতা অর্জন করা।

৩। পরিবেশে ছাত্র যাতে সক্রিয় অংশ গ্রহণ করতে পারে তার ব্যবস্থা করা।

৪। গাণিতিক তত্ত্ব ও তথ্য সংগ্রহ করা ও সংব্যাখ্যান করা।

৫। অনুমানের উপর ভিত্তি করে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা এবং তার ফলাফলের ভিত্তিতে যুক্তিযুক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া।

৬। 'কাল্পনিক সংখ্যা' ও 'অমূলদ সংখ্যা' (Imaginary numbers and irrationals) সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

৭। সূচক (Indices) এবং লগারিদম (Logarithm) সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

৮। সমস্যা-সমাধানে পরিবর্তনশীল রাশি ও সংখ্যা ব্যবহার করা।

৯। অসীম (Infinity) এবং শূন্য (zero) সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

১০। সীমা (Limit), সম্ভাবনা (Probability) ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

১১। ব্যবহারিক কাজের জন্য উন্নততর যন্ত্রপাতির ব্যবহার করার ক্ষমতা অর্জন করা।

১২। জ্যামিতি ও বীজগণিতে অবরোহী পদ্ধতি ব্যবহার করার ক্ষমতা অর্জন করা।

১৩। জ্যামিতিতে বীজগণিতের এবং বীজগণিতে জ্যামিতি প্রয়োগ করতে শিক্ষা দেওয়া।

১৪। গণিতের হিসাবে দ্রুততা, নির্ভুলতা এবং আত্মবিশ্বাস অর্জন করা। এবং গণিতে প্রতীক ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করা।

১৫। গণিতের সামগ্রিক জ্ঞান বাস্তব সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে সার্থকভাবে প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জন করা।

বর্তমান যুগ হল বিজ্ঞানের যুগ। বিজ্ঞানের সঙ্গে তাল রেখে চলতে গেলে গণিতের পাঠক্রমকেও উন্নত করতে হবে। শিক্ষা জগতে যে সমস্ত 'কমিশন' নিযুক্ত করা হয়েছিল, তারা প্রত্যেকেই গণিতের পাঠক্রম পরিবর্তন করার কথা বলেছেন। গণিত কেবলমাত্র তত্ত্ব ও তথ্যমূলক করলেই চলবে না, গণিতের ব্যবহারিক দিকটির প্রতিও সবিশেষ 'গুরুত্ব' আরোপ করতে হবে। গণিতের পাঠক্রমটি দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহারের উপযোগী হবে, আবার উচ্চ শিক্ষার ভিত্তিও গঠন করবে। পাঠক্রমটি ব্যক্তিগত ও সমাজগত, উভয়প্রকার প্রয়োজনই মেটাতে সক্ষম হবে। অবশ্য একটি সম্পূর্ণ পাঠক্রম নির্ধারণ করতে গেলে বিজ্ঞানসম্মত দৃষ্টিভঙ্গী ও বৈজ্ঞানিক পদ্ধতিতে গবেষণা করার প্রয়োজন।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. The present course in Core Mathematics in our Secondary School is intended to be oriented to the use of Mathematics in daily life"—Examine the prescribed Syllabus in Core mathematics to indicate those aspects of it which bear upon this

aim in particular. Is the teaching and learning of the Subject as effecti desired ? If not, Suggest remedies for improvment.

2. Should Mathematics be made Compulsory or optional in the Secon Stage ?—Discuss.

3. Critically examine the curriculum of mathematics in the Secondary St keeping in view the principles of curriculum Construction.

4. "Mathematics is more than a mere accumulation of technical knowled it is a mode of thought, and the teacher should try to afford his pupils opportunity of sharing in this kind of thinking, if only in a very simple a elementary way."—Elucidate.

5. "The curriculum for young people must be thought of in terms of activ and experience, not, as hitherto in terms of passive assimilation by the pupil material set before him by the teacher." How does this view of curriculum af the whole position of mathematics in Schcols ?

6. Does the present curriculum of mathematics in the Secondary Stage help realising the aims of teaching mathematics ? Give reasons.

7. Outline arguments both for and against making mathematics a Compuls Subject throughout the Secondary Stage of education.

8. "In this techno-tronic age, every individual must have a certain grasp essentials of Mathematics in order to be able to live a meaningful life." In the lig of this statement, discuss the place of Mathematics in School Curriculum.

ষষ্ঠ অধ্যায়

গণিত শিক্ষার বিভিন্ন পদ্ধতি

(Different Methods of Teaching Mathematics)

গণিতে বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করা হয়। কিন্তু এই সমস্ত সম্বন্ধ প্রকাশ করার সময় ভাষার বহুল ব্যবহার করা হয় না। গণিতের সম্বন্ধ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। প্রতীকগুলি কোন শব্দ, সংখ্যা, অক্ষর, চিত্র বা গ্রাফ জাতীয় হয়। এই সম্বন্ধ নির্ণয় করার সময় ছাত্র আবিষ্কারের আনন্দ অনুভব করে। Whitehead-এর কথায়: "Every child should experience the joy of discovery."

গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্যগুলির কথা আগেই আলোচনা করা হয়েছে। সচরাচর দুটি প্রধান লক্ষ্যের দিকে সবসময় নজর রাখা হয়। সে দুটি হল :—(১) বিষয়টির উপলব্ধি সম্বন্ধে নিশ্চিত হওয়া এবং (২) হিসাব ও গণনাতে দক্ষ হওয়া।

গণিত শিক্ষণে দুটি কথা প্রায়ই ব্যবহৃত হয়। একটি হল পদ্ধতি (Method) এবং অপরটি হল প্রণালী (Mode)। পদ্ধতি হল—যে ভাবে বিষয়বস্তুটি সাজানো হয় এবং সেটিকে সমাপ্তির দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া হয়। আর প্রণালী হল বিষয়বস্তুটিকে যে ভাবে ছাত্রদের নিকট উপস্থাপিত করা হয়[১]। অবশ্য পদ্ধতি ও প্রণালীর মধ্যে পার্থক্যটি সবসময় খুব সহজে নির্ণয় করা যায় না। কখনও কখনও পদ্ধতি ও প্রণালীকে পৃথক করাই যায় না। অনেক সময় প্রণালীকে পদ্ধতির মধ্যেই অন্তর্ভুক্ত করা হয়।

আবার গণিত শিক্ষণে যে সমস্ত পদ্ধতির ব্যবহার দেখা যায়, সেগুলিও সম্পূর্ণ পৃথক বা স্বয়ং-সম্পূর্ণ পদ্ধতি নয়। অনেক সময় কোন একটি পদ্ধতির ছাপ অপর একটি পদ্ধতির মধ্যেও দেখা যায়। আবার একই জিনিস শেখাবার সময়ও বিভিন্ন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। অবশ্য প্রত্যেকটি পদ্ধতিরই একটা নিজস্ব বৈশিষ্ট্য আছে এবং বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে বিশেষভাবে প্রযুক্ত হবার মত ক্ষমতা আছে।

গণিত শিক্ষণেও মনোবিজ্ঞানের প্রভাব যথেষ্ট পরিলক্ষিত হয়। তবে মনোবিজ্ঞানের সব শাখাগুলিরই ব্যবহার দেখা যায় না। অনুষঙ্গবাদ (Association Theory) ও গেস্টাল্ট (Gestalt) মতবাদ—এই দুই শ্রেণীর মতবাদের প্রভাবই বেশী দেখা যায়। অনুষঙ্গবাদীরা শিক্ষণে উদ্দীপক ও তার প্রতিক্রিয়ার উপর বেশী জোর দিয়ে থাকেন।

---

(১) In the study of the pedagogy of mathematics the point of view is sometimes that of the manner in which the subject matter is arranged and developed; at others that of the manner in which it is presented to the pupils *** The former has sometimes been called method and the latter mode.

The teaching of mathematics—J. W. A. Young (Pp. 53.))

এই জন্য এঁরা law of exercise এবং law of effec. এই দুটি শিক্ষণের নিয়ম বা সর্তের উপর বেশী জোর দিয়ে থাকেন। Gestalt-বাদীরা গণিতকে বিচ্ছিন্ন ভাবে না দেখে সামগ্রিক ভাবে বুঝবার ও জানবার উপর জোর দিয়ে থাকেন। এঁরা কেবলমাত্র চর্চার ফলে শিক্ষণ হয়, এ কথা বিশ্বাস করেন না। এঁদের মনে শিক্ষণের জন্য যে জিনিসটি একান্ত প্রয়োজনীয়, তা হল অন্তর্দৃষ্টি (Insight)।

গণিত শিক্ষণে যে সমস্ত পদ্ধতি ও প্রণালী ব্যবহৃত হয়, তার একটা তালিকা নীচে দেওয়া হল।

পদ্ধতি :—

১। বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণ পদ্ধতি (Analytic & Synthetic Method)
২। আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি (Inductive & Deductive Method)
৩। আবিষ্কারকের পদ্ধতি (Heuristic Method)
৪। বক্তৃতা পদ্ধতি (Lecture Method)
৫। পরীক্ষাগার পদ্ধতি (Laboratory Method)
৬। ঐতিহাসিক পদ্ধতি (Historical Method)
৭। একরোখা পদ্ধতি (Dogmatic Method)
৮। নির্দেশমূলক পদ্ধতি (Assignment Method) প্রভৃতি।

প্রণালী :—

১। পরীক্ষা, ২। আবৃত্তি, ৩। বক্তৃতা, ৪। ব্যক্তিগত, ৫। দলগত প্রভৃতি।

এবার পদ্ধতিগুলির সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা যাক—প্রথমে ধরা যাক, **বিশ্লেষণ ও সংশ্লেষণ পদ্ধতির** কথা।

বিশ্লেষণ কথাটির আসল অর্থ হল—যে সমস্ত জিনিস একত্রে আছে, তাদের খণ্ড বা অংশগুলিকে পৃথক বা বিশ্লিষ্ট করা। আবার সংশ্লেষণ কথাটির অর্থ হল খণ্ড অংশগুলিকে একত্র জুড়ে সম্পূর্ণ জিনিসটি প্রস্তুত করা।

বিশ্লেষণ হল সমগ্র সমস্যাটিকে এমন ভাবে খণ্ড বা অংশে ভাগ করা যাতে অংশগুলিকে পরে আবার জুড়ে সমগ্র সমস্যাটিকেই ফিরে পাওয়া যায়। সংশ্লেষণ হল সমস্যার বিশিষ্ট অংশগুলিকে পুনরায় জুড়ে দিয়ে সমস্যাটি পুনর্গঠিত করা যাতে সমস্যাটির যথার্থতা প্রমাণিত হয়। গণিতে আমরা বিশ্লেষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করি যাতে আমরা বিভিন্ন বিচ্ছিন্ন অংশ একত্রিত করে সম্পূর্ণ সমস্যাটি উপলব্ধি করতে পারি; অর্থাৎ সম্পূর্ণ সমস্যা যে বিচ্ছিন্ন অংশের সমষ্টি এবং সম্পূর্ণ সমস্যার সঙ্গে বিচ্ছিন্ন অংশগুলির একটা নির্দিষ্ট সম্বন্ধ আছে তা উপলব্ধি করার জন্য। সেইজন্যই সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে বিচ্ছিন্ন অংশগুলিকে আবার সংযুক্ত করে সম্পূর্ণ সমস্যাটি প্রস্তুত করা হয়;

বিশ্লেষণের থেকেই সংশ্লেষণে যাওয়া যায় ; আবার সংশ্লেষণ থেকেই বিশ্লেষণের উদ্দেশ্য ও নিয়মাবলী ব্যাখ্যা করা যায়। এই জন্যই এ কথা বলা যেতে পারে যে সংশ্লেষণ ছাড়া বিশ্লেষণ সম্পূর্ণ হয় না। বিশ্লেষণকে যদি চিন্তন প্রক্রিয়া বলা যায়, তবে সংশ্লেষণকে বলা যেতে পারে চিন্তন প্রক্রিয়ার ফল। প্রকৃতপক্ষে সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ একই পদ্ধতির দুটি অবিচ্ছেদ্য অংশ।

বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে আমরা অজানা জিনিসের সহায়তায় জানা জিনিসে পৌছাই। আর সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে জানা জিনিসের সহায়তায় অজানা জিনিসে পৌছাই। কোনও জানা তথ্য দেওয়া আছে। তার উপর ভিত্তি করে একটি অজানা সিদ্ধান্ত প্রমাণ করতে হবে। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে ঐ জানা তথ্যকে ভিত্তি করে অগ্রসর হতে হয়। বিভিন্ন দিক থেকে বিচার করে বা বিভিন্ন জিনিসের সাহায্য নিয়ে পরীক্ষা করে দেখতে হয়, যতক্ষণ না অজানা সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হয়। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ শুরু হয় প্রদত্ত সত্য-তত্ত্ব থেকে (hypothesis) এবং শেষ হয় সিদ্ধান্তে (conclusion)। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণ শুরু করতে হয়। অজানা সিদ্ধান্তটিকে বিশ্লেষণ করে দেখতে হয় সেটি অন্য কোনও সত্যতার উপর নির্ভর করে কি না। যদি করে, তা হলে দেখতে হবে ঐ সত্যতা আবার অন্য কোন সত্যতার উপর নির্ভরশীল কি না! এইভাবে বিশ্লেষণ করে যেতে যেতে জানা তথ্যটিতে পৌছাতে হয় এবং শেষে দেখা যায় অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রকৃতপক্ষে জানা তথ্যটির সত্যতার উপর নির্ভরশীল। কিন্তু জানা তথ্যটি যে সত্য, তা আগেই প্রমাণিত হয়ে গেছে। সুতরাং অজানা সিদ্ধান্তটিও যে সত্য, তা প্রমাণিত হয়ে যায়। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে বলা যায় : A সত্য বলে B সত্য, আবার B সত্য বলে C-ও সত্য। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বলা যায় :

C সত্য হয়, যখন B সত্য। আবার B সত্য হয়, যখন A সত্য। কিন্তু A সত্য বলে আগেই বলা হয়েছে। অতএব C সত্য হবেই।

এখন দুটি পদ্ধতির উদাহরণ দেওয়া যাক।

উদা : ১। যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$ac+2b^2 : bc = c^2+2bd : dc$$

সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ :— $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

উভয় পক্ষে $\frac{2b}{c}$ যোগ করিয়া

$$\frac{a}{b}+\frac{2b}{c}=\frac{c}{d}+\frac{2b}{c}$$

বা, $\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{dc}$

বা, $ac+2b^2 : bc = c^2+2bd : dc$ (প্রমাণিত)

বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণ :—

$\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{dc}$ এই অভেদটি তখনই সত্য হয়, যখন

$(ac+2b^2)dc=(c^2+2bd)bc$ হয়,

উক্ত অভেদটি সত্য হয়, যখন

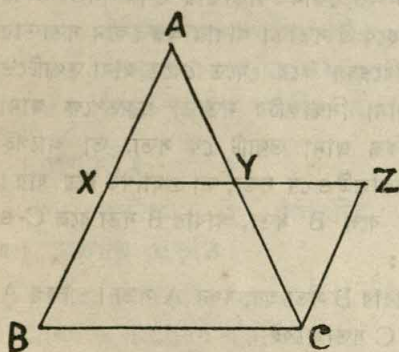
$ac^2d+2b^2cd=bc^3+2b^2cd$ হয়,

বা, যদি $ac^2d=bc^3$ হয়,

বা, যদি $ad=bc$ হয়,

কিন্তু $ad=bc$ দেওয়া আছে। সুতরাং

$ac+2b^2 : bc=c^2+2bd : dc$ এই অভেদটি প্রমাণিত হল।

উদা : ২। প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

বিশ্লেষণ পদ্ধতি : কোন একটি রেখাকে অপর একটি রেখার অর্ধেক প্রমাণ করতে হলে ছোট রেখাটিকে দ্বিগুণ করা হয়। সেইজন্য XY-কে Z পর্যন্ত বাড়ানো হয় যাতে XY = YZ হয়।

এখন প্রমাণ করতে হবে XZ= BC এবং XZ ∥ BC একই সঙ্গে সমান ও সমান্তরাল প্রমাণ করতে হলে BCZX যে একটি সামান্তরিক, তা প্রমাণ করলেই চলবে। BCZX যে একটি সামান্তরিক, তা বিভিন্ন ভাবে প্রমাণ করা যায়। BX এবং CZ-কে সমান ও সমান্তরাল প্রমাণ করতে পারলেই BCZX যে একটি সামান্তরিক তা প্রমাণ করা যাবে। BX ও CZ যে সমান্তরাল তা প্রমাণ করা যায় যদি ∠XAY = ∠YCZ প্রমাণ করা যায়। আবার ∠XAY = ∠YCZ প্রমাণ করা যায় যদি △XAY ≡ △YCZ প্রমাণ করা যায়। △XAY ≡ △YCZ অতএব BCZX সামান্তরিক।

আবার BX = AX, এর সাহায্যে প্রমাণ করা যায় BX = CZ এবং BX ∥ CZ.

সংশ্লেষণ পদ্ধতি : ABC ত্রিভুজে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y। প্রমাণ করতে হবে XY ∥ BC এবং 2XY = BC বা XY = $\frac{1}{2}$BC.

অঙ্কন :—XY-কে Z পর্যন্ত বাড়ানো হল যেন $XY=YZ$ হয়। CZ যোগ করা হল। এখন XAY এবং YCZ ত্রিভুজ দুটিতে।

$$XY=YZ, AY=YC \text{ এবং } \angle AYX=\Delta CYZ$$

∴ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

∴ $CZ=AX=BX$ এবং $\angle XAY=\angle YCZ$

∴ BX এবং CZ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং XZ এবং BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল

কিন্তু $XZ=2XY=BC$

XY, BC-র সমান্তরাল ও অর্ধেক।

সংশ্লেষণ পদ্ধতির প্রমাণ সংক্ষিপ্ত ও মার্জিত ; কিন্তু কতকটা অনুমানের উপর ভিত্তি করে চেষ্টা ও ভুল পদ্ধতির মধ্য দিয়ে অগ্রসর হতে হয়। এর ফলে প্রমাণের সব স্তরের ব্যাখ্যা খুঁজে পাওয়া যায় না। যেমন, প্রথম উদাহরণে কেন $\frac{2b}{c}$ যোগ করা হল তার কোন সঙ্গত কারণ বা ব্যাখ্যা খুঁজে পাওয়া যায় না। বিশ্লেষণ পদ্ধতি একটু দীর্ঘ ও ক্লান্তিকর, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু এখানে প্রমাণের প্রতিটি স্তর বেশ স্পষ্ট। সংশ্লেষণ পদ্ধতিকে একটি বিশেষ পদ্ধতি বলা যেতে পারে। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতি সার্বজনীন ও সাধারণ নিয়মের উপর ভিত্তি করে গঠিত। কোন একটি স্তর যদি ছাত্র ভুলে যায়, তবে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে সে ভুলটি সংশোধন করার সুযোগ পায়, কিন্তু সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে পায় না। বিশ্লেষণ পদ্ধতি কঠিন হতে পারে কিন্তু এতে সবগুলি ধাপই বোঝা যায়। প্রত্যেকটি ধাপের একটি যুক্তিও পাওয়া যায়। কিন্তু সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে যে ধাপগুলি দেখা যায়, সেগুলির সত্যতা বোঝা যায় ; ব্যাখ্যা করা যায় না। এখানে কতকগুলি জানা সত্যকে একত্র করে সেগুলির সাহায্যে অজানা সিদ্ধান্তটিকে সত্য বলে প্রমাণ করা হয়। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষণ করে কতকগুলি খণ্ডে ভাগ করে সেই খণ্ডগুলির সত্যতা প্রমাণিত করে অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়। Young-এর মতে : The synthetic method seeks a needle in a haystack but in the analytic method the needle seeks to get out the haystack. বিশ্লেষণ পদ্ধতিই হচ্ছে সত্যকার গণিতজ্ঞের পদ্ধতি। কোন সিদ্ধান্তের সত্যতা আবিষ্কার ও পুনঃ আবিষ্কারের জন্য বিশ্লেষণ পদ্ধতিই প্রশস্ত। আবার প্রমাণটিকে সংক্ষেপে ও সুন্দরভাবে উপস্থাপিত করতে হলে সংশ্লেষণ পদ্ধতিই ভালো। এইজন্য পাঠ্যপুস্তকগুলি সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে লিখিত হয়।

বিশ্লেষণ পদ্ধতি যখন সংশ্লেষণ পদ্ধতির চেয়ে ভালো, তখন আমরা কি একথা বলতে পারি যে শ্রেণীকক্ষে কেবল বিশ্লেষণ পদ্ধতিরই ব্যবহার করা হবে ? উত্তরে বলা যাবে—না। সংশ্লেষণ পদ্ধতিরও শ্রেণীকক্ষে একটা গুরুত্বপূর্ণ এ প্রয়োজনীয় স্থান আছে। ছাত্ররা প্রথমে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে প্রমাণের প্রত্যেকটি ধাপ বুঝে নেবে। তারপর সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে সেই প্রমাণ সুন্দর ও সংক্ষিপ্তভাবে লিখে রাখবে। বিশ্লেষণ

হল আবিষ্কারকের পদ্ধতি আর সংশ্লেষণ হল সেই আবিষ্কারের ফলকে সুন্দর ও সংক্ষি ভাবে লিপিবদ্ধ করে রাখার পদ্ধতি।

এখন সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ পদ্ধতির একটা তুলনামূলক আলোচনা করা যাক:—

ঃ সংশ্লেষণ পদ্ধতি ঃ	ঃ বিশ্লেষণ পদ্ধতি ঃ
১। জানা তথ্য (বা সত্য) থেকে অজানা সিদ্ধান্তে যাওয়া হয়। তত্ত্ব (hypothesis) থেকে সিদ্ধান্তে (conclusion) পৌছানো হয়।	১। অজানা সিদ্ধান্ত থেকে শু করে জানা সত্যে পৌছানো হয়। সিদ্ধান্ত থেকে তত্ত্বে যাওয়া হয়।
২। বিভিন্ন জানা সত্য একত্রিত করে সেগুলির সাহায্যে অজানা সিদ্ধান্তটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়।	২। অজানা সিদ্ধান্তকে বিশ্লেষ করে ছোট ছোট ভাগ করে সেই ভাগ গুলির সত্যতা প্রমাণ করে তার সাহায্যে অজানার সত্যতা প্রমাণ করা হয়।
৩। প্রতিটি স্তর বা ধাপ যে নির্ভুল তা বোঝা যায়। কিন্তু কোন একটি স্তর কেন নেওয়া হল তার ব্যাখ্যা করা হয় না। স্তরগুলি প্রায় যান্ত্রিকভাবে একে অপরকে অনুসরণ করে থাকে।	৩। প্রতিটি স্তরের একটা কারণ ও উদ্দেশ্য আছে। প্রত্যেকটি ধাপেরই একটা যুক্তি পাওয়া যায়। এ পদ্ধতি আবিষ্কারের পদ্ধতি, যদিও কিছুটা দীর্ঘ এবং ক্লান্তিকর।
৪। একবার ভুলে গেলে স্তরগুলি আর সহজে পুনরাবিষ্কার করা যায় না।	৪। ভুলে গেলেও স্তরগুলি সহজেই পুনরায় আবিষ্কার করা যায়।
৫। সংশ্লেষণ পদ্ধতি যুক্তিসম্মত প্রকাশের পদ্ধতি। কোন বিশেষ বক্তব্য যে সত্য তা প্রমাণ করার জন্য খুব বেশী বুদ্ধির প্রয়োজন হয় না। বুদ্ধির ব্যবহার এতে অত্যন্ত কম।	৫। এতে যথেষ্ট মানসিক শক্তির প্রয়োজন। এই পদ্ধতির চর্চার ফলে মনের যথেষ্ট উন্নতি হয়।
৬। স্থায়ীভাবে কোন কিছু লিপিবদ্ধ করে রাখতে হলে এ পদ্ধতি শ্রেয়। খুব সংক্ষেপে সুন্দর ও মার্জিত ভাবে আবিষ্কারের ফলগুলি লিপিবদ্ধ করা সম্ভব। সেইজন্য পাঠ্যপুস্তক এই পদ্ধতিতে লিখিত হয়।	৬। পদ্ধতিটি লম্বা ও বিরক্তি জনক বলে স্থায়ীভাবে কিছু লিপিবদ্ধ করার জন্য এর ব্যবহার নেই। পাঠ্য পুস্তক এ পদ্ধতিতে লিখিত হবে কি না এ সম্বন্ধে এখনও কোন নিশ্চিত সিদ্ধান্ত নেওয়া সম্ভব হয় নি।

আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি (Inductive and Deductive Method):

কতকগুলি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে একটা সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পদ্ধতিকে আরোহী পদ্ধতি বলে। যে সমস্ত বিশেষ দৃষ্টান্ত নেওয়া হয় সেগুলি প্রধানতঃ

মূর্ত জিনিস কেন্দ্র করে নেওয়া হয়। তারপর মূর্ত থেকে অমূর্ত সাধারণ সিদ্ধান্তে পৌছাতে হয় (Particular to general and concrete to abstract)। আরোহী পদ্ধতির সাহায্যে যখন কোন সার্বজনীন সত্য কিংবা সাধারণ সূত্র নির্ণয় করা হয় তখন তার সত্যতা যাচাই করা হয় কতকগুলি বিশেষ দৃষ্টান্তের সহায়তায়। গণিতের প্রাথমিক রূপই হল আরোহী।

অবরোহী পদ্ধতি ঠিক আরোহীর বিপরীত। এই পদ্ধতিতে একটি সাধারণ তথ্যকে স্বীকার করে নিয়ে বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রের সত্যতা প্রমাণ করা হয়। এই পদ্ধতিতে অমূর্ত সিদ্ধান্ত থেকে মূর্ত তথ্যে উপনীত হওয়া যায় (General to particular and abstract to concrete)। কোন একটি পূর্ব নির্ধারিত সূত্রের সাহায্য নিয়ে সমজাতীয় সমস্যার সমাধান করতে হলে অবরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করতে হয়। অবরোহী পদ্ধতির সিদ্ধান্তগুলি গণিতশাস্ত্র সম্মত হয়ে থাকে। আমরা অভিজ্ঞতা থেকে যে সমস্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হয়ে থাকি, সে সমস্ত সিদ্ধান্ত প্রায়ই আরোহী পদ্ধতির সহায়তায় নির্ণীত হয়। আরোহী পদ্ধতির অনুমান পরীক্ষাপ্রসূত। এই পদ্ধতিতে যে সমস্ত সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়, সেগুলি যে সব একেবারে সঠিক, তা নয়। তবে সেগুলি সঠিক হবার সম্ভাবনা খুব বেশী। এই জন্য গাণিতিক পদ্ধতি (*True Mathematical Type-Young*)।

আরোহী পদ্ধতিতে লব্ধ সিদ্ধান্তের একটি উদাহরণ :

পূর্বে যে সমস্ত দিনের কথা মনে পড়ছে—সেই সমস্ত দিনে সকালবেলাতে সূর্য পূর্ব দিকেই উঠেছিল।

আজও সকালে সূর্য পূর্ব দিকে উঠল।

অতএব বলা যায় সূর্য রোজ সকালে পূর্ব দিকেই ওঠে।

অবরোহী পদ্ধতির শ্রেষ্ঠ উদাহরণ হল—ন্যায়শাস্ত্রের যুক্তি ধারা। যেমন :—

সকল মানুষ হয় মরণশীল।
রবীন্দ্রনাথ একজন মানুষ।
অতএব তিনিও মরণশীল।

গণিতের পরিভাষায় বলা যায় :—

ত্রিভুজের শীর্ষ কোনগুলি সবসময় সমান। $\angle A$ এবং $\angle B$ শীর্ষকোণ। অতএব $\angle A = \angle B$।

এখন একটি সমস্যার দু'রকম পদ্ধতিতে সমাধানের উপায় দেখানো হল।

সমস্যা :—3% হারে 600 টাকার 5 বৎসরের সরল সুদ কত হবে?

আরোহী পদ্ধতি : 100 টাকার 1 বৎসরের সরল সুদ = 3 টাকা

$\therefore$ 1 ,, 1 ,, ,, ,, $= \frac{3}{100}$,,

$\therefore$ 600 ,, 1 ,, ,, ,, $= \frac{3}{100} \times 600$,,

$\therefore$ 600 ,, 5 ,, ,, ,, $= \frac{3}{\cancel{100}} \times \cancel{600} \times 5$

$= 90$ টাকা।

অবরোহী পদ্ধতি ঃ যদি P = আসল, R = সুদের হার এবং T = সময় ধ
হয়, তবে S. I বা সরল সুদের সূত্র হল ঃ $S.I = \frac{P \times R \times T}{100} = \frac{600 \times 3 \times 5}{100}$
$= 90$ টাকা।

অনুরূপে ঃ ধরা যাক সমস্যাটি হল :—To find the Sum of n natura
numbers.

আরোহী পদ্ধতি ঃ—

n-এর মান	শ্রেণী	যোগফল	যোগফল/n (অনুপাত)
$n=1$	1	1	1/1 বা 2/2
$n=2$	1+2	3	3/2
$n=3$	1+2+3	6	6/3=2=4/2.
$n=4$	1+2+3+4	10	$\frac{10}{4}$=5/2.

সুতরাং পদ সংখ্যা n হলে যোগফল ও nএর অনুপাত $\frac{n+1}{2}$ হবে। অতএব প্রথ
n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল $\frac{n(n+1)}{2}$ হতে পারে।

অবরোহী পদ্ধতি ঃ n-এর যে কোন মানের জন্য

$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 \cdots$ · একটি অভেদ

$n = 1, 2, 3, 4$ প্রভৃতি বসালে পাওয়া যায়

$$1^2 - (1-1)^2 = 2.1 - 1$$
$$2^2 - (2-1)^2 = 2.2 - 1$$
$$3^2 - (3-1)^2 = 2.3 - 1$$
$$4^2 - (4-1)^2 = 2.4 - 1$$
$$(n-1)^2 - (n-2)^2 = 2(n-1) - 1$$
$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

যোগ করিলে ঃ $n^2 = 2(1+2+3+ \cdots\cdots + n) - n$

$\therefore\ 1+2+3+ \cdots\cdots n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ প্রমাণিত।

আরোহী পদ্ধতির সুবিধা ঃ পদ্ধতিটি মনোবিজ্ঞান সম্মত। এটি সহজবোধ্য
সমস্যা সমাধানে 'কেন' ও 'কিভাবে' এই জাতীয় প্রশ্নের সহজ উত্তর পাওয়া যায়
এর প্রত্যেকটি ধাপ নির্ভুল, গণিতসম্মত ও যুক্তিযুক্ত। ছাত্ররা আবিষ্কারকের ভূমিক
গ্রহণ করতে পারে বলে যথেষ্ট সক্রিয় থাকে। পদ্ধতিটিতে বাস্তব ও প্রত্যক্ষ পর্যবেক্ষ
চিন্তন ও পরীক্ষণের ব্যবস্থা থাকে। পদ্ধতিতে মুখস্থ করণ ও গৃহকাজের বিশেষ চা
থাকে না এবং মানসিক ক্ষমতা উন্নত হয়।

অসুবিধা ঃ পদ্ধতিটি দীর্ঘ ও ক্লান্তিজনক। এর পরিসরও খুব সীমাবদ্ধ। কোন একটি সূত্র গঠন করলেই সেই অধ্যায়ের পাঠ শেষ হয়ে গেল না। অধ্যায়টি আয়ত্ত করতে হলে আরো অনেক অভ্যাস ও অনুশীলনের প্রয়োজন। এই পদ্ধতিতে উপনীত সিদ্ধান্তকে চরম সিদ্ধান্ত বলা যায় না। এর মধ্যে বেশ কিছুটা সম্ভাবনার প্রশ্ন থেকে যায়। পরীক্ষিত তথ্য যত বেশী হবে সম্ভাবনাও তত বৃদ্ধি পাবে। ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ"—এই সত্য আরোহী পদ্ধতিতে প্রমাণ করতে হলে ছাত্রদের বিভিন্ন জাতীয়, বিভিন্ন আকৃতির ও বিভিন্ন মাপের ত্রিভুজ এঁকে বা মডেল তৈরী করে কোনগুলি মাপ করতে হবে। এটি যত বেশী হবে, তত সে সত্যের কাছাকাছি যাবে। এইজন্য সময় অনেক বেশী লাগে। একটু উঁচু শ্রেণীতে পদ্ধতিটি খুব একটা কার্যকরী হয় না। অপ্রয়োজনীয় অংশ বা পুনরাবৃত্তির জন্য একঘেয়েমী আসা অসম্ভব নয়।

অবরোহী পদ্ধতি ঃ সুবিধা ঃ গণিতের পরিণত রূপ হ'ল অবরোহী। পদ্ধতিটি যুক্তি সম্মত এবং সংক্ষিপ্ত। পর্যবেক্ষণ বা গবেষণার ফল এই পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ করে রাখা হয়। আরোহী পদ্ধতি যদি আবিষ্কারকদের জন্য—অবরোহী তবে শিক্ষার্থীর জন্য। এতে সময় অনেক কম লাগে। মুখস্থ করতে হয় বলে স্মৃতি উন্নত হয়। অভ্যাসের জন্য পদ্ধতিটি খুব কার্যকরী। আরোহী পদ্ধতি এই পদ্ধতির সহায়তায় পূর্ণাঙ্গ রূপ গ্রহণ করে। পদ্ধতিটিতে সমস্যা সমাধানের দ্রুততা ও দক্ষতা বৃদ্ধি পায়।

অসুবিধা ঃ না বুঝে মুখস্থ করা এবং খুব বেশী জিনিস, সূত্র ইত্যাদি মুখস্থ করার ঝোঁক এই পদ্ধতিতে বেশী। মস্তিষ্কের উপর বেশী চাপ পড়ার সম্ভাবনা থাকে। এটি সাধারণতঃ বিমূর্ত্ত সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয় বলে বোঝা একটু কঠিন বিশেষতঃ যারা গণিত আরম্ভ করছে তাদের নিকট। যুক্তির চেয়ে স্মৃতির গুরুত্ব বেশী বলে কোন একটি ধাপ ভুলে গেলে সমাধান করা কঠিন মনে হয়। ছাত্ররা যথেষ্ট সক্রিয় হতে পারে না।

শিক্ষাগত মূল্যায়ন

গণিতে কোন নিয়ম তৈরী করতে হলে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করাই শ্রেয়ঃ। শিক্ষার্থী এই পদ্ধতি অনুসরণ করলে লাভবানই হয়। অবশ্য পূর্ব নির্ধারিত কোন সূত্রের সাহায্যে গণিতের সমস্যার সমাধান করা খুবই সংক্ষিপ্ত এবং সহজ ব্যাপার। ত্রিভুজের মধ্যমা কাকে বলে, তা জানতে গিয়ে যদি প্রতিবারই মধ্যমার সংখ্যামূলক পরিমাপ গ্রহণ করতে হয়, তবে খুবই অসুবিধা হয়। তার চেয়ে মধ্যমার সংজ্ঞা মুখস্থ করে রাখা অনেক সহজ। এইজন্যই শিক্ষক মহাশয়েরা অবরোহী পদ্ধতির আশ্রয় গ্রহণ করেন এবং পাঠ্যপুস্তকেও একই পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। ফলে আরোহী পদ্ধতি স্বাভাবিক ভাবেই অবহেলিত হয়।

আবার গণিতের মতো অমূর্ত্ত বিষয় শিক্ষা দেবার আগে মূর্ত্ত বিষয় সম্বন্ধে কিছু

জ্ঞান এবং কিছু বাস্তব অভিজ্ঞতারও প্রয়োজন। মূর্ত অভিজ্ঞতার ফলই হল অমূ
ভাব এবং বেশ কিছু সংখ্যক বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই অমূর্ত কোন সূত্র বা নি
গঠন করা সম্ভব।

তাছাড়া বিশুদ্ধ অবরোহী পদ্ধতির একটা বড় অসুবিধা আছে। বিভিন্ন ধরনে
সমস্যা সমাধানের জন্য বিভিন্ন জাতীয় সূত্র মুখস্থ রাখতে হয়। ফলে যদি ছাত্র কো
একটি সূত্র ভুলে যায়, তবে তার পক্ষে আর সমস্যার সমাধান করা সম্ভব হয় না। অব
এর অর্থ এই নয় যে, এ পদ্ধতি সব সময় পরিত্যাগ করতে হবে। এমন অনেক সময়
আছে যেখানে আরোহী পদ্ধতি অপেক্ষা অবরোহী পদ্ধতি অধিক কার্যকরী। কি
কোন সূত্র প্রথম গঠন করার সময় আরোহী পদ্ধতি অনুসরণ করাই শ্রেয়ঃ। প্রমাণি
তথ্যগুলির ক্ষেত্রে অবরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করা যেতে পারে।

এই প্রসঙ্গে কয়েকটি মূল্যবান নির্দেশনা মনে রাখলে ভালো হয়ঃ

☐ সুযোগ পেলেই আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করা উচিত।

☐ অবরোহী পদ্ধতি যদি ব্যবহার করতেই হয়, তবে তা আরোহী পদ্ধতি ব্যবহা
করার পর করা উচিত।

☐ একান্ত প্রয়োজন না হলে অবরোহী পদ্ধতি ব্যবহার করা চলবে না।

সাধারণতঃ বীজগণিত ও পাটীগণিতে "আরোহী-অবরোহী" পদ্ধতি অবলম্বন করা হ
একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

ধরা যাক ছাত্ররা $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, এই সূত্রটি জানতে চায়।

আরোহী পদ্ধতিতেঃ—

বিশেষ ঘটনাঃ-

$$\begin{array}{c} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+b^2+2ab \end{array} \qquad \begin{array}{c} l+m \\ l+m \\ \hline l^2+m^2+2lm \end{array}$$

সাধারণ সূত্রঃ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy.$

অবরোহী পদ্ধতিতেঃ—

প্রথমে ধরে নেওয়া হয় যে $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, অতঃপর এই সূত্রে
সাহায্যে আরো অন্যান্য সমস্যার সমাধান করে সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ করা হয়।

একটা প্রশ্ন কিন্তু থেকেই যায়। আরোহী পদ্ধতিতে এবং আরোহী পদ্ধতির যুক্তি
দ্বারা যে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়, সেই সিদ্ধান্তকে সব সময় সত্য বলে মেনে
নেওয়া যুক্তিযুক্ত হবে কিনা? এর উত্তরে বলা যেতে পারে যে আরোহী পদ্ধতি
যুক্তির সম্ভাব্যতা থেকে অবরোহী পদ্ধতির যুক্তির নিশ্চয়তাতে চলে যাওয়া যায়
আপাতদৃষ্টিতে যদিও মনে হয় গণিত অবরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারার উপরই প্রতিষ্ঠিত
তবুও আরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারারও গণিতে যথেষ্ট স্থান আছে। পরিশেষে একথা
বলা যেতে পারে যে, গণিতে নিশ্চিত ও অপরিবর্তনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হতে হলে
অবরোহী পদ্ধতির যুক্তিধারার উপর তা প্রতিষ্ঠিত করা দরকার।

আবিষ্কারকের পদ্ধতি (Heuristic Method)

Heuristic কথাটি এসেছে এমন একটি গ্রীক শব্দ থেকে (Heurises), যার অর্থ হল : আমি আবিষ্কার করি (I find out)। এই অর্থ থেকেই পদ্ধতির মূল কথাটি বোঝা যায়। সেটি হল, শিক্ষার্থীর মনোভাব হবে যেন সে আবিষ্কারকের স্থান নিয়েছে। সে স্বাধীনভাবে আবিষ্কার করবে। সে শ্রেণীতে কেবলমাত্র নিষ্ক্রিয় ও নীরব একজন শ্রোতা হয়ে থাকবে না। অভিজ্ঞতা ছাড়া জ্ঞানলাভ সম্পূর্ণ হয় না। জ্ঞান এবং তত্ত্ব দুটিকেই যদি মনে রাখতে হয় এবং ঠিকমত ব্যবহার করতে হয়, তবে সেগুলির সম্বন্ধে গভীরভাবে চিন্তা করতে হবে ও আত্মা দিয়ে সেগুলিকে উপলব্ধি করতে হবে। ছাত্রকে কেবলমাত্র সক্রিয় হলেই চলবে না, তার কাজের ও চিন্তাধারার ক্রমবিকাশের ফলে নতুন নতুন সমস্যার উদ্ভব হবে। আবিষ্কারক পদ্ধতির সাহায্যে নিষ্ক্রিয় দর্শক (ছাত্র) সক্রিয় অনুসন্ধানকারীতে পরিণত হয়। ডিউই-এর মতে "—Passivity is the opposite of thought ; it is not only a sign of failure to call judgement and personal understanding, but it also dulls curiosity, generates mind-wandering and causes learning to be a task instead of delight."

তবে এর অর্থ এই নয় যে শিক্ষক সবসময় নিষ্ক্রিয় থাকবেন। শিক্ষক বা শিক্ষয়িত্রী উপস্থিত থাকবেন এবং তিনি মৃদু হাস্যে, মিষ্ট কথায়, ছোট ছোট প্রশ্নের সাহায্যে শিক্ষার্থীকে আবিষ্কারে সাহায্য করবেন। যখনই প্রয়োজন, তখনই তিনি ছাত্রদের নির্দেশনা দেবেন। খুব সামান্য সাহায্য বা নির্দেশনার ফলে ছাত্রদের মনে হতাশা আসতে পারে। আবার খুব বেশী সাহায্য বা নির্দেশনার ফলে ছাত্রদের স্বাধীন চিন্তাধারাটি সম্পূর্ণ বিনষ্ট হয়ে যেতে পারে। শিক্ষকের কাজ সমস্যাটির সমাধান করা নয়, সমস্যা সমাধানের কার্যকরী পথটির নির্দেশ দেওয়া।

আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষার নিষ্ক্রিয় প্রকৃতির যথেষ্ট পরিবর্তন সাধিত হয়। 'অভ্যাসের ফলেই মানুষ সম্পূর্ণতা লাভ করে', বা 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষা' এই নীতিগুলি কেবলমাত্র শারীরিক ক্রিয়াকলাপের মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে না ; বুদ্ধিগত কাজের মধ্যে এই নীতিগুলি প্রতিফলিত হয়। ছাত্রকে স্বাধীনভাবে চিন্তা করতে শিক্ষা দেওয়াটাই যদি লক্ষ্য হয়, তবে কেমন করে চিন্তা করতে হয়, তাকে তা-ই শেখাতে হবে, চিন্তাধারার ফলটি তার হাতে তুলে দিলে চলবে না।

এই পদ্ধতিটি ঠিকমত দক্ষতার সঙ্গে প্রয়োগ করতে পারলে এটি গণিতের পদ্ধতি-গুলির মধ্যে সর্বশ্রেষ্ঠ বলে পরিগণিত হতে পারে। এতে কেবল ছাত্রদের স্বাধীনভাবে চিন্তা করার ক্ষমতাই জন্মায় না, তারা স্বাধীন ভাবে জ্ঞান অর্জনও করে থাকে। তাছাড়া এই পদ্ধতিতে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা বাস্তব ও বৈশিষ্ট্যপূর্ণ।

অন্যদিক থেকে বিচার করলে কিন্তু এই পদ্ধতিকে পৃথক কোন পদ্ধতি বলা যায় না। এটিকে একটি বিশেষ প্রয়োগ কৌশল (ঢঙ বা ভঙ্গী) বলা যেতে পারে। বলতে গেলে এই কৌশলটি সব পদ্ধতির মধ্যেই থাকা উচিত। যে পদ্ধতিতে ছাত্ররা

নিজেরা কিছু করে, কিছু চিন্তা করে বা কিছু আবিষ্কার করে, সেই পদ্ধতিতেই এ কৌশলটি অবলম্বন করা হচ্ছে বলা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে বিশ্লেষণ পদ্ধতিকে আবিষ্কারক পদ্ধতি বলা যেতে পারে। কিন্তু বিশ্লেষণ পদ্ধতির উদ্দেশ্যই হল বিশ্লে করা। নির্দেশনার ভার ও বিশ্লেষণের ভার শিক্ষক নিজেও নিতে পারেন। কি আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষক উপযুক্ত প্রশ্ন দ্বারা নির্দেশ দেবেন। সমাধানের পথ খুঁ বার করবে শিক্ষার্থী নিজে।

পদ্ধতিটি প্রথমে H. E. Armstrong বিজ্ঞান শিক্ষার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন কিন্তু কালক্রমে দেখা গেল অল্পবয়স্ক শিক্ষার্থীদের পক্ষে বিজ্ঞানে স্বাধীন আবিষ্কারক ভূমিকা গ্রহণ করাতে বিস্তর অসুবিধা আছে। অপরদিকে দেখা গেল গণিত-শিক্ষা ক্ষেত্রে পদ্ধতিটি অত্যন্ত কার্যকরী ও ফলপ্রদ। সেইজন্য গণিত শিক্ষণের ক্ষে পদ্ধতিটির মূল্য এত বেশী।

এখন পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধাগুলির কথা আলোচনা করা যাক :—

সুবিধা :—

১। ছাত্ররা স্বাধীনভাবে চিন্তা করে। সে এখানে নিষ্ক্রিয় দর্শক নয়, সক্রি আবিষ্কারক।

২। ছাত্ররা সম্যক ও বাস্তব জ্ঞান অর্জন করে।

৩। ছাত্ররা নিজেদের কাজে নিজেরাই আগ্রহ অনুভব করবে।

৪। শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীর ছাত্রদের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ রক্ষা করতে পারেন

৫। গৃহকাজের চাপ মোটেই থাকে না।

৬। যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা ফলদায়ক কারণ সেই জ্ঞানের অর্থ ছাত্র পরিপূর্ণভাবে উপলব্ধি করে।

৭। তত্ত্ব ও তথ্য সহজেই মনে রাখা যায়।

৮। এই পদ্ধতিতে ছাত্র স্বাধীন ও সক্রিয় আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করে।

৯। 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষা'র সব সুবিধাগুলিই এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায়।

১০। ছাত্র স্বচেষ্টাতে জ্ঞান অর্জন করে বলে প্রতি ক্ষেত্রে জ্ঞান বাস্তব ও বৈশিষ্ট্যপ হয়।

১১। পদ্ধতিটিকে সমস্ত পদ্ধতির মূলগত কৌশল বলা যেতে পারে।

১২। গণিত শিক্ষণের সমস্ত পদ্ধতির মধ্যে এই পদ্ধতিটিকেই সর্বশ্রেষ্ঠ বলা যে পারে। অবশ্য এর জন্য সুনির্দিষ্ট প্রয়োগকৌশল ও দক্ষ শিক্ষকের প্রয়োজন।

অসুবিধা :—

১। নূতন শিক্ষার্থীদের পক্ষে পদ্ধতিটি মোটেই সুবিধাজনক নয়।

২। বাস্তব ক্ষেত্রে দেখা যায়, এ পদ্ধতিতে সময় অনেক বেশী লাগে।

৩। শিক্ষকের পক্ষেও পদ্ধতিটি যথেষ্ট অসুবিধাজনক। বিশেষ ভাবে প্রস্তুত না হলে এ পদ্ধতিতে নির্দেশনা দেওয়া খুব শক্ত হয়ে পড়ে।

৪। নির্দেশনা বলতে যে কেবলমাত্র "চিন্তা কর," "মাথা খাটাও", এ সমস্ত নির্দেশ দেওয়া তা নয়। সমাধানের ঠিক পথটি খুঁজে নিতে সাহায্য করবে এই নির্দেশনা।

৫। সকল ছাত্রই যে নির্দেশনাগুলি সম্পূর্ণ ভাবে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে, তা নয়। প্রত্যেক ছাত্রই যে এক একজন দ্বিতীয় 'ইউক্লিড' হয়ে উঠবে—এ রকম আশা করা যায় না।

৬। এই পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট একটি পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করা চলে না।

৭। অনেক শিক্ষক তাঁর ছাত্রদের নিকট অনেক বেশী সক্রিয়তা প্রত্যাশা করেন, আবার অনেকে মোটেই তা করেন না। সেক্ষেত্রে তাঁদের নির্দেশনা ভিন্ন হতে বাধ্য।

৮। ছাত্ররা সব সময় যুক্তি দেখাতে পারে না। ফলে তাদের অগ্রগতি রুদ্ধ হয়ে যেতে পারে।

আবিষ্কারক পদ্ধতির একটি উদাহরণ।

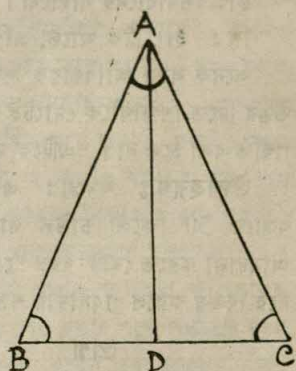
উদাঃ ১ সমস্যা ঃ ABC ত্রিভুজে AB বাহু=AC বাহু। ∠ABC ও ∠ACB কোণের সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হবে।

শিক্ষক ঃ ছবিটি আঁক। চোখে দেখে (মাপ না করে) ∠ABC ও ∠ACB কোণকে কি রকম বলে মনে হচ্ছে।

ছাত্র ঃ কোণ দুটি সমান বলে মনে হচ্ছে।

শি ঃ আচ্ছা, এবার মাপ করে দেখো তো।

ছা ঃ (মাপ করিয়া) কোণগুলি সমান।

শি ঃ আচ্ছা, এবার যুক্তিসঙ্গত প্রমাণ দাও। দুটি কোণ যে সমান তা কিভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে ?

ছা ঃ দুটি সর্বসম ত্রিভুজের কোণ হিসাবে দেখাতে পারলে।

শি ঃ কি করে দুটি সর্বসম ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে ?

ছা ঃ দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি যদি ত্রিভুজ দু'টিতে সমান হয়।

শি ঃ এ ক্ষেত্রে আমরা সে রকম ত্রিভুজ কি করে পেতে পারি ?

ছা ঃ ∠BAC কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে AB=AC, AD সাধারণ বাহু এবং ∠BAD=∠CAD অতএব ত্রিভুজ দুটি ABD ও ACD সর্বসম হওয়াতে ∠ABD=ACD বা ∠ABC=∠ACB

শিঃ হ্যাঁ ঠিক আছে। এবার প্রমাণটি লিখে দাও।

উদা : ২

সমস্যা :-কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 2 হয় এবং হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি 1 হয়। ভগ্নাংশটি কত ?

শি: বীজগণিতে অজানা ভগ্নাংশ কি ভাবে লেখা হয় ?

ছা : লব x ও y হর ধরলে ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ হবে।

শি : লবের সঙ্গে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটি কত হবে ?

ছা: ভগ্নাংশটি $\frac{x+7}{y}$ হবে।

শি: হরের থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি কত হবে ?

ছা: ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y-2}$ হবে।

শি : এই ভগ্নাংশগুলির মধ্যে কি সম্পর্ক আছে ?

ছা: $\frac{x+7}{y}=2$ এবং $\frac{x}{y-2}=1$

শি: এখন x ও y-এর মান কি ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে ?

ছা: সমাধানের সাহায্যে।

শি : হ্যাঁ, ঠিক আছে, এগিয়ে যাও।

অনেক সময় আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষক মহাশয় এমন সমস্ত প্রশ্ন করেন যার উত্তর দিতে শিক্ষার্থীকে মোটেই চিন্তা করতে হয় না। এ পদ্ধতিকে ঠিক আবিষ্কারকের পদ্ধতি বলা চলে না। এটিকে ভুল আবিষ্কারকের পদ্ধতি বলা হয়।

উদাহরণ : সমস্যা : একজন ব্যবসায়ী 20 বস্তা চাউল ক্রয় করে। প্রতি বস্তাতে 50 কিলো চাউল থাকে এবং প্রতি বস্তার ক্রয়মূল্য 30 টাকা। রেলে আমদানী করতে মোট খরচ পড়ে 400 টাকা। এখন প্রতি কিলো চাউল 1·50 টাকা দরে বিক্রয় করলে ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ হবে ?

প্রশ্ন	উত্তর
এক বস্তা চাউলের মূল্য কত ?	30 টাকা
মোট কত বস্তা চাউল কেনা হয় ?	20 বস্তা।
20 বস্তার মোট মূল্য কত ?	20×30 বা 600 টাকা।
অন্যান্য খরচ কত ?	400 টাকা
তা হলে মোট খরচ কত ?	$600+400=1000$ টাকা
এক বস্তাতে কত কিলো চাউল থাকে ?	50 কিলো।
কত বস্তা চাউল বিক্রি করা হবে ?	20 বস্তা
20 বস্তাতে কত চাউল থাকে ?	20×50 বা 1000 কিলো।

প্রশ্ন	উত্তর
এক কিলো চাউলের বিক্রয় মূল্য কত ?	1·50 টাকা
1000 কিলো চাউলের বিক্রয় মূল্য কত ?	1·50 × 1000 বা 1500 টাকা।
ক্রয়মূল্য ও অন্যান্য খরচ কত ছিল ?	1000 টাকা।
তাহলে মোট লাভ কত হয় ?	1500 – 1000 বা 500 টাকা।
1000 টাকাতে যদি 500 টাকা লাভ হয়, তবে 100 টাকাতে লাভ কত হয় ?	$\frac{500}{1000} \times 100$ বা 50 টাকা।
তাহলে শতকরা লাভ কত হল ?	লাভ 50%

পদ্ধতিটি অবলম্বনে সতর্কতা :

এই পদ্ধতিতে পড়াতে হলে আগে শিক্ষককে পদ্ধতিটি আয়ত্ত করে নিতে হবে। এই পদ্ধতির অর্থ এই নয় যে শিক্ষা পুস্তকবিহীন হবে। প্রথমে শিক্ষক কখনও বই-এর ব্যবহার ছাড়বেন না। তিনি নিজের মনে আগে আবিষ্কারকের ভাবটি ফুটিয়ে তুলবেন। ছাত্রদের সাহায্য করা হবে উপযুক্ত প্রশ্ন বা নির্দেশের মাধ্যমে। কখনও কখনও সমাধানের কোন একটি প্রত্যক্ষ স্তর বলে দেওয়া যেতে পারে। ছাত্র নিজে যা আবিষ্কার করতে পারবে তা বলে দেবার কোন প্রয়োজন নেই। একেবারে সোজাসুজি প্রশ্ন (অর্থাৎ যা সমস্যার সমাধানটিকে যান্ত্রিক করে তুলতে পারে) করা চলবে না। চিন্তা-উদ্দীপক প্রশ্ন করতে হবে। আবার এ কথাও মনে রাখতে হবে যে শিক্ষক মহাশয় যদি খুব কম সাহায্য করেন তবে ছাত্ররা নিরুৎসাহ হয়ে পড়বে। আবার খুব বেশী সাহায্য করলে তারা এই পদ্ধতির মর্ম অনুভব করতে পারবে না।

বক্তৃতা পদ্ধতি (Lecture Method) : বক্তৃতা পদ্ধতি অনেকটা আবিষ্কারক পদ্ধতির ঠিক বিপরীত। কম সময়ের মধ্যে পাঠক্রম শেষ করার পক্ষে পদ্ধতিটি খুবই কার্যকরী। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক সক্রিয় অংশ গ্রহণ করেন এবং ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় দর্শকের ভূমিকা গ্রহণ করে। পাঠের বিষয়বস্তুটি শিক্ষক মহাশয় বক্তৃতার মাধ্যমে প্রকাশ করেন। তবে গণিত শিক্ষাদানে কেবলমাত্র বক্তৃতার সাহায্যে উপজীব্য বিষয়টি উপস্থাপন করা খুবই শক্ত। তবুও এমন বহু শিক্ষক দেখা যায় যাঁরা বক্তৃতা পদ্ধতির সাহায্যে গণিতের পাঠ দিয়ে যাচ্ছেন। এঁরা মাঝে মাঝে অবশ্য ব্ল্যাকবোর্ড ব্যবহার করেন, তবে তা প্রয়োজনের তুলনায় অকিঞ্চিৎকর। যাই হোক, পদ্ধতিটির সুবিধা এবং অসুবিধা দুই-ই আছে। সেগুলি এবার আলোচনা করা যাক :—

সুবিধা : (১) কম সময়ে বিষয়বস্তুর অনেকখানি উপস্থাপিত করা সম্ভব।

(২) ছাত্রসংখ্যা অনেক বেশী হলে ব্যক্তিগত মনোযোগ দেওয়া সম্পূর্ণ অসম্ভব হয়ে পড়ে। সেখানে বক্তৃতা পদ্ধতি ব্যবহার করলে সুফল পাওয়া যেতে পারে।

(৩) শিক্ষকের কাজ খুব সহজ হয়। এই পদ্ধতিতে কোন ছাত্রকে প্রশ্ন জিজ্ঞা করার কোন সুযোগই দেওয়া হয় না। কাজেই শিক্ষকের চিন্তাধারা বা বক্তৃতা কো প্রকারে বাধা প্রাপ্ত হয় না।

(৪) ছাত্রদের 'যুক্তি বা বিচার শক্তি' প্রয়োগ করার কোন প্রয়োজনই হয় না শিক্ষক সব কিছু ব্যাখ্যা করে দেন। কাজেই ছাত্ররা শিক্ষকের কাছ থেকে "তৈ জিনিস" পায় বলে তাদের উপর কোন চাপও পড়ে না।

(৫) পদ্ধতিটি সহজ, সংক্ষিপ্ত ও আকর্ষণীয়।

(৬) শিক্ষক এবং ছাত্র উভয়ের মধ্যেই একটা পরিতৃপ্তির ভাব থাকে। শিক্ষ মহাশয় ভাবেন, তিনি সব বুঝিয়ে দিয়েছেন; আর ছাত্র ভাবে, সে সব কিছু বু ফেলেছে।

(৭) শ্রেণীর জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক স্বচ্ছন্দে ব্যবহার করা যেতে পারে।

অবশ্য এই সমস্ত সুবিধা কোন কলা-বিষয় (Arts Subject) পড়ানোর কা পুরোপুরি পাওয়া সম্ভব। বিজ্ঞান বিষয় বিশেষতঃ গণিত শিক্ষণে ততটা সম্ভব হয় না।

অসুবিধা :

(১) গণিত এমন একটি বিষয় যেখানে একাগ্র মনোযোগের প্রয়োজন। কিন্তু এ পদ্ধতিতে মনোযোগ বিক্ষিপ্ত হতে পারে।

(২) গণিতের ভাবধারা খুব দৃঢ় সংবদ্ধ। নীরস বক্তৃতার ফলে এই ভাবধারা প্রবাহ বিচ্ছিন্ন হলে বিষয়টি সম্বন্ধে আগ্রহ নষ্ট হয়ে যায়।

(৩) বক্তৃতাতে একটি ভাবের পর আর একটি ভাব খুব দ্রুত আসে। ফলে এ সকল অংশ সকলের পক্ষে সমানভাবে গ্রহণযোগ্য হয় না। তা ছাড়া এতে বাড়ী কাজের চাপ খুবই বেশী পড়ে।

(৪) স্কুলে নিম্নশ্রেণীতে এই পদ্ধতি মোটেই কার্যকরী নয়। বিশ্ববিদ্যালয় স্ত পদ্ধতিটি কিছু পরিমাণে কার্যকরী হতে পারে।

(৫) ব্ল্যাকবোর্ডের ব্যবহার এই পদ্ধতিতে খুবই কম। কিন্তু যে কোন শিক্ষ পদ্ধতিতে ব্ল্যাকবোর্ডের ব্যবহার অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

(৬) প্রশ্নোত্তরের কোন সুযোগ না থাকায় শিক্ষক ও ছাত্রের মধ্যে প্রত্যক্ষ সম্প থাকে না। ফলে শিক্ষক মহাশয়ও বুঝতে পারেন না কতজন ছাত্র তাঁকে অনুস করতে পারছে আর কতজনই বা পারছে না।

(৭) কেবলমাত্র বক্তৃতার সাহায্যে গণিতের মত দুরূহ ও আপাত নীরস বিষ ছাত্রদের নিকট বোধগম্য করা যায় না। প্রশ্নোত্তর, উদাহরণ (বাস্তব), ব্ল্যাকবোর্ ব্যাপক ব্যবহার—ইত্যাদিও কম গুরুত্বপূর্ণ নয়।

(৮) পদ্ধতিটিতে স্বাধীন চিন্তার কোন স্থান নেই।

(৯) ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগতভাবে মনোযোগ দেওয়া সম্ভব নয়।

(১০) পরীক্ষামূলক দিকটি এ পদ্ধতিতে সম্পূর্ণরূপে অবহেলিত হয়।

(১১) বাড়ীর কাজের পরিমাণ ও চাপ অত্যন্ত বেশী।

আবিষ্কারক পদ্ধতি ও বক্তৃতা পদ্ধতির তুলনা :—

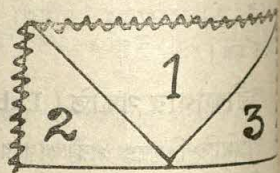
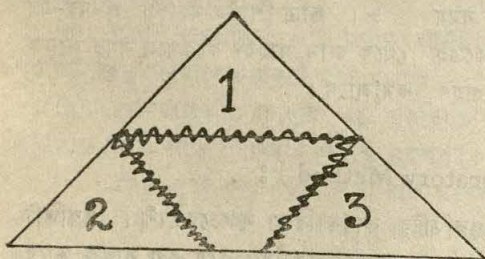
আবিষ্কারক পদ্ধতি	বক্তৃতা পদ্ধতি
১। ছাত্ররা বিষয়টি সম্যকভাবে উপলব্ধি করে।	১। শিক্ষক মহাশয়ের বক্তব্য ছাত্ররা কতদূর উপলব্ধি করে তা সঠিক বোঝা যায় না।
২। স্বাধীন চিন্তার যথেষ্ট সুযোগ আছে।	২। ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় শ্রোতা, সুতরাং স্বাধীন চিন্তার কোন সুযোগই নেই।
৩। ছাত্রদের আগ্রহ ও শেখার ইচ্ছা খুবই প্রবল।	৩। ছাত্ররা বিরক্ত হয় বলে আগ্রহও কমে যায়।
৪। ছাত্ররা যা আবিষ্কার করে, তা সহজে ভুলে যায় না।	৪। ছাত্ররা যা শোনে, তা সহজে ভুলে যায়।
৫। শিক্ষককে বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হতে হয় বলে এই পদ্ধতি সকল শিক্ষক সমান ভাবে প্রয়োগ করতে পারেন না।	৫। শিক্ষকের বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হবার কোন প্রয়োজন হয় না। এই পদ্ধতিতে শিক্ষক খুব সহজভাবে অগ্রসর হতে পারেন।
৬। শিক্ষক মহাশয় পাঠ্যপুস্তক ঠিকভাবে অনুসরণ করতে পারেন না।	৬। পাঠ্যপুস্তকটি সঠিকভাবে অনুসরণ করা সম্ভব।
৭। ছাত্রদের যুক্তি ও বিচার-শক্তি যথাযথ বিকশিত হয় না বলে কম বয়সে এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা চলে না।	৭। ছাত্রদের যুক্তি ও বিচারশক্তি মোটেই প্রয়োগ করতে হয় না বলে যে কোন বয়সেই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করা যেতে পারে।
৮। পদ্ধতিটির প্রয়োগে সময় অনেক বেশী লাগে। প্রতি ক্ষেত্রেই ছাত্রকে আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করতে হয়।	৮। ছাত্র শিক্ষক মহাশয় ও বই-এর থেকে জ্ঞান আহরণ করে বলে সময় অনেক কম লাগে।

পরীক্ষাগার পদ্ধতি (Laboratory Method) :

জ্যামিতি-শিক্ষণে পরীক্ষাগার পদ্ধতিটির কার্যকারিতা সবচেয়ে বেশী। পদ্ধতিটি বিষয়টির অমূর্ত ভাবটি দূর করে জ্ঞানকে বাস্তবে রূপায়িত করে এবং সার্থক ভাবে জ্ঞানের প্রয়োগে সাহায্য করে। এতেও ছাত্র নিজে আবিষ্কারকের ভূমিকা অবলম্বন করে। সরলরেখা, কোণ, ক্ষেত্রফল, ঘনফল প্রভৃতি সম্বন্ধে সে জ্ঞান আহরণ করে বাস্তব কাজের মাধ্যমে, যেমন—ওজন করা, পরিমাপ করা, কাগজ কাটা, কাগজ ভাঁজ করা, কাদার মডেল তৈরী করা প্রভৃতি।

গণিতের তথ্য আবিষ্কার করার কাজে পদ্ধতিটি যথেষ্ট উৎসাহ দান করে। এই পদ্ধতিতে বক্তৃতা পদ্ধতির অসুবিধাগুলি দূর করার চেষ্টা করা হয়েছে। আবিষ্কার এবং কাজের মাধ্যমে জ্ঞান অর্জন (Learning by doing) এই দুটির উপর বেশী জোর

দেওয়া হয়। মূর্ত জিনিস থেকে অমূর্ত ধারণায় উপনীত হওয়া এবং কাজের মাধ্য শিক্ষালাভ করা এই দুটি মূলতত্ত্বের উপর পদ্ধতিটি প্রতিষ্ঠিত। ছাত্ররা নিজেরা পরী গুলি (Experiments) পরিচালনা করে। এই পরীক্ষণের সাহায্যেই সে গণি বিভিন্ন তত্ত্বের ও তথ্যের প্রমাণ পায়, গণিতের বিভিন্ন অংশের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় কর উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে ছাত্রকে বৃত্তের ব্যাস ও ক্ষেত্রফলের সম্বন্ধ নির্ণয় কর হবে। সে ক্ষেত্রে ছাত্রকে কার্ডবোর্ডের অনেকগুলি বৃত্ত কাটতে হবে। তারপ বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল ও ব্যাস মাপ করে সম্বন্ধটি নির্ণয় করতে হবে। ক্ষেত্রফল বি ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে। একক ক্ষেত্রফলের ওজনের সাহায্যে সমগ্র বৃত্ত ওজন থেকে ক্ষেত্রফলটি পাওয়া যেতে পারে। ওজন ও ব্যাস তুলনা করার পর নিজের থেকেই ক্ষেত্রফল $=\frac{22}{7}$ (ব্যাসার্দ্ধ)^2 এই সম্বন্ধটি নির্ণয় করতে পার অনুরূপ ভাবে কার্ডবোর্ড-মডেল কেটে ও ওজন করে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্র করা যায়।

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ তা প্রমাণ করার সময় ছাত্র বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজের কোণগুলি পরিমাপ করতে হবে এবং তারপর দেখতে সেগুলির মধ্যে কোন সম্বন্ধ আছে কিনা! বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজের কোণগু পরিমাপ করতে করতে সে একসময় আপনা আপনি সত্যটি খুজে পাবে। তার বিভিন্ন পরীক্ষণের সাহায্যে সে এই সত্যতা প্রমাণ করতে পারে। একটি কাগজে ত্রিভুজের কোণ তিনটি ছিড়ে নিয়ে পাশাপাশি রেখে রেখে দেখতে হবে সেগুলি থে একটি সরলকোণ পাওয়া যাচ্ছে কিনা? কোণগুলি ভাঁজ করেও সরলকোণ পাও যেতে পারে।

এই ভাবে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, তা মূর্ত ও সহজবোধ্য হয়। পরীক্ষণ স্তরের যুক্তিযুক্ত প্রমাণ আরো পরিষ্কার হয়।

এই পদ্ধতির সাফল্যের জন্য বিভিন্ন যন্ত্রপাতি সমন্বিত গণিতের একটি পরীক্ষা প্রয়োজন। এই পরীক্ষাগারে গণিতের ছবি আকার যন্ত্রপাতি, মিটার স্কেল, মা করার চেন ইত্যাদি, দাঁড়িপাল্লা, কার্ডবোর্ডের বিভিন্ন মডেল, চার্ট, সেক্সট্যান্ট, কাঁ বিভিন্ন রং, কপিকল, লিভার প্রভৃতি থাকা প্রয়োজন।

এবার পদ্ধতিটির সুবিধা-অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক :—

সুবিধা :—

১। পদ্ধতিটি মনস্তাত্ত্বিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। এতে মূর্ত জিনিস থেকে অমূর্ত ধারণাতে উপনীত হওয়া যায়।

২। পদ্ধতিটি খুবই চিত্তাকর্ষক ও হৃদয়গ্রাহী।

৩। 'কাজের মাধ্যমে শিক্ষা'-এই মতবাদটির উপরও বেশ জোর দেওয়া হয়।

৪। গণিতের ব্যবহারিক দিকটির উপর বেশ গুরুত্ব আরোপ করা হয়।

৫। ছাত্রদের পরিষ্কার ধারণা জন্মানোর কাজে পদ্ধতিটি যথেষ্ট সহায়তা করে।

অসুবিধা ঃ—

১। কেবলমাত্র পরীক্ষার সাহায্যে ছাত্র অনেক তথ্য প্রমাণ করতে পারে না।

২। গণিতের সকল অধ্যায়কে পরীক্ষণের আওতায় আনা যায় না।

৩। বেশ বড় ক্লাসে পদ্ধতিটি সার্থকভাবে কার্যকরী হয় না, কারণ পরীক্ষণে প্রত্যেক ছাত্রের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে হয়।

৪। উন্নতির হার অত্যন্ত কম।

৫। অনেক সময় পদ্ধতিটির মর্ম উপলব্ধি না করে ছাত্র এটিকে একরকম 'চাপিয়ে দেওয়া কাজের বোঝা' বলে মনে করে।

৬। পরীক্ষণ ও অনুসিদ্ধান্তই গণিতের শেষ কথা নয়। এর সাহায্যে ছাত্র গণিতের তথ্যের সঙ্গে পরিচিত হয়, কিন্তু গণিতের যুক্তি ও চিন্তাধারার সঙ্গে তার পরিচয় হয় না।

৭। অধিকাংশ স্কুলই অর্থাভাবে গণিতের পরীক্ষাগার তৈরী করতে পারে না।

পদ্ধতিটি যে লক্ষ্যে পৌছানোর একটি উপায়মাত্র এ কথাটা মাঝে মাঝে শিক্ষক মহাশয় ভুলে যান। ফলে পদ্ধতিটি নিজেই লক্ষ্যে পরিণত হয়। তাছাড়া অনেক সময় পরীক্ষণে কিছু ভুল-ত্রুটি বা অসঙ্গতি দেখা যেতে পারে যেগুলির যথাযথ ব্যাখ্যা দেওয়া হয় না। শিক্ষক মহাশয়কে এগুলির প্রতি সতর্ক দৃষ্টি দিতে হবে। যেখানে অবরোহী পদ্ধতির সাহায্যে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারা যায়, সেখানে পরীক্ষণ পদ্ধতি প্রয়োগ করার কোন সার্থকতা নেই। এ ব্যাপারে শিক্ষক মহাশয়কে যথোপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে। যেখানে এই পদ্ধতিটি সবচেয়ে বেশী কার্যকরী— সেখানেই এটি ব্যবহার করতে হবে। অন্যথায় পরিশ্রমের ও সময়ের অপব্যবহার হবে।

ঐতিহাসিক পদ্ধতি (Historical Method)—অনেক শিক্ষক ও শিক্ষাবিদ এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করার পক্ষপাতী। তাঁরা স্বীকৃত মতামতগুলির শিক্ষণের উপর খুব জোর দেন না। অপর পক্ষে তাঁরা বিভিন্ন আবিষ্কারক ও পর্যবেক্ষক কিভাবে বিভিন্ন যুগে ও বিভিন্ন দেশে গণিতের নূতন নূতন তথ্য আবিষ্কার করেছেন তার

শিক্ষণের উপরই বেশী জোর দেন। অবশ্য এই পদ্ধতিতে গণিতে আগ্রহ বাড়া যায় ঠিকই, কিন্তু নূতন জিনিস শেখানো যায় না। আর এতে পাঠোন্নতির গতি খু মন্থর। অনেক সময় অনেকটা পণ্ডশ্রমও করতে হয় এ পদ্ধতিতে। উঁচু ক্লাসে পদ্ধ ঠিকমত কার্যকরী নয়। খুব নীচু ক্লাসে অবশ্য পদ্ধতিটি অনেকাংশে কার্যকরী হ আর গণিতে আগ্রহ বাড়াবার জন্য গণিতের ক্রমোন্নতির ইতিহাসও ছাত্রদের জা প্রয়োজন।

একরোখা পদ্ধতি (Dogmatic Method)—এটি আসলে কিন্তু কো পদ্ধতিই নয়। যে কোন ভুল পদ্ধতিকেই একরোখা পদ্ধতি বলা যেতে পারে। য এটিকে পদ্ধতি হিসাবে ধরাও হয়, তবে বলতে হবে এটি একটি খারাপ পদ্ধতি। এ পদ্ধতিতে ছাত্রকে কি করতে হবে, কি লক্ষ্য করতে হবে বা কোন্ সিদ্ধান্তে উপনী হতে হবে, তা শিক্ষক মহাশয় বলে দেন। যখন শিক্ষক মহাশয় কাঠিন্যের আশ্রয় নে বা কঠোর নিয়মমাফিক কাজ করে যান, তখনই তিনি একরোখা পদ্ধতি অবলম করেছেন এ কথা বলা যেতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, কোন এক সম্পাদ্য বা উপপাদ্যের প্রতিটি স্তর নির্ভুলভাবে মুখস্থ করতে বলা—একরোখা পদ্ধতি উদাহরণ। এতে নির্ভুলতাকে অন্ধ ও যান্ত্রিকভাবে অনুসরণ করতে বলা হয়। তেম গণিতে নির্ভুল ভাষা ব্যবহার করা ও বানান শুদ্ধ লিখতে বলাও কঠোর নিয়মা বর্তিতার পর্যায়ে পড়ে। গণিতে হিসাব-নিকাশের উপরই বেশী জোর দেওয়া উচিৎ গণিতের সমস্যার সমাধান বিভিন্ন ভাবে করা যেতে পারে। কিন্তু সমাধানের কা কোন একটি বিশেষ প্রক্রিয়ার উপর জোর দিলে একরোখা পদ্ধতি ব্যবহার করা হ বলা যেতে পারে।

যারা গণিতে একরোখা পদ্ধতির সমর্থক, তাঁরা বলেন—গণিত শিক্ষার মূল উদ্দে হচ্ছে নির্ভুল উত্তরে উপনীত হওয়া এবং এই লক্ষ্য থেকে বিচ্যুত হলে গণিত শিক্ষা মূল উদ্দেশ্যটি নষ্ট হয়ে যায়। এর ফলে চিন্তাধারার মধ্যেও আবিলতা ও অস্পষ্ট আসতে পারে। অনেক শিক্ষক গণিতে অকৃতকার্যতার কারণ হিসাবে কঠো নিয়মানুবর্তিতার অভাবকেই দায়ী করেন। তাঁরা বলেন, গণিতে ছাত্রদের দুর্বল দূর করা সম্ভব যদি ছাত্ররা কঠোর মনোনিবেশ সহকারে গণিত পড়ে, এবং প্রয়োজ হলে মুখস্থ করে। আবার অনেক মডেল পর্যবেক্ষণ করেও তাঁরা গণিত শাস্ত্রটি সম্য ভাবে উপলব্ধি করতে পারে এবং গাণিতিক কাজে আগ্রহ বোধ করে।

এবার পদ্ধতিটির সুবিধা-অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক—

সুবিধা :—

১। পদ্ধতিটিতে জ্ঞান সম্পূর্ণ ও খাঁটি হয়।

২। ছাত্ররা সঠিক ও নির্ভুল চিন্তা করতে শেখে।

৩। সত্য সম্বন্ধে একটা শ্রদ্ধার ভাব ছাত্রদের মনে আসে। তারা অত্যন্ত দ্রু কোন সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে না।

অসুবিধা :—

১। যান্ত্রিক ভাবে পড়া বা মুখস্থ করাতে ছাত্রদিগকে উৎসাহী করা হয়।

২। কাঠোর নিয়মানুবর্তিতা শেখাতে গিয়ে ছাত্রদিগকে পাঠ্যপুস্তকের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে জড়িয়ে ফেলা হয়।

৩। ছাত্রের বিচার ও যুক্তিশক্তি পরিপূর্ণভাবে বিকাশ লাভ করে না। তারা সঠিক চিন্তন করে না। আসলে অপরের দেওয়া চিন্তাধারা স্মরণ করে মাত্র।

৪। ছাত্ররা গণিতে আগ্রহ হারিয়ে ফেলে এবং গণিত সম্বন্ধে একটি ভুল ধারণা গড়ে তোলে।

৫। মাধ্যমিক স্কুলে কঠোর নিয়মানুবর্তিতা পুরোপুরি সমর্থনযোগ্য নয়।

নির্দেশমূলক পদ্ধতি (Assignment method)—বক্তৃতা পদ্ধতিতে কেবলমাত্র বক্তৃতার মাধ্যমে নূতন পাঠ শিক্ষা দেওয়া হয়। অর্থাৎ তা পুরোপুরি তত্ত্বগত (Theoretical)। আবার আবিষ্কারক পদ্ধতিকে বলা যেতে পারে ব্যবহারিক (Practical)। নির্দেশমূলক পদ্ধতি তত্ত্বগত ও ব্যবহারিক এই উভয় প্রক্রিয়ার সংশ্লেষণে উদ্ভূত নূতন একটি পদ্ধতি। এখানে যেমন শিক্ষকের দিক থেকে নির্দেশ দেওয়া হয়, তেমনি শিক্ষার্থীকেও হাতে কলমে কাজ করার যথেষ্ট সুযোগ দেওয়া হয়। অর্থাৎ পাঠের কিছু অংশ থাকবে শিক্ষকের প্রত্যক্ষ কর্তৃত্বাধীনে আর কিছুটা অংশে শিক্ষার্থীকে যথেষ্ট স্বাধীনতা দেওয়া হয়।

নির্দিষ্ট পাঠক্রমটিকে পরস্পর সংযুক্ত কয়েকটি অংশে ভাগ করা হয়। প্রতি সপ্তাহে এই রকম এক একটি পাঠ্যাংশ সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের নির্দেশ দেওয়া হয়। পাঠ্যাংশটি নির্বাচন করার পর সেই সম্বন্ধে বিভিন্ন নির্দেশ হয় ছাপিয়ে, নয়তো সাইক্লোস্টাইল করে ছাত্রদের মধ্যে বিতরণ করা হয়। নির্দেশনাতে কি করতে হবে, কোন্ বইয়ের কত পৃষ্ঠা পড়তে হবে সে সম্বন্ধেও নির্দেশ দেওয়া থাকে। পাঠ্যাংশে কোন কঠিন অংশে ছাত্রদের অসুবিধা হবার সম্ভাবনা থাকলে সেই অংশ সম্বন্ধে বিশেষ নির্দেশনাও দেওয়া হয়ে থাকে। নির্দেশনা পত্রে কয়েকটি প্রশ্নও দেওয়া থাকে। ছাত্র সেগুলির উত্তর লিখে প্রয়োজনীয় সংশোধনের জন্য উত্তর পত্রটি শিক্ষকের নিকট জমা দেয়। এই পদ্ধতিতে ছাত্ররা নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী কাজ করে যায়। শিক্ষক কেবলমাত্র তাদের কিঞ্চিৎ সাহায্য করেন এবং প্রয়োজনমত নির্দেশ দিয়ে থাকেন। সাধারণ অসুবিধাগুলি তিনি শ্রেণীকক্ষেই আলোচনা করে দেন। ছাত্র একটি নির্দেশনার কাজ সম্পূর্ণ করলে তবেই তাকে নূতন নির্দেশ পত্র দেওয়া হয়। এই এই পদ্ধতিতে ছাত্র নিজ ক্ষমতা এবং বুদ্ধি অনুযায়ী অগ্রসর হয়। পদার্থবিদ্যা-রসায়ন বিদ্যা প্রভৃতি বিষয়ের পাঠে এই পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকরী। নির্দেশনার প্রথম অংশে তত্ত্ব (Theory) সম্বন্ধে আলোচনা করা হয় এবং দ্বিতীয় অংশে লব্ধ জ্ঞানের ব্যবহারিক (Practical) প্রয়োগ হয়।

এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করার সময় কয়েকটি বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে।

১। নির্দেশগুলি যেন একটি মাত্র পাঠ্যপুস্তক থেকে দেওয়া হয়।

২। নির্দেশপত্রে পাঠ্যপুস্তকের কোন্ কোন্ অংশ পড়তে হবে, সে বিষয়ে পরিষ্কার ইঙ্গিত থাকা বাঞ্ছনীয়। বিশেষ বিশেষ অংশগুলিতে মনোযোগ দেবার নির্দেশ এবং কঠিন অংশগুলির ব্যাখ্যাও নির্দেশনাপত্রে থাকবে।

৩। পঠিতব্য অংশগুলি ছাত্র পড়েছে কিনা বা সে সম্বন্ধে তাদের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয়েছে কিনা তা জানার জন্য নির্দেশপত্রে কয়েকটি প্রশ্ন থাকা প্রয়োজনীয়।

৪। অতিরিক্ত পাঠের জন্য আর কোনও বই বা বইয়ের কোন অংশ পড়তে হলে সে সম্বন্ধেও নির্দেশ দেওয়া থাকবে নির্দেশনা পত্রে।

৫। ব্যবহারিক কাজ কি ভাবে করতে হবে সে বিষয়েও নির্দেশ থাকা উচিত। এবার পদ্ধতিটির সুবিধা-অসুবিধার কথা আলোচনা করা যাক।

সুবিধা :—

(১) শিক্ষণ-প্রক্রিয়াতে ছাত্র আর নিষ্ক্রিয় হতে থাকতে পারে না। সমস্ত কাজের ভারই তার উপর ন্যস্ত হয় বলে তাকে সক্রিয় হয়ে উঠতেই হয়।

(২) বিভিন্ন বই পাঠ করার এবং বিভিন্ন বিষয় সম্বন্ধে আলোচনা করার একটা অভ্যাস ছাত্রদের মধ্যে অর্জিত হয়ে যায়।

(৩) প্রত্যেক ছাত্র নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠে অগ্রসর হতে পারে।

(৪) বিজ্ঞানসম্মত গবেষণার স্পৃহা এই পদ্ধতিতে উজ্জীবিত হয়।

(৫) ছাত্রদের আত্ম-বিশ্বাস এবং আত্মনির্ভরতার ক্ষমতা বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়।

(৬) তত্ত্বগত জ্ঞানও যে বাস্তব জ্ঞান অর্থাৎ তারও একটা ব্যবহারিক প্রয়োগমূলক দিক আছে এ কথাটা ছাত্ররা উপলব্ধি করতে শেখে।

অসুবিধা :—

(১) নির্দেশনাপত্রটি ভাষামূলক হওয়াতে সকলের পক্ষে এ'টি সহজবোধ্য হয় না।

(২) ভালো নির্দেশনা পত্র প্রস্তুত করা যথেষ্ট সময় সাপেক্ষ এবং কষ্টকর।

(৩) অন্যান্য পদ্ধতির তুলনায় এই পদ্ধতিতে কোন একটি পাঠ শেষ করতে বেশী সময় লাগে।

(৪) শিক্ষকের কাজের চাপ যথেষ্ট বাড়ে। নির্দেশনাপত্র তৈরী করা ও সংশোধন করা এই সমস্ত কাজে যথেষ্ট সময়ের প্রয়োজন।

(৫) ছাত্ররা কোন একটি উত্তরপত্র দেখে নকল করতে পারে। নির্দেশনাপত্রগুলি এক রকম হওয়ার জন্য এ সম্ভাবনা কিন্তু থেকেই যায়।

(৬) পদ্ধতিটির সুষ্ঠু রূপায়ণের জন্য উত্তম পরীক্ষাগার ও পাঠাগার থাকা প্রয়োজন।

(৭) উপযুক্ত শিক্ষক ছাড়া পদ্ধতিটি ঠিকমত কার্যকরী হয় না।

(৮) ভালো পাঠ্যপুস্তকের যথেষ্ট অভাব আছে। আর একটিমাত্র পাঠ্যপুস্তক থেকে নির্দেশনাপত্রে যথেষ্ট সংখ্যক প্রশ্ন দেওয়া সম্ভব হয় না।

তা হলেও বলা যায় অন্যান্য অনেক পদ্ধতির তুলনায় এই পদ্ধতি অনেক বেশী মাত্রায় কার্যকরী। পদ্ধতিটির মূল কথাই হল বিজ্ঞানসম্মত গবেষণা। এই গবেষণার ভাবটি ছাত্রদের মনে জাগিয়ে তুলতে পারলেই পদ্ধতির কাজ অনেকাংশে সফল হবে।

এবার আসা যাক কয়েকটি প্রণালীর (Mode) আলোচনায়।

পরীক্ষা প্রণালী (Examination Mode) : বিদ্যালয়ে দৈনন্দিন পাঠদানের পর ছাত্রদের কিছু গৃহকাজ দেওয়া হয়ে থাকে। নির্দিষ্ট সময়ান্তে শিক্ষক ছাত্রদের শ্রেণীকক্ষে পরীক্ষা নেন। এই পরীক্ষাতে সাফল্য অর্জনের জন্য ছাত্ররা মনোযোগ সহকারে গৃহকাজ করে ও পড়াশোনায় মন দেয়। এটিকে পরীক্ষা প্রণালী বলা হয়। তবে এতে প্রকৃত জ্ঞান অর্জনের চেয়ে মুখস্থকরণের উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়।

আবৃত্তি প্রণালী (Recitation Mode) : এটি গণিতে ততটা কার্যকরী হয় না। এটি পরীক্ষা প্রণালীর একটি পরিবর্তিত রূপ। ছাত্রদের গৃহকাজ হিসাবে যা বাড়ীতে তৈরী করে আনতে দেওয়া হয় শ্রেণী কক্ষে তাই আবৃত্তি করতে বলা হয়। এতে শিক্ষক ছাত্রদের বিষয়বস্তুর উপলব্ধিতে সাহায্য করেন।

বক্তৃতা প্রণালী (Lecture Mode) : এতে শিক্ষক শ্রেণীকক্ষে বিষয়বস্তুটি উপস্থাপন করেন বক্তৃতার মাধ্যমে। ছাত্ররা যেটুকু দরকার মনে করে তা লিখে নেয়। পরে অন্য কোন প্রাসঙ্গিক বই থেকে বা স্মৃতির সহায়তায় নোটটি পূর্ণভাবে লিখে পাঠ তৈরী করে। তবে এটি কলেজে উঁচু শ্রেণীতে সম্ভব, স্কুলের নীচু শ্রেণীতে সম্ভব নয়।

ব্যক্তিগত প্রণালী (Individual Mode) : একই শ্রেণীতে সব ছাত্র সমান নয় তাদের মধ্যে বিভিন্ন ধর্মী পার্থক্য বিদ্যমান। ব্যক্তিগত প্রণালী এই ব্যক্তিগত বৈষম্যের নীতির উপর প্রতিষ্ঠিত। এই প্রণালীতে প্রত্যেক ছাত্রের নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী এগিয়ে যাওয়ার চেষ্টা করা হয়। যেহেতু গণিতে সব কিছু ভালো ভাবে উপলব্ধি করার উপর নির্ভর করে, সেইজন্য এই প্রণালীটি গণিত শিখনে অত্যন্ত উপযুক্ত।

দলগত প্রণালী (Genetic Mode) : এই প্রণালীতে সমস্ত ছাত্রকে একই সঙ্গে কাজ ও চিন্তা করতে হয়। শিক্ষকের সুপরিচালনায় শ্রেণীর সমস্ত ছাত্র একসঙ্গে পাঠ গ্রহণ করে। ছাত্রদের বিচ্ছিন্ন ও বিভিন্ন একক হিসাবে না ধরে সমস্ত শ্রেণীটিকে একটি একক বলে ধরে নেওয়া হয়। অবশ্য শিক্ষক কোন প্রশ্ন করলে ছাত্ররা ব্যক্তিগত ভাবে তার উত্তর দেয়। শিক্ষক প্রয়োজন মত প্রশ্ন, ইঙ্গিত বা সংকেতের দ্বারা ছাত্রদের সাহায্য করেন। এই প্রণালীতে শ্রেণীর মধ্যে ছাত্রদের কাজ বেশ ভাল হয়।

পরীক্ষাগার প্রণালী (Laboratory Mode) : এই প্রণালীতে গণিত শিক্ষণের সময় শ্রেণী কক্ষটি বিভিন্ন প্রকার সাজ-সরঞ্জাম ও যন্ত্রপাতি দিয়ে সাজিয়ে

পরীক্ষাগারের মত তৈরী করা হয়। এই পরীক্ষাগারে শিক্ষণীয় যাবতীয় বিষয় দেওয়া হয়। শিক্ষক এই পরীক্ষাগারের পরিচালক। ছাত্রেরা হয় ব্যক্তিগত কিংবা ছোট ছোট দলে বিভক্ত হয়ে কাজ করে।

এই প্রণালীগুলির মধ্যে শ্রেষ্ঠ কোন্‌টি ? এর উত্তরে বলা যায় সুশিক্ষক কখ একটি নির্দিষ্ট প্রণালীর মধ্যে নিজের কাজকে সীমাবদ্ধ করে রাখবেন না। শিক্ষ কখন কোন প্রণালীটি অবলম্বন করবেন তা নির্ভর করে বিষয়বস্তুর প্রকৃতি, ছাত্র ক্ষমতা ও চাহিদা, শ্রেণীর পাঠদানের উপকরণ, শিক্ষকের ব্যক্তিত্ব, বিষয়বস্তু ও পদ্ধতি জ্ঞান প্রভৃতির উপর। শিক্ষকের অভিজ্ঞতা যত বৃদ্ধি পাবে বিভিন্ন প্রণালীর ম তুলনামূলক উৎকর্ষ-অপকর্ষের জ্ঞানও তার তত বাড়বে। যে প্রণালী অবলম্বন কর ছাত্রদের গণিত সম্বন্ধে উপলব্ধি বৃদ্ধি পায় এবং তারা গণিত শিক্ষণের প্রকৃত লক্ষ্যে দিকে এগিয়ে যায় সেইটিই হল শ্রেষ্ঠ প্রণালী। পদ্ধতি সম্বন্ধেও ঐ একই ক বলা চলে।

গণিত শিক্ষণে পুরাতন ও নূতন পদ্ধতি ঃ—

কিছুদিন আগেও মানসিক উৎকর্ষ সাধনকেই গণিত শিক্ষার প্রধান উদ্দেশ্য ব মনে করা হ'ত। এর পিছনে অবশ্য কয়েকটি যুক্তিও ছিল। যেমন—

(ক) গণিত শিক্ষণে বিচারকরণ ক্ষমতা এবং মনোযোগ দানের ক্ষমতার প্রভ বেশী।

(খ) গণিতের ক্ষেত্রে তর্কবিদ্যার সরল উদাহরণের প্রয়োগ দেখা যায়।

(গ) অপ্রয়োজনীয় অংশের প্রতি মনোযোগ দানে শিক্ষার্থী নিরস্ত থাকে।

(ঘ) গণিতের সাহায্যেই স্থৈর্য, আত্মবিশ্বাস, প্রাক্ষোভিক ক্ষমতা ইত্যাদির উৎক সাধন হয়।

(ঙ) কল্পনাশক্তি বিকাশ লাভ করে।

যুক্তিগুলির মধ্যে সত্যতা যে যথেষ্ট পরিমাণে আছে, সে বিষয়ে কোন সন্দে নেই। কিন্তু গণিত ছাড়া অন্য কোন বিষয়ের পাঠেও ঐ একই গুণ অর্জিত হ পারে। স্কুলপাঠ্য বিষয়গুলির শিক্ষণে মানসিক শৃঙ্খলার তত্ত্বটি বা কৃষ্টিমূলক ধারণা যথেষ্ট পরিবর্তন বর্তমান যুগে লক্ষ্য করা যায়। মানসিক শৃঙ্খলা ও প্রয়োজনীয়তা দু সম্পূর্ণ পৃথক নয়। বরং বলা যেতে পারে—বিষয়টির প্রয়োজনীয়তা যত বাড়ে, তা কৃষ্টিমূলক ও শৃঙ্খলাগত মূল্যও তত বাড়ে। সঠিক পদ্ধতি অনুসরণ করলে গণিতকে নীরস বা কঠিন বিষয় বলে মনে হয় না। গণিতের মধ্যেও আবিষ্কার ও গবেষণা যথেষ্ট উপাদান বর্তমান আছে। পুরাতন পদ্ধতিতে এই আবিষ্কার ও গবেষণার দিক সম্পূর্ণ অবহেলিত ছিল। কিন্তু গণিত শিক্ষণের নূতন পদ্ধতি পুরাতন পদ্ধতি অপেক্ষা অনেক দিকেই ভিন্ন এবং উন্নত। এখন নূতন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক্—

গণিত শিক্ষণের আধুনিক পদ্ধতির মূল কথা হল—আবিষ্কার। স্বাধীন এবং মৌলিক চিন্তার যথেষ্ট সুযোগ ছাত্রদের দেওয়া হয়। ছাত্রকে এমন একটি পরিস্থিতির সম্মুখীন করা হয় বা এমনভাবে একটি ভাব পরিমণ্ডল তৈরী করা হয়, যাতে তাকে স্বাধীনভাবে চিন্তা করতেই হয়। আধুনিক পদ্ধতির বৈশিষ্ট্য হল :—

(১) **আবিষ্কার :**—ছাত্ররা নিজেরাই আবিষ্কার করে ; তা সে কোন সিদ্ধান্তের সত্যতাই হোক বা কোন সমস্যার সমাধানই হোক। শিক্ষক কেবলমাত্র ইঙ্গিত দিয়ে দেন। একান্ত প্রয়োজন হলে নির্দেশ দেওয়া হয়। বিশুদ্ধ সংখ্যা ব্যবহারের ক্ষেত্রেও ছাত্রদের সুবিধার জন্য নানাপ্রকার যন্ত্রপাতিও আবিষ্কৃত হয়েছে। তাছাড়া উৎসাহদান, আগ্রহ পরিমাপ, প্রবণতা-পরিমাপ ইত্যাদির সাহায্যেও আবিষ্কারের সঠিক পথেই শিক্ষক মহাশয় ছাত্রকে পরিচালিত করেন। এর জন্য ছাত্রকে অত্যন্ত গভীরভাবে পর্যবেক্ষণ করা হয় এবং প্রয়োজনীয় প্রশ্নও করা হয়।

(২) **আলোচনা :**—প্রাচীন পদ্ধতিতে আলোচনার কোন স্থানই ছিল না। কিন্তু আধুনিক পদ্ধতিতে আলোচনা গণিত শিক্ষণের অপরিহার্য অঙ্গ। আলোচনার মাধ্যমে ছাত্র কি চিন্তা করছে এবং কোন্ পদ্ধতি অনুসরণ করছে তার পরিচয় পাওয়া যায়।

(৩) **প্রয়োগমূলক কাজ :**—প্রয়োগমূলক কাজ বলতে সেই সব কাজকেই বোঝানো হচ্ছে যেগুলির সম্পাদনার জন্য মন ও ইন্দ্রিয় উভয়েরই প্রয়োজন। এ জাতীয় কাজ বা সমস্যা আমাদের বাস্তব জীবনেরই অঙ্গীভূত। অগ্রসর ও অনগ্রসর, উভয় শ্রেণীর ছাত্রের জন্যই প্রয়োগমূলক কাজের প্রয়োজন আছে। কাগজে-কলমে হিসাব করার আগে হাতে কলমে কাজ করার সুযোগ দিলে ভালো হয়। এ'টিই গণিত শিক্ষণের সঠিক পদ্ধতি। কিন্তু প্রাচীন পদ্ধতিতে আগে কাগজে-কলমে হিসেব শেখানো হ'ত, পরে হাতে-কলমে কাজ করার সুযোগ দেওয়া হ'ত—যদিও সে সুযোগ খুবই কম ছিল।

আধুনিক পদ্ধতিতে শিক্ষণ হল বাস্তব অভিজ্ঞতাভিত্তিক। ছাত্রদের তাদের অভিজ্ঞতাকে যতদূর সম্ভব কাজে লাগাবার জন্য উৎসাহিত করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে : ছাত্রেরা ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করতে চায়। এ ক্ষেত্রে তাদের বিভিন্ন গাছের বিভিন্ন আকৃতির পাতা আনতে বলা যেতে পারে। তারপর বিভিন্ন পাতার মধ্যে কোন্ পাতা সবচেয়ে বড়, তা জিজ্ঞাসা করা হবে। কোন কোন ছাত্রের ধারণা থাকতে পারে যে-পাতাটি সবচেয়ে লম্বা তার ক্ষেত্রফলই সবচেয়ে বেশী। কিন্তু শীঘ্রই তারা নিজেদের ভুল বুঝতে পারে। আবার পাতাগুলি গ্রাফ কাগজের উপর রেখে ধারে ধারে দাগ টেনে ছোট ছোট বর্গগুলি গণনা করেও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব। তেমনি বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে যদি এই ছড়াটি দেওয়া হয়।

তেপান্তরের মাঠে তাল, তেঁতুল, বটে,
সমান দূরে রেখে গুপ্তধনে দেখে।

তাহলে ছাত্রের আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ না করে কোন উপায় থাকে না। এইজন্য প্রচলিত পদ্ধতির চেয়ে সময় কিছু বেশি লাগলেও আবিষ্কারের উপর জোর দেওয়া হয়।

গণিতে মুখস্থ করা অত্যন্ত ক্ষতিকর। এইজন্য আধুনিক পদ্ধতিতে মুখস্থ করার উপর জোর দেওয়া হয় না। এ পদ্ধতিতে ছাত্রের আগ্রহের উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়। ছাত্রকে গণিতের বাস্তব ও প্রয়োজনীয় দিকটির দিকে বেশী মনোযোগী করে তোলার চেষ্টা করা হয়।

প্রাচীন পদ্ধতির আর একটি বড় ত্রুটি ছিল। প্রারম্ভিক শ্রেণীগুলিতে গণিত শিক্ষণের জন্য এমন শিক্ষক নিযুক্ত করা হ'ত - যাদের গণিতে কোন স্বাভাবিক আগ্রহ ছিলই না। তাঁরা কেবল রুটিন মাফিক কাজ করে যেতেন। তাঁদের এই অনাসক্তি ও নিস্পৃহ ভাবটি ছাত্রদের মনে সঞ্চারিত হয়ে যেত। এইজন্য আধুনিক পদ্ধতিতে এই সমস্ত শ্রেণীর জন্য এমন শিক্ষক নির্বাচিত করা হয় যারা গণিতের প্রতি স্বাভাবিক ভাবেই আগ্রহী এবং যাঁরা গণিত ও জীবনের মধ্যে কোন পার্থক্য স্বীকার করেন না। এরা গণিতে ছাত্রদের প্রকৃত আগ্রহ উজ্জীবিত ও বিকশিত করে তুলতে পারেন।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. 'The analytic method is the method of the mathematical worker the Synthetic method is that in which he usually presents his results.'' Discuss with Suitable illustrations from mathematics.

2. Distinguish between the Inductive method and the Deductive method and indicate how you would keep these contrasted methods in view in a mathematics class.

3. Illustrate with examples the Synthetic and the analytic, the inductive and the deductive methods as applied to the teaching of mathematics and point out the special value of each as a Scientific approach to the Subject.

4. "Induction aided by intuition and experiment must form the initial phase in the teaching of mathematics in Secondary Schools".— Elucidate.

5. Describe the Heuristic method of teaching mathematics. How would you apply it in your class-room while teaching any topic of Geometry?

6. "Deduction is a process peculiarly appropriate to a final Statement of mathematical results; but for the exploration of new fields induction, aided by intuition and experiment, would be best suited"— Discuss.

7. Write notes on :—

   (a) Laboratory method in the teaching of Geometry.

   (b) Assignment and record of pupil's work.

সপ্তম অধ্যায়

অনুবন্ধ

(Correlation)

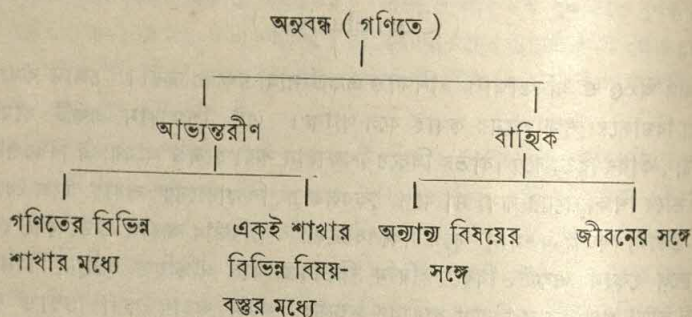
জ্ঞান অখণ্ড ও অবিভাজ্য। শিক্ষাও একটি সামগ্রিক প্রক্রিয়া। চলতি কথাতেও আমরা বিদ্যালয়ে শিক্ষাদানের কথাই বলে থাকি। এই শিক্ষাদান একটি সামগ্রিক প্রক্রিয়া ; কারণ বিদ্যালয়ে বিভিন্ন বিষয়ে শিক্ষাদান করা হলেও আমরা ঐ বিষয়গুলিতে পৃথক ভাবে শিক্ষাদানের কথা না বলে কেবলমাত্র শিক্ষাদানের কথাই বলে থাকি। কিন্তু দুর্ভাগ্যবশতঃ বর্তমান যুগে বিশেষজ্ঞদের আবির্ভাব অত্যন্ত দ্রুতবেগেই হচ্ছে। এর ফলে কোন একটি বিষয়ে যিনি বিশেষজ্ঞ বলে অভিহিত হচ্ছেন, তিনি সেই বিষয়টি ছাড়া অন্য কোন বিষয়ে সাধারণ জ্ঞানটুকু অর্জন করার কথা চিন্তাও করেন না। ফলে জ্ঞান হয়ে যাচ্ছে খণ্ডিত, শিক্ষাও হচ্ছে অসম্পূর্ণ। বিদ্যালয়েও এর প্রতিফলন বেশ লক্ষ্য করা যায়। বিভিন্ন বিষয়ে বিশেষজ্ঞ শিক্ষক তো আছেনই, গণিত-শিক্ষকদের মধ্যেও উপবিভাগের সৃষ্টি করা হয়েছে। যিনি পাটীগণিত পড়ান, তিনি বীজগণিত বা জ্যামিতির ছায়া পর্যন্ত স্পর্শ করেন না। তেমনি বীজগণিত বা জ্যামিতির শিক্ষকদের পক্ষেও এরূপ মনোভাব পোষণ করা খুবই স্বাভাবিক।

শিক্ষণীয় বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে যে একটা যোগসূত্র বা অনুবন্ধ আছে তা বিখ্যাত শিক্ষাবিদ হার্বার্টও উপলব্ধি করেছিলেন। তাঁর ধারণা ছিল—বিভিন্ন বিষয়ের খণ্ডিত জ্ঞান অর্জনের দ্বারা মানসিক ক্ষমতা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় না ; ঐ ক্ষমতা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় তখনই—যখন বিভিন্ন অংশের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করে একটা সুষ্ঠু সমন্বয় সাধিত হয়। তিনি এই সম্পর্ক স্থাপন ও সমন্বয়কেই অনুবন্ধের নীতি বা Principle of Correlation বলে অভিহিত করেছেন।

শিক্ষা তখনই সম্পূর্ণ ও সার্থক হয় যখন অনুবন্ধের নীতিটি অনুসৃত হয়। অনুবন্ধের সাহায্যে বিভিন্ন বিষয় বা ঘটনার মধ্যে কোন পরিবর্তন ঘটলে অপর বিষয় বা ঘটনার মধ্যে কতটা পরিবর্তন আসবে তাও জানা যায়। গাণিতিক পদ্ধতিতে সহ-পরিবর্তনের মানের সাহায্যে অনুবন্ধের প্রকৃতি ও পরিমাণ নির্ণয় করা যায়।

অনুবন্ধের আধুনিক মতবাদ—আধুনিক মতবাদে মানসিক বিকাশের সঙ্গে অনুবন্ধের সামঞ্জস্যের কথা বলা হয়ে থাকে। এই মতবাদ অনুযায়ী কোন একটি বিষয়কে কেন্দ্রীয় বিষয় (Central Subject) হিসাবে ধরে তার সঙ্গে বিভিন্ন বিষয়ের অনুবন্ধের পরিকল্পনা করা হয়। অবশ্য এই অনুবন্ধ আভ্যন্তরীণ ও বাহ্যিক উভয় প্রকারেরই হতে পারে। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে, অনুবন্ধ যেন স্বাভাবিক হয়, কষ্টকল্পিত না হয়। একটি বিষয়ে শিক্ষাদান করার সময় প্রাসঙ্গিক ভাবেই অন্য বিষয়ের কথা আসতে পারে। এই জাতীয় অনুবন্ধকেই স্বাভাবিক অনুবন্ধ বলা

হয়। আমাদের বর্তমানের বুনিয়াদী শিক্ষাও অনুবন্ধ প্রণালীর উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত।

গণিতে অনুবন্ধ বিভিন্ন দিক থেকে বিচার করা যায়। মোটামুটিভাবে আমরা অনুবন্ধকে এইভাবে ভাগ করতে পারি :

এই চারপ্রকার অনুবন্ধের নীতি অনুসরণ করে শিক্ষা দিলে তবেই শিক্ষা সম্পূর্ণ ও সফল হতে পারে। এখন প্রত্যেক জাতীয় অনুবন্ধ সম্বন্ধে সংক্ষেপে কিছু আলোচনা করা যাক্।

১। গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে অনুবন্ধ : আমরা গণিতকে একটি বিষয় বলে ধরে নিলেও এর আবার কতকগুলি পৃথক পৃথক বিভাগ করে স্কুলের সময় তালিকাতে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদির জন্য পৃথক পিরিয়ডের ব্যবস্থা করা হয়। অনেক স্কুলে সাধারণতঃ পৃথক শিক্ষকও থাকেন এবং তাঁরা যেন পড়ানোর সময় বায়ু-নিরোধক কক্ষে পড়ান। পাটীগণিতের শিক্ষক বীজগণিতের খোঁজ রাখেন না আবার বীজগণিতের শিক্ষক জ্যামিতিতে কি হচ্ছে, তার খবর রাখেন না। অর্থাৎ শিক্ষকরা তাঁদের শাখাটিকে একটি পৃথক বিষয়ে পরিণত করে ফেলেন এবং ছাত্ররাও সেইরকম ভাবতে শেখে। এতে কিন্তু জ্ঞানের ভিত্তি দুর্বল হয়ে যায় এবং গণিত শিক্ষার লক্ষ্যও ব্যর্থ হয়ে যায়। কিন্তু বাস্তবিকপক্ষে দেখতে গেলে পাটীগণিতের সমস্ত শাখার মধ্যেই একটা পারস্পরিক যোগসূত্র বিদ্যমান। এইজন্য গণিতের সমস্ত শাখাই অনুবন্ধ প্রণালীতে শেখানো উচিত। পাটীগণিত, বীজগণিত বা জ্যামিতির জন্য পৃথক পিরিয়ড না রেখে গণিতের জন্য একটিমাত্র পিরিয়ড থাকবে। গণিতের শাখাগুলি সামগ্রিকভাবে শিক্ষা দেওয়া হবে। পাটীগণিতে আয়তক্ষেত্রের বা বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হয়। কিন্তু এই জাতীয় ক্ষেত্রের ধারণা জন্মায় জ্যামিতি থেকেই। গণিতে যখন কোন সমস্যার সম্মুখীন হওয়া যায় তখন দেখতে হবে কোন শাখাটি অবলম্বন করলে সহজে ও কম সময়ে সমাধানে পৌছানো সম্ভব। একটি শাখা থেকে অন্য একটি শাখাতে যাতায়াতের পথ যেন সহজ ও সুগম হয়।

২। একই শাখার বিষয়বস্তুর মধ্যে অনুবন্ধ : গণিতের বিষয়বস্তু হল ধারাবাহিক। একটি অধ্যায়ের সঙ্গে অপরটির একটা যোগসূত্র আছে। বিষয়বস্তুর

এই ক্রমপর্যায়ে যুক্তিসম্মত ও মনোবিজ্ঞানসম্মত ধারা অনুসরণ করা উচিত। এই অধ্যায়গুলি একটি অপরটির সঙ্গে এমনভাবে শৃঙ্খলিত থাকবে যেন সেগুলি ক্রমপর্যায়ে শিখতে ছাত্রদের কোন অসুবিধা না হয়। ছাত্রদের চাহিদা ও আগ্রহ অনুসারে বিষয়বস্তুগুলি বিন্যস্ত করা প্রয়োজন।

৩। **অন্যান্য বিষয়ের সঙ্গে অনুবন্ধ :** গণিতের সঙ্গে কোন্ কোন্ বিষয়ের কি রকম সম্পর্ক আছে সে সম্বন্ধে আমরা আগেই আলোচনা করেছি (তৃতীয় অধ্যায়)। যে সমস্ত বিষয়ের শিক্ষাদান করার সময় গণিত ব্যবহার করতে হয় গণিত শিক্ষা দেবার সময় ঐ সমস্ত বিষয়ের সঙ্গে সম্পর্ক যুক্ত করে শিক্ষা দেওয়া বাঞ্ছনীয়। যে বিষয়ে যতটুকু গণিত বা গণিতের যে অধ্যায়ের প্রয়োজন, ঐ বিষয়টি পড়ানোর সময় গণিতের ঐ অংশ যেন আবার নতুন করে পড়াতে না হয়। এতে পরিশ্রম যেমন কম হয়, সময়ও তেমন কম লাগে। বিজ্ঞান জাতীয় প্রায় সব বিষয়েই গণিতের প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। সুতরাং গণিতের পাঠক্রমটি এমনভাবে রচনা করতে হবে যাতে অন্য কোন বিষয়ের শিক্ষা গ্রহণ করার সময় গণিত ব্যবহার করতে ছাত্রদের কোন অসুবিধা না হয়।

৪। **জীবনের সঙ্গে অনুবন্ধ :** আমাদের দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত ব্যাপক। জীবনের এমন কোন দিক নেই, যেখানে গণিতের অনুপ্রবেশ ঘটে নি। কিন্তু গণিতের এই বাস্তব প্রয়োগমূলক দিকটির প্রতি শিক্ষকরা যেমন উদাসীন, ছাত্ররাও তেমনি অজ্ঞ। তারা গণিতকে পাঠ্যপুস্তক ও শ্রেণীর চারদেওয়ালের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখে। আমাদের লক্ষ্য রাখতে হবে, গণিতের বিষয়বস্তু যেমন বাস্তব-জীবন ও জীবিকার অনুকূল হয়। শ্রেণীর মধ্যে ছাত্ররা যে সমস্ত সমস্যার সম্মুখীন হয়, সেগুলিও যেন বাস্তব বলে প্রতীত হয়। যে সমস্ত সমস্যা দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা—যেমন কেনা-বেচা, দাম দেওয়া, জমি জায়গা মাপ করা, সময় হিসাব করা বা লোক-সংখ্যা নির্ণয় করা—সেগুলি পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত হওয়া উচিত। কিন্তু বাস্তব সমস্যার উদাহরণ দিতে গিয়ে অতি উৎসাহে যেন অবাস্তব কোন সমস্যার রূপায়ন না ঘটে। এ জাতীয় অবাস্তব সমস্যা থেকেই অবাস্তব চিন্তার উদ্ভব ঘটে। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক্ :—

10 জন লোক একটি বাড়ী 30 দিনে তৈরী করে। তাহলে 300 জন লোক ঐ বাড়ী কতদিনে তৈরী করবে? উত্তর হল 1 দিন। কিন্তু এ অসম্ভব ও অবাস্তব। 300 জন লোক সমস্ত মালমশলা পেলেও 1 দিনে বাড়ী তৈরী করতে পারবে না পার্থিব ও প্রাকৃতিক (Natural) কারণে।

কিংবা যদি বলা হয় : 2 men and 1 woman can build a wall 15 ft long and 3 ft wide in 3 days working 7 hrs a day. Find out the time required to furnish the same will if 200 men and 100 women work for 15 hrs a day when 1 man=2 women. আপাত-

দৃষ্টিতে সমস্যাটি নির্ভুল ও নির্দিষ্ট। কিন্তু একটু লক্ষ্য করলেই দেখা যাবে এটি এ
অবাস্তব সমস্যা।

যেমনি বর্তমান মেট্রিক পদ্ধতির যুগে টাকা-আনা-পাই, গজ ফুট ইঞ্চি বা ম
ছটাক সম্বন্ধীয় সমস্যার কোন প্রয়োজন নেই। এগুলি বর্তমানে কোন কাজেই লা
না। বাস্তব জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধ স্থাপন করতে গিয়ে গণিত কতকগুলি
অভ্যাসেরও শিক্ষা দেয়। এগুলি হ'ল সত্যবাদিতা, সংক্ষিপ্তভাবে কাজ করার অ
রুচিশীলতা, সরলতা, মৌলিকতা প্রভৃতি। গণিতকে কেন্দ্রীয় বিষয় হিসাবে নি
করলে অন্যান্য সব বিষয়ে সাফল্যের সঙ্গে শিক্ষাদান করা সম্ভব।

এখন কয়েকজাতীয় সম্বন্ধের কিছু দৃষ্টান্ত দেওয়া হল :—

উদা : 1. পাটিগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ :

Divide Rs 105/- among A, B and C, so that A may get Rs
less than B. and C gets Rs 5/- more than B.

ধরা যাক A পায় x টাকা।

সুতরাং B পায় $x+5$ টাকা।

C পায় $x+5+5$ বা $x+10$ টাকা।

$\therefore\ x+x+5+x+10$ টাকা $=105$ টাকা

বা $3x+15$ টাকা $=105$ টাকা

বা $3x=105-15=90$ টাকা

$\therefore\ x=\frac{90}{3}$ বা 30 টাকা।

সুতরাং A পায় 30 টাকা, B পায় 35 টাকা, C পায় 40 টাকা।

উদা : 2. বীজগণিতে পাটিগণিত :

এক ব্যক্তির x মাসের আয় y টাকা। যার মাসিক আয় তার অর্ধেক,
মাসিক আয় কত ?

x মাসের আয় $=y$ টাকা

$\therefore\ 1$,, ,, $=\frac{y}{x}$ টাকা।

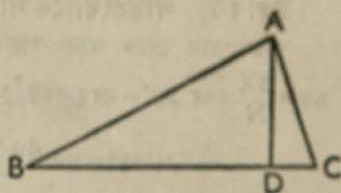
অন্য ব্যক্তির আয় $\frac{y}{x}$ এর $\frac{1}{2}$ বা $\frac{y}{2x}$ টাকা।

[গুণ, ভাগ ইত্যাদি পাটীগণিতের নিয়ম বীজগণিতে প্রয়োগ করা হয়েছে]

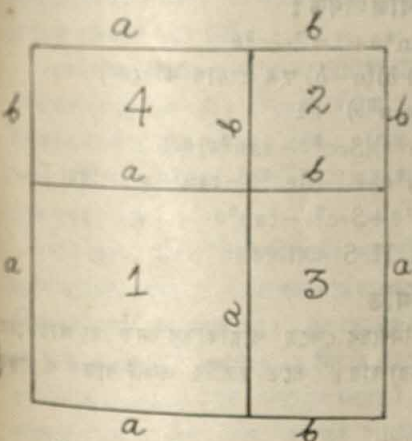
উদা : 3. জ্যামিতিতে বীজগণিত :

AD is the perpendicular from the vertex A upon the base B
of a triangle ABC. If $AD^2=BD.DC$, prove that the triangle
right angled.

আমরা জানি

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

যোগ করিয়া: $AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2$
$= BD^2 + CD^2 + 2BD.DC$
$= (BD + CD)^2 = BC^2$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এছাড়া বীজগণিতের কয়েকটি সূত্র যেমন $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2$, $= a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ইত্যাদিও জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়।

উদা: 4. বীজগণিতে জ্যামিতি: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b_2$

1 এর ক্ষেত্রফল $= a^2$
2 ,, ,, $= b^2$
3 ও 4 ,, ,, $= ab$
$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

উদা: 5. পাটীগণিতে পরিমিতি:

একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য 16 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার। ঘরটির পরিসীমা কত?

পরিমিতি থেকে জানি ঘরের পরিসীমা $= 2$(দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ)
$= 2(16+12)$ মিটার
$= 56$ মিটার।

উদা: 6. পরিমিতিতে পাটীগণিত: একটি ঘনকাকৃতি কাঠের দৈর্ঘ্য x সেমি. প্রস্থ y সেমি. এবং উচ্চতা z সেমি। কাঠটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত?

পাটিগণিতে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হয় দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ এই হিসাবে। 6টি তলই হল আয়তাকার।

x ও y মাপের তলের ক্ষেত্রফল $= 2xy$ বর্গ সেমি
y ও z ,, ,, ,, $= 2yz$,, ,,
z ও x ,, ,, ,, $= 2zx$,, ,,
} প্রত্যেক তল 2টি করে আছে।

$\therefore$ সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2xy + 2yz + 2zx = 2(xy + yx + zx)$ বর্গ একক।

উদা : 7. পরিসংখ্যানে পাটীগণিত : 4, 5, 6, 7, 8 এর গড় কত?
পরিসংখ্যান থেকে জানা যায় স্কোর বা নম্বরগুলি X দিয়ে চিহ্নিত
গড় $=\frac{\Sigma X}{N}$ যখন $\Sigma X=$ নম্বর সমষ্টি, $N=$ মোট সংখ্যা।

$$\therefore \text{ Mean}=\frac{4+5+6+7+8}{5}=\frac{30}{5}=6.$$

উদা : 8. পাটীগণিতে পরিসংখ্যান : 5টি ছাত্রের ওজন যথাক্রমে 30, 35, 40, 45, ও 50 kg. তাদের ওজনের গড় কত ?

পরিসংখ্যানে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা হয় $\frac{\Sigma X}{N}$ সূত্র অনুযায়ী।

$$\therefore \text{ গড়}=\frac{30+35+40+45+50}{5}\text{ kg}=\frac{200}{5}\text{kg}=40 \text{ kg}.$$

উদা : 9. ত্রিকোণমিতিতে বীজগণিত :

প্রমাণ কর : $\text{Sec}^4\theta-\tan^4\theta+1=2\sec^2\theta$

[বীজগণিতের $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্র প্রয়োগ করিলে]

$$\begin{aligned} \text{L. H. S} &=(\text{Sec}^2\theta)^2-(\tan^2\theta)^2+1 \\ &=(\text{Sec}^2\theta+\tan^2\theta)(\text{Sec}^2\theta-\tan^2\theta)+1 \\ &=(\text{Sec}^2\theta+\tan^2\theta)+1 \ [\text{Sec}^2\theta-\tan^2\theta=1 \text{ ধরিয়া}] \\ &=\text{Sec}^2\theta+\tan^2\theta+\text{Sec}^2\theta-\tan^2\theta \\ &=2\text{ Sec}^2\theta=\text{R. H. S প্রমাণিত।} \end{aligned}$$

উদা : 10. বীজগণিত পরিমিতি

$(a+b)^3$ বা $(a-b)^3$-এর সূত্র নির্ণয়ের ক্ষেত্রে পরিমিতির ঘনক বা আয়তক্ষেত্রফল নির্ণয় করে সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়। এতে সূত্রটির একটি বাস্তব ও চাক্ষুষ রূপ দেওয়াও সম্ভব।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. Discuss how far mathematics can be correlated with other Subjects of the school.

2. Bring out the links of algebra with arthmetic and geometry and State how far the fusion of the three branches of mathematics is possible in the teaching of School mathematics.

3. Discuss the Correlation of mathematics with other Subjects of the curriculum and with environment.

4. Indicate with suitable examples, the relations of mensuration with arithmetic, algebra, geometry and trigonometry.

5. Write a note on-Correlation of Algebra with Geometry.

6. Write a note on-Algebra in geometry and geometry in algebra.

অষ্টম অধ্যায়

গণিতে ত্রুটী কোথায়?

(What is wrong with Mathematics?)

অধিকাংশ লোকেরই ধারণা—গণিত একটি নীরস ও কঠিন বিষয়। কিন্তু আসলে বিষয়টিকে যত কঠিন বলে মনে হয়, এটি তত কঠিন নয়। গণিতের ছাত্রকে স্বাধীন চিন্তা প্রয়োগ করতে হয় ও এককভাবে কোন সমস্যার সমাধান করতে হয়। কিন্তু দেখা যায় সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্ররা প্রায়ই অকৃতকার্য হয়ে গণিতের উপর দোষারোপ করছে। কিন্তু ছাত্ররা অকৃতকার্য হয় কেন? এর কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে সে সমস্যাটির স্বরূপ সম্পূর্ণ উপলব্ধি করতে পারেনি, কিংবা সমস্যাটির সমাধান কিভাবে সম্ভব, তা তাকে শিক্ষা দেওয়া হয়নি, কিংবা সমস্যাটির সমাধানের উপযুক্ত পূর্বজ্ঞান তার নেই।

একটা কথা আছে—"আবৃত্তি সর্বশাস্ত্রানাং বোধাদপি গরিয়সী"। একথাটা অন্ততঃ গণিতের ক্ষেত্রে চলে না। অন্যান্য বিষয় (যেমন—ইতিহাস, দর্শন, সমাজবিদ্যা) উপলব্ধি না করে মুখস্থ করলেও চলে। কিন্তু গণিতে মুখস্থ করার সুযোগ খুবই কম। তবুও দেখা যায়, ছাত্ররা বীজগণিতের সূত্র, অভেদ বা জ্যামিতির উপপাদ্য, সংজ্ঞা না বুঝে মুখস্থ করছে।

যাই হোক, গণিত শিক্ষণের ত্রুটির জন্য গণিত শিক্ষকই প্রধানতঃ দায়ী। গণিতের ক্লাশে ছাত্রদের মধ্যে যে ব্যক্তিগত পার্থক্য আছে সেই পার্থক্য অনুযায়ী পৃথক পৃথক শিক্ষণের ব্যবস্থা করা হয় না। সব ছেলের জন্য একই পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। তা ছাড়া গণিতের পাঠ্যপুস্তকে যে নিয়মে সমস্যাগুলির সমাধান করা হয়ে থাকে, তিনি কেবলমাত্র সেই নিয়মটিরই অনুসরণ করেন। তার থেকে সহজ কোন নিয়মও যে থাকতে পারে তা যেন তিনি ভাবতেই পারেন না। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক, জ্যামিতির একটি উপপাদ্য হল ত্রিভুজের কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। এটি শ্রেণীতে প্রমাণ করার সময় পাঠ্যপুস্তকের দীর্ঘ নিয়মটিই অনুসরণ করা হয়। কিন্তু এটি আরো সহজে প্রমাণ করা সম্ভব। যেমন, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু AB এবং AC যোগ করলে আমরা একটি বক্ররেখা BAC পাই। অপর বাহু BC একটি সরলরেখা। স্পষ্টতঃই কোন বক্ররেখা সরলরেখা হতে দীর্ঘতর।
$\therefore BAC > BC$ অথবা $AB + AC > BC$.

প্রমাণটি খুবই সহজ এবং যে কোন ছেলের পক্ষেই উপলব্ধি করা সহজ। এ ছাড়া শ্রেণীতে ছাত্রদের স্বাধীনভাবে চিন্তা করতে উৎসাহ দেওয়া হয় না। বরং তাদের পাঠ্যপুস্তকের নির্দিষ্ট নিয়মগুলি অনুসরণ করতে বাধ্য করা হয়। স্বাধীনভাবে চিন্তা করা ও বিচার করার চেয়ে মুখস্থ করা সহজ। ছাত্ররাও মুখস্থ করার সহজ পথটি বেছে

নেয় বলে গণিতের সমস্যা সমাধানের যে আনন্দ, সে আনন্দ থেকে তারা বঞ্চিত হ
এর জন্যই ছাত্রদের নিকট গণিত এত নীরস ও কঠিন বলে মনে হয়।

এ ছাড়া আরও কতকগুলি কারণের উল্লেখ করা যেতে পারে যে জন্য গ
শাস্ত্রটিকে এত কঠিন ও নীরস বলে মনে হয়। প্রধান প্রধান কারণগুলি হল :—

১। **ব্যক্তিগত দৃষ্টিদানের সুযোগের অভাব**—অধিকাংশ শ্রেণী
ছাত্রসংখ্যা 40 থেকে বেশী। আবার ক্লাশের সব ছেলে বুদ্ধির দিক থেকেও এক জা
হয় না। কেউ বেশী বুদ্ধিমান, আবার কেউ বা স্বল্পবুদ্ধিসম্পন্ন। ক্লাশে সাধা
ছেলেদের প্রতি দৃষ্টি রেখে পড়ানো হয়। ফলে যারা স্বল্পবুদ্ধিসম্পন্ন তারা ক্লাশের
ঠিকমত অনুসরণ করতে পারে না। তা ছাড়া 40 মিনিটের পিরিয়ডে প্রতি ছা
প্রতি ব্যক্তিগতভাবে মনোযোগ দেওয়া শিক্ষকের পক্ষে সম্ভব হয় না।

২। **শ্রেণীতে অনিয়মিত উপস্থিতি বা দীর্ঘ অনুপস্থিতি**—গণিত এক
ধারাবাহিক বিষয়। পূর্ববর্তী অধ্যায়ের সঙ্গে একটা ঘনিষ্ঠ যোগসূত্র থাকে। স্ক
প্রায়ই অনুপস্থিত থাকলে ছাত্রের পক্ষে যে সমস্ত অধ্যায়গুলি পড়ানো হয়ে গেছে সেগু
অনুসরণ করতে কষ্ট হয়। তাছাড়া কঠিন অধ্যায়গুলি শিক্ষকের সাহায্য না নিয়ে
বাড়ীতে পড়া তৈরী করে উঠতে পারে না। শ্রেণীর নূতন পাঠও দ্রুত অগ্রসর হ
বলে পুরাতন পাঠ তৈরী করার মতো সময়ও সে পায় না, আর শিক্ষক মহাশয়ও ছা
পুরাতন পাঠ ভালোভাবে তৈরী করতে পারল কি না যাচাই করার সুযোগ পান না।

৩। **উদ্দেশ্যের অভাব**—অধিকাংশ গণিত শিক্ষকেরই গণিত কেন শেখানে
হচ্ছে এ সম্বন্ধে কোন পরিষ্কার ধারণা থাকে না। তাঁদের ধারণা—কেবলমা
পরীক্ষায় পাশ করার উদ্দেশ্যেই গণিত শেখানো হয় এবং গণিত শেখানোর ফলে
ছাত্ররা কোন নতুন ক্ষমতা অর্জন করে না। তারা যা লাভ করে তা হল গণি
সম্বন্ধীয় জ্ঞান। কিন্তু, বলা বাহুল্য, এ ধারণা সম্পূর্ণ ভ্রান্ত, ছাত্রদের নিকটেও গণি
পাঠের উদ্দেশ্যটি ব্যক্ত করা হয় না। আর সবচেয়ে বড় কথা হল, গণিতের বিষয়বস্
গুলিকে দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত করে নির্বাচন করা হয় না বা গণিতে
অধীত অধ্যায়গুলিকে যে দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করা যায়, এ ধারণাও ছাত্রদে
মনে গড়ে উঠে না। ফলে যে ছাত্র গণিতে আয়তনক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বা পরিসী
নির্ণয় করেছে, সে খেলার মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারে না। ছাত্রও জানে, সে
গণিত অধ্যয়ন করছে কেবলমাত্র পরীক্ষায় পাশ করার জন্য। গণিত শিক্ষকও চা
তাঁর বিষয়ে যেন কৃতকার্য ছাত্রের সংখ্যা বেশী হয়। আর এইজন্যই গণিতে স্বাধী
চিন্তন, গবেষণা বা বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে শিক্ষাদানের পরিবর্তে শিক্ষক মহাশ
গতানুগতিক পদ্ধতিতে পাঠদানের মাধ্যমে পরীক্ষায় কৃতকার্য ছাত্রের সংখ্যাবৃদ্ধি
চেষ্টা করেন।

৪। **শিক্ষণের ভুল পদ্ধতি**—অনেক ক্ষেত্রে শিক্ষক মহাশয় গণিত শিক্ষা
দেন ভুল পদ্ধতিতে। প্রায়ই দেখা যায়, শিক্ষক মহাশয় সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে জ্যামিতি
শেখান এবং অবরোহী পদ্ধতিতে পাটীগণিত ও বীজগণিত শেখান। এতে ছাত্রদের

স্বাধীন চিন্তার গতিপথ রুদ্ধ হয়ে যায়। ছাত্রদের বিচারশক্তি প্রয়োগ করতেও কোন প্রকার উৎসাহ দেওয়া হয় না। সবচেয়ে বড় কথা—শ্রেণীতে শিক্ষক মহাশয়ই একমাত্র বক্তা এবং ছাত্ররা নীরব শ্রোতা মাত্র। শ্রেণীর মধ্যে ছাত্রদের সক্রিয় অংশ গ্রহণের কোনপ্রকার সুযোগই দেওয়া হয় না। শিক্ষণ পদ্ধতি ছাত্র-কেন্দ্রিক না হয়ে হয় বিষয়-কেন্দ্রিক।

৫। **পরীক্ষা শাসিত শিক্ষণ**—আর একটি কারণ হল পরীক্ষার প্রভাব। বর্তমানের শিক্ষণ-পদ্ধতি পরীক্ষার দ্বারা নিয়ন্ত্রিত। শিক্ষক মহাশয় শিক্ষণের সময় পরীক্ষাতে পাশ করার লক্ষ্যটিতেই তাঁর মনোযোগ কেন্দ্রীভূত করে থাকেন। আবার পরীক্ষার প্রয়োজনের দিকে লক্ষ্য রেখেই প্রত্যক্ষভাবে এবং পরোক্ষভাবে শিক্ষণ পদ্ধতি এবং পাঠক্রম নির্ধারিত হয়ে থাকে। পরীক্ষা পাশের লক্ষ্য সরিয়ে রেখে গণিত সম্বন্ধে নূতন দৃষ্টিভঙ্গী গড়ে তোলার কোন প্রচেষ্টাই দেখা যায় না। কাজেই আমরা এ কথা বলতে পারি, শিক্ষণ পদ্ধতি ও বিষয়বস্তু নির্বাচনে শিক্ষকের প্রভাব যতটা, পরীক্ষকের বা স্কুল পরিদর্শকের প্রভাব তার চেয়ে অনেক বেশী।

৬। **অতিদীর্ঘ পাঠক্রম**—স্কুলপাঠ্য গণিতের পাঠক্রমটি অযথা অত্যন্ত দীর্ঘ করা হয়েছে। কম সময়ের মধ্যে অত্যন্ত দীর্ঘ পাঠক্রম শেষ করতে হয় বলে শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দেবার কোন সুযোগই পান না। আবার পঠনের গতি অত্যন্ত দ্রুত বলে ছাত্ররা অধীত বিষয় সম্বন্ধে চিন্তা করার বা বিষয়টি আয়ত্ত করার কোন সময় পায় না। আবার অনেক অধ্যায়ে এমন বিষয় সন্নিবিষ্ট আছে যেগুলির বাস্তব কোন মূল্যই নেই।

৭। **পাঠাগার ও পাঠ্যপুস্তকের অভাব**—গণিতের পাঠ্যপুস্তক বা প্রাসঙ্গিক পুস্তক সমন্বিত পাঠাগার পৃথকভাবে কোন স্কুলে আছে বলে জানা যায়নি। আর গণিতের পরীক্ষাগার গড়ে তোলা আমাদের দেশে এখনও কল্পনামাত্র। যে সমস্ত পাঠ্য-পুস্তক বাজারে প্রচলিত আছে, সেগুলি বেশ উচ্চমানের নয়। অনেক পাঠ্যপুস্তকে মুদ্রণের ভুল তো আছেই, যথেষ্ট সংখ্যক উদাহরণও থাকে না। আবার অনেক পুস্তকে উদাহরণের একটি, কি দুটি অঙ্কের সমাধান করেই উদাহরণ শেষ হয়ে যায়। কি ভাবে সমাধান করা হল এবং তার প্রতিটি স্তরের ব্যাখ্যা প্রায়ই থাকে না। ফলে কোন একটি বিশেষ সমাধান হৃদয়ঙ্গম করতে হলে ছাত্রদের শিক্ষকের সাহায্য নেওয়া ছাড়া কোন উপায় থাকে না। অথচ পাঠ্যপুস্তক হওয়া উচিত "লিপিবদ্ধ শিক্ষক"। শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীতে যে যে ভাবে পাঠ দেন, ঠিক সেইভাবেই সমস্যাগুলির সমাধান পাঠ্যপুস্তকে লিপিবদ্ধ থাকবে যাতে ছাত্ররা শিক্ষকের সাহায্য না নিয়েও কেবলমাত্র পাঠ্যপুস্তকের সাহায্যেই কোন বিশেষ সমস্যার বিভিন্ন অংশগুলি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে।

প্রতিকার (Remedies)—গণিতের নীরস ও একঘেয়ে পাঠকেও সরস ও চিত্তাকর্ষক করা সম্ভব। অবশ্য এজন্য শিক্ষক মহাশয়কেও কিছুটা কষ্ট স্বীকার করতে হবে ও পরিশ্রমী হতে হবে। সঠিক পদ্ধতি অবলম্বন করলেই গণিত পাঠের এক-

ঘেয়েমি অনেকাংশে দূর করা যায়। নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলি অবলম্বন করলে অনে
সুফল পাওয়া যেতে পারে।

(১) শিক্ষককে গণিতে উপযুক্ত শিক্ষণ-প্রাপ্ত হতে হবে এবং তাঁর কাজের প্রকৃ
সঠিকভাবে জানতে হবে। প্রাত্যহিক পাঠদানের পূর্বে মনোবিজ্ঞান-সম্মত ভা
পাঠটীকা তৈরী করে যেতে হবে। ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নূতন পাঠ দি
হবে। যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে, সেখানেই গণিতকে দৈনন্দিন কার্যাবলী
সঙ্গে যুক্ত করে দিতে হবে। আবার ছাত্ররা যাতে গণিতের জ্ঞান পরবর্তী কা
দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োগ করতে পারে তার শিক্ষা দিতে হবে। তত্ত্বগত জ্ঞানের চে
ব্যবহারিক জ্ঞানের দিকেই বেশী জোর দিতে হবে। যতদূর সম্ভব যান্ত্রিক পদ্ধতি
পাঠদান বন্ধ করতে হবে।

(২) প্রতিটি ছাত্রের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে পারলে ভালো হয়।
সম্ভব না হলে—অন্ততঃ স্বল্পবুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রদের প্রতি ব্যক্তিগত মনোযোগ দিতে হবে
পাঠদান পদ্ধতি বিভিন্ন শ্রেণীতে এবং বিভিন্ন ছাত্রের ক্ষেত্রে বিভিন্ন হবে। কো
একটি সমস্যার কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে সমাধান করলে চলবে না। ছাত্রদে
বুদ্ধির পরিবর্তনের সঙ্গে সমাধানের পদ্ধতিও পরিবর্তিত করতে হবে। যারা খুব দ্রু
পাঠগ্রহণ করে, যারা সাধারণ ছাত্র এবং যারা খুব ধীরে পাঠগ্রহণ করে—তাদে
প্রত্যেকের জন্য সমস্যাসমূহের প্রকৃতি ভিন্ন হবে। ছাত্র ও ছাত্রীদের পাঠক্রমও বিভি
হবে।

(৩) শিক্ষণ পদ্ধতিতে ছাত্রেরা নিষ্ক্রিয় না থেকে সক্রিয় অংশ গ্রহণ করবে। কো
নূতন শিক্ষণের পূর্বে সেই সূত্র সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্ন নির্বাচন করতে হবে। ছাত্র
যাতে ব্ল্যাক-বোর্ডে লিখতে উৎসাহ বোধ করে তার ব্যবস্থা করতে হবে।

(৪) বিষয়বস্তুটি চিত্তাকর্ষক করে তুলতে হবে। যাই পড়ানো হোক না কে
ভালোভাবে পড়াতে হবে। কঠিন বা নীরস বিষয়বস্তু এড়িয়ে গেলে চলবে না
সমস্যার গতানুগতিক ভাষা ছাত্রদের নিকট পরিষ্কারভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। ছাত্র
যাতে যান্ত্রিক পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধান না করে তাদের বুদ্ধি প্রয়োগ করে, তা
জন্য তাদের উৎসাহ দিতে হবে। শিক্ষক মহাশয় যে পদ্ধতিতে সমাধান করেন, ছা
যদি ঠিক সেইভাবে সমাধান না করে নিজস্ব পদ্ধতিতে সমাধান করে, তবে তাদে
প্রশংসাই করা উচিত। খুব দ্রুত সমাধান করা থেকে ছাত্রদের বিরত করতে হবে
কারণ তাতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনাই থাকে। সঠিক পদ্ধতিতে, স্তরে স্তরে কিভা
সমাধান করতে হয়—তা ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে। অঙ্কের সঠিক উত্তরটাই ব
কথা নয়। সঠিক পদ্ধতিতে সমাধান করা, যথার্থতা, পরিষ্কার-পরিচ্ছন্নতা, নির্ভু
উত্তর—সবগুলিই সমান প্রয়োজনীয়।

(৫) অভ্যাসের ফলেই সিদ্ধিলাভ হয়। গণিতে অভ্যাস বা পুনরাবৃত্তি একা
প্রয়োজন। স্মৃতির উপর খুব বেশী নির্ভর করলে চলবে না। ছাত্ররা শ্রেণীতে য
বুঝতে পেরেছে তা যেন পুনরাবৃত্তির সাহায্যে সঠিকভাবে মনে রাখতে পারে। একবা

মাত্র শুনেই যদি তারা ভাবে যে পাঠটি তাদের মুখস্থ হয়ে গেছে তা হলে খুব ভুল হবে। অনেক ভালো ছেলে স্মৃতির উপর বেশী নির্ভর করে পরীক্ষা গৃহে (Examination Hall) সব কিছু ভুল করে আসে।

(৬) গণিত পাঠের একটা আদর্শ পরিবেশ আছে। এর জন্য চাই শান্ত ও নীরব একটি পরিবেশ। ছাত্ররা যেন শ্রেণীতে গোলমাল না করে।

(৭) ছাত্রদের যে সমস্ত গৃহকাজ দেওয়া হয়, সেগুলি যথাযথভাবে পরীক্ষা করতে হবে। ভুলগুলি সংশোধন করে দিতে হবে। 'রাফ-কাজ' বন্ধ করতে হবে। অনেক সময় ছাত্ররা শ্রেণীতে রাফ করে ও পরে বাড়ীতে সেগুলি ভালোভাবে লিখে থাকে। এ অভ্যাসটি আসলে কু-অভ্যাস। এতে সময় যেমন বেশী লাগে, তেমনি শ্রেণীতে নিয়ম মাফিক কাজ করার অভ্যাসটিও ছাত্রদের মধ্যে গড়ে ওঠে না।

(৮) গণিতের পাঠক্রমটি অনড় ও অপরিবর্তনীয় হওয়া চলবে না। এটি যাতে নমনীয় ও পরিবর্তনশীল হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৯) গণিতের যে সমস্ত অধ্যায়ের বিষয়বস্তুর সঙ্গে দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে কোনপ্রকার যোগ আছে সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর অধিক গুরুত্ব আরোপ করতে হবে। ছাত্ররা যেন বুঝতে পারে গণিত শিক্ষণ হচ্ছে ভবিষ্যৎ জীবনের প্রস্তুতি এবং এর শিক্ষণের ফলে অন্যান্য বিষয়গুলির শিক্ষণও সহজ হয়। পাটীগণিত শিক্ষণকে নাগরিকতার শিক্ষা বলা যেতে পারে। এই জন্য গণিতের পাঠক্রমকে কিছুটা তত্ত্বগত এবং কিছুটা "হিসাব-সম্বন্ধীয়" বা ব্যবহারগত করতে হবে।

(১০) গণিতের সমস্যাগুলি যেন সম্পূর্ণ কাল্পনিক না হয়ে সমস্যাগুলি যাতে বাস্তব জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হয়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

(১১) ছাত্রদের প্রতি শিক্ষকের মনোভাব হবে বন্ধুসুলভ এবং সহানুভূতি সম্পন্ন। যাদের বুঝতে একটু বেশী সময় লাগে, তাদের প্রতি নির্দয় হলে ফল আরো খারাপ হতে পারে।

(১২) শিক্ষণ-পদ্ধতিতে পরীক্ষা-নিরীক্ষার প্রতি যেন শিক্ষক মহাশয় আগ্রহী হন। শিক্ষণ-পদ্ধতি যেন স্থিতিশীল না হয়ে গতিশীল হয়।

(১৩) গণিত-শিক্ষণে পাঠ্যপুস্তকটি যে সম্পূর্ণ অন্ধভাবে অনুসরণ করে চলতে হবে এমন কোন কথা নেই। পাঠ্যপুস্তকটি লক্ষ্যে পৌছানোর একটি উপায়মাত্র। এটি নিজে কিন্তু একটি লক্ষ্য নয়। আবার বৎসরের প্রথমে পাঠ্যপুস্তক নির্বাচনের সময়ও বিশেষ যত্ন নিতে হবে। পাঠ্যপুস্তকের আকার যেন অতি বৃহৎ না হয়। যতটুকু প্রয়োজন, সেইটুকু পাঠ্যপুস্তকের মধ্যে থাকলেই চলবে। আবার পাঠ্যপুস্তকে যেন সমস্ত সমস্যার সমাধান না করা থাকে বা প্রতি সমস্যার সমাধানের ইঙ্গিত না দেওয়া থাকে। কারণ সে ক্ষেত্রে ছাত্রদের স্বাধীন ও মৌলিক চিন্তাধারা ব্যাহত হবে।

(১৪) শিক্ষকের পাঠদান-পদ্ধতি কতদূর সফল হয়েছে এবং ছাত্ররা কতটা বুঝতে পেরেছে তা জানবার জন্য সাপ্তাহিক পরীক্ষার ব্যবস্থা করতে হবে। নম্বর দানের সময়

ছাত্রদের প্রতিটি ভুল নির্দেশ করে দিতে হবে। ছাত্ররা যেন তাদের উত্তরপত্রে ভুলগুলি সংশোধন করে নেয়।

(১৫) গণিতে আগ্রহ সৃষ্টি করার উদ্দেশ্যে "গাণিতিক সমাজ" (Mathematical Society) গড়ে তোলা যেতে পারে। স্থানীয় এবং দূরবর্তী স্থানের গণিত শিক্ষকদের আমন্ত্রণ করে এনে বক্তৃতা দেওয়ার ব্যবস্থা করা যেতে পারে। ভারতীয় ও বৈদেশিক খ্যাতনামা গণিতবিদদের জীবনী ও পুস্তক সম্বন্ধে আলোচনা করা যেতে পারে।

(১৬) ছাত্ররা যাতে গণিত সম্বন্ধীয় চার্ট, মডেল প্রভৃতি তৈরী করে, তার শিক্ষা দিতে হবে। "গাণিতিক খেলনা" (Mathematical Toy) তৈয়ী করারও ব্যবস্থা করতে হবে। গুরুত্বপূর্ণ সূত্র—সম্পাদ্য, উপপাদ্য প্রভৃতির উদাহরণ—কার্ডবোর্ডের উপর সুন্দরভাবে প্রকাশ করা যায়।

(১৭) স্কুলের লাইব্রেরীতে যাতে গণিতসম্বন্ধীয় ভালো ভালো পাঠ্যপুস্তক থাকে তার ব্যবস্থা করতে হবে। স্কুলের নির্বাচিত পাঠ্যপুস্তক ছাড়াও যেন অন্য পাঠ্যপুস্তকও থাকে।

(১৮) গণিতে নম্বর দানের পদ্ধতির পরিবর্তন করতে হবে। মূল্যায়ন সংখ্যাবাচক মূল্যে না করে প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে করাই সুবিধাজনক। যেমন : A—খুব ভালো, B—ভালো, C—মাঝারী, D—খারাপ এবং E—খুব খারাপ।

(১৯) গণিতের ধাঁধা বা মজার উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদের আগ্রহ সৃষ্টি করা যায়। যেমন :—

$$1 \times 9 + 2 = 11 \qquad 1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 9 + 3 = 111 \qquad 12 \times 8 + 2 = 98$$

বা

$$123 \times 9 + 4 = 1111 \qquad 123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111 \qquad 1234 \times 8 + 4 = 9876$$

আরো কতকগুলি প্রয়োজনীয় প্রস্তাব—

(১) ছাত্ররা অনেক সময় গণিতের প্রয়োজনীয় অংশগুলির দিকে বিশেষ দৃষ্টি না দিয়ে সমস্ত পাঠটিই মুখস্থ করে। কিন্তু গণিত বুঝতে হয়—মুখস্থ করা যায় না। গণিতের প্রতিটি স্তর উত্তমরূপে হৃদয়ঙ্গম করা উচিত। কোন একটি স্তর কেন হল, তার জন্য আর কি হতে পারে, (why and wherefore), এ সমস্ত ভালোভাবে জানা উচিত। এক কথায় বলা যেতে পারে, অন্তর্দৃষ্টির সাহায্যে গণিত শিক্ষা করলে কখনও ভুল হবার সম্ভাবনা থাকে না।

(২) সহজ পদ্ধতির অঙ্ক বা যে সমস্ত অঙ্কের মুখে মুখে উত্তর দিতে বলা হয় সেগুলি বাদ দিলে চলবে না। তেমনি জ্যামিতির কোন সমস্যার (Rider) সমাধান করতে পারবে এই বিশ্বাসে সন্তুষ্ট হয়ে সেটি ফেলে রাখলে চলবে না। প্রতিটি সমস্যার সমাধান যেন ছাত্ররা স্বাধীনভাবে করতে পারে। তাছাড়া তাদের সঞ্চিত বা আহরিত জ্ঞানের যাতে সার্থক প্রয়োগ ঘটে, সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৩) ছাত্রদের অধীত অংশ বার বার পুনরাবৃত্তি করতে হবে। জানা আছে, এ ধারণা নিয়ে বসে থাকলে পুনরাবৃত্তির অভাবে জানা জিনিসের ভুল হতে পারে।

(৪) প্রতিটি জ্ঞান বা জ্ঞানের অংশ যেন ছাত্ররা সঞ্চিত করে রাখে। সমস্ত জ্ঞানই তারা সবসময় ব্যবহার করবে না ঠিকই, কিন্তু জ্ঞান আহরণ ও সঞ্চয় করতে গিয়েই তাদের সত্যের সঙ্গে পরিচয় হবে (Right is right and to follow right is wisdom)।

(৫) ছাত্ররা যেন গণিতকে ভালোবাসতে শেখে। গণিত শিক্ষণে তাদের যেন মনোযোগ বৃদ্ধি পায় সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

(৬) বিশ্লেষণে দক্ষতা ও নির্ভুল উত্তরদানের ক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য মানসিক হিসাব করার পদ্ধতিটি বেশ ভালোভাবে আয়ত্ত করে নিতে হবে। গণিতের চর্চার ফলে যে রকম মনোযোগ বৃদ্ধি পায়, এমনটি আর কোন বিষয়েই হয় না। গণিত চর্চার ফলে বিচারকরণের ক্ষমতাও বৃদ্ধি পায়।

নূতন পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা :—

গণিতশাস্ত্রটি দিন দিন যেমন প্রয়োজনীয় হচ্ছে, তেমনি জনপ্রিয়ও হচ্ছে। বিংশ শতাব্দীর বিজ্ঞানের যুগে গণিত একটি অপরিহার্য বিষয় হিসাবে পরিগণিত হয়েছে এবং এখনও হচ্ছে। জীবনের প্রতিটি পদক্ষেপে গণিত বন্ধুর মতো এগিয়ে আসছে। কৃষি-শিল্প-বাণিজ্য-সর্বত্রই গণিতের জয়জয়কার। ইলেকট্রনিক যন্ত্র, কম্প্যুটার, অটোমেশন ইত্যাদির ফলে দিন দিন গণিতজ্ঞের চাহিদা বেড়েই চলেছে। এর একটা প্রতিফলন যে স্কুলপাঠ্য গণিতেও আসবে সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই।

কৃষি, শিল্প ও বাণিজ্যের ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অত্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে। এগুলির যথাযথ উন্নতির জন্য গণিতের সার্থক ব্যবহার প্রয়োজন বলে এই সমস্ত বিভাগের কর্মকর্তাদের গণিত সম্বন্ধে উত্তম জ্ঞান অর্জন করার প্রয়োজন অনুভূত হচ্ছে। গণিতের চিন্তাধারাই হল সুশৃঙ্খল চিন্তাধারা। এখানে অবাস্তব ও অসংলগ্ন চিন্তাধারার কোন স্থানই নেই। বাস্তব জগতে এমন অনেক সমস্যার সম্মুখীন হতে হয়, যেগুলি সম্বন্ধে চিন্তা করতে, তাদের স্বরূপ ও প্রকৃতি নির্ণয় করতে এবং সেগুলির সমাধানের পন্থা অবলম্বন করতে হলে গণিতের সাহায্য প্রয়োজন। কাজেই সমস্যাগুলির সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণের ব্যাপারে গণিতই সাহায্য করে।

গণিতে কি শেখানো হচ্ছে সেটা বড় কথা নয়, বড় কথা হল—গণিত কিভাবে শেখানো হচ্ছে। ছাত্রদের কৌতূহল প্রবৃত্তির দিকে লক্ষ্য রেখেই পঠন-পাঠন ও পরীক্ষা গ্রহণের ব্যবস্থা করা হয়। কিন্তু এই প্রবৃত্তির জন্যই আবার ছাত্র অনেক সময় সমস্যাটি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম না করে সঠিক ও নির্ভুল উত্তর দেবার জন্য উঠে পড়ে লাগে। এটি বন্ধ করতেই হবে।

ছাত্রদের মনে অতি শৈশব থেকেই এই ধারণা জন্মিয়ে দেওয়া হয় যে গণিত মানেই হল অবাস্তব ও অপার্থিব একটা বিষয়। বাস্তবের সঙ্গে এর কোন সম্বন্ধই নেই।

তাছাড়া বিভিন্ন অংশগুলির পরিচয়ও তারা সঠিকভাবে গ্রহণ করে না। ফলে অনেকেই Pythagoras-এর প্রথম P-টি লেখেন ছোট হাতে। কারণ Pythagoras যে একজন লোক এ ধারণাই তাদের থাকে না। কিংবা কোন ছাত্রকে যখন জিজ্ঞাসা করা হয় 1·2″ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ? তখন ছাত্র উত্তর দেয় :—

ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$, $r=1{\cdot}2''$ $\therefore$ $r^2=1{\cdot}44''$, তারপর সে log table থেকে π-এর মান নির্ণয় করে, $\pi=3{\cdot}142$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=3{\cdot}142\times 1{\cdot}44$.

এখানে ছাত্র ভেবে দেখে না যে π মানটি আসন্ন মানে নেওয়া হয়েছে এবং দশমিকের দুই স্থানের পর থেকে আর তার উত্তরটি নির্ভুল হয়নি। সচরাচর স্কুলে এমন প্রশ্ন দেওয়া হয় যার সঠিক উত্তর নির্ণয় করাই সম্ভব। কিন্তু এগুলির তত্ত্বগত এবং ব্যবহারিক উভয় প্রকার মূল্যই অত্যন্ত কম। এর ফলে বিভিন্ন মাত্রাবিশিষ্ট আসন্ন মানের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় ঘটে না।

অনেক সময় কৃত্রিম উপায়ে বা পাঠ্যপুস্তক প্রদর্শিত উপায়ে গণিত শেখানো হয়ে থাকে। এতে অনেক সময় প্রতীক চিহ্নও ব্যবহার করা হয়। কিন্তু এ পদ্ধতি যান্ত্রিক ও গতানুগতিক। শিল্পক্ষেত্রে যে গণিতের প্রয়োজন তাতে বাস্তবের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ রাখা উচিত।

স্কুলে লেখচিত্রের কোন প্রকার প্রয়োগ নেই বললেই চলে। কিন্তু বর্তমানে অধিকাংশ বিষয়েই লেখচিত্রের বহুল প্রচলন দেখা যায়। অনেক সংখ্যার সাহায্যে যে তত্ত্বটি প্রকাশ করা কঠিন, লেখচিত্রের সাহায্যে সেই তত্ত্বকে অনেক সহজেই প্রকাশ করা সম্ভব। এই জন্যই বর্তমানে অর্থনীতি, সমাজবিদ্যা, মনোবিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়ে লেখচিত্র অধিক পরিমাণে ব্যবহার করা হচ্ছে।

এইজন্যই গতানুগতিক পদ্ধতি বাতিল করে নূতন পদ্ধতিতে গণিত শিক্ষা দেওয়ার প্রয়োজনীয়তা এত ব্যাপকভাবে অনুভূত হচ্ছে।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. What are the causes of backwardness in mathematics. Suggest remedies.

2. It is often found that Students are backward in mathematics though they show good records in other Subjects. What may be the causes of Such backwardness ?

3. Do you think that teachers are equally responsible for the backwardness of Students in mathematics ? How will you rectify yourself ?

নবম অধ্যায়

গণিত শিক্ষণে প্রতিষেধকমূলক ব্যবস্থা
(Remedial Teaching in Mathematics)

অধিকাংশ গণিত শিক্ষকেরই এই অভিযোগ যে ছাত্ররা গণিতে বিশেষ আগ্রহী হয় না, গণিতে তাদের ফল আশানুরূপ নয় এবং গণিত পরীক্ষাতে তারা যে নম্বর পায় তা অন্যান্য বিষয়ের নম্বরের তুলনায় কম। গণিত একটি অমূর্ত (abstract) বিষয়, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু অন্যান্য অমুর্ত বিষয় যেমন চিত্তাকর্ষক করা সম্ভব, গণিতকেও তেমনি চিত্তাকর্ষক করা যায়। কোন একজন ছাত্রকে গণিত শিক্ষণের পক্ষে অযোগ্য বিবেচনা করা—মনস্তত্ত্ব ও শিক্ষাতত্ত্ব—উভয় তত্ত্বের দিক থেকেই অত্যন্ত ভুল। যে কোন স্বাভাবিক বুদ্ধিসম্পন্ন ছাত্র উত্তমরূপে গণিত শিখতে পারে। কিন্তু তার জন্য বিশেষ কতকগুলি সর্ত থাকা প্রয়োজন। যেমন, শিক্ষককে দক্ষ হতে হবে, তাঁর ধৈর্য থাকা একান্ত প্রয়োজন, তিনি মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে পাঠদান করবেন এবং ছাত্রের নিকট ভীতির কারণ না হয়ে তার বন্ধু, দার্শনিক ও পথ-প্রদর্শকের ভূমিকা গ্রহণ করবেন। বুদ্ধিহীনতা বা স্বল্পবুদ্ধিই গণিতে অনগ্রসরতার কারণ—এ কথা কোন কোন ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সর্বক্ষেত্রে নয়।

বুদ্ধিহীনতা ছাড়াও আরো অন্যান্য অনেক কারণ আছে যেগুলি গণিতে অনগ্রসরতার কারণ হিসাবে পরিগণিত হতে পারে। শিক্ষক মহাশয়কে প্রতি ক্ষেত্রে অনগ্ররতার কারণগুলি খুঁজে বের করতে হবে। কেবলমাত্র কারণগুলি খুঁজে বের করেই শিক্ষকের কাজ শেষ হয় না। কারণগুলি দূরীভূত করা অর্থাৎ অনগ্রসরতা দূর করার উপায়ও তাঁকে খুঁজে বের করতে হবে। এর জন্যই বিভিন্ন প্রতিষেধকমূলক ব্যবস্থা অবলম্বন করা প্রয়োজন।

এখন দেখা যাক—অনগ্রসরতার কারণগুলি কি কি হতে পারে? কারণগুলিকে **প্রধানতঃ চার** ভাগে ভাগ করা যেতে পারে। যথা:—

(১) ছাত্র-সম্বন্ধীয়, (২) শিক্ষক সম্বন্ধীয়, (৩) পরিচালন-সম্বন্ধীয়, এবং (৪) অন্যান্য। এখন প্রত্যেকটি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

(১) ছাত্র-সম্বন্ধীয় (Concerning the pupils):—

(ক) বিষম শ্রেণী (Heterogeneous class):—ক্লাসের সব ছাত্র সবদিক দিয়ে একেবারে এক হয় না। বুদ্ধির দিক থেকেই এই পার্থক্য সবচেয়ে বেশী প্রকট হয়ে থাকে। সাধারণতঃ সাধারণ বুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রদের দিকে নজর রেখেই পাঠ পরিচালনা করা হয়ে থাকে। এত স্বল্পবুদ্ধি বিশিষ্ট ছাত্রেরা উপকৃত হয় না। তারা কিছুদিনের মধ্যে গণিতে আগ্রহ হারিয়ে ফেলে। অপর ছাত্রদের সঙ্গে তুলনা করে তারা নিজেদের মধ্যে একটা অনগ্রসরতার মনোভাব গড়ে তোলে এবং তার ফলে শ্রেণীর সুস্থ

পরিবেশটিও নষ্ট হয়ে যায়। এদের পৃথক দলে রেখে শিক্ষার ব্যবস্থা করলে ফল ভালো হয়।

(খ) **শারীরিক, পারিবেশিক ও প্রাক্ষোভিক কারণ**ঃ—অন্যান্য বিষয়ের তুলনায় গণিতে খুব সহজেই শারীরিক ও মানসিক ক্লান্তি এসে যায়। গণিতের ক্লান্তি মূল্য' (fatigue-value) অত্যন্ত বেশী। তা ছাড়া গণিত শিক্ষণে অখণ্ড মনোযোগের প্রয়োজন। শরীর দুর্বল বা রুগ্ন থাকলে, পরিবেশ প্রতিকূল থাকলে এবং প্রক্ষোভের মাত্রা অত্যধিক হলে গণিত-শিক্ষণ সম্ভব হয় না। ক্রমাগতভাবে এইরূপ চললেই গণিত সম্বন্ধে একটা বিরূপ মনোভাব গড়ে উঠবেই।

(গ) **শারীরিক ত্রুটী**ঃ—শারীরিক ত্রুটীও গণিতে অনগ্রসরতার অন্যতম কারণ। যে সমস্ত ছাত্রের দৃষ্টিশক্তির কোন ত্রুটী আছে, বা যারা কানে খাটো, তারা শ্রেণীকক্ষে ঠিকমত মনোযোগ দিতে পারে না। এরা খুব সহজেই গণিতে অনগ্রসর হয়ে পড়ে।

(ঘ) **দীর্ঘ অনুপস্থিতি**ঃ—ছাত্র যদি দীর্ঘদিন কোন শ্রেণীতে অনুপস্থিত থাকে, তাহলে পাঠক্রমের ধারাটির সঙ্গে তাঁর যোগাযোগ বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়। পূর্বেকার পাঠগুলির সঙ্গে পরিচয় না থাকার জন্য নূতন পাঠগুলি আয়ত্ত করা তার পক্ষে অত্যন্ত অসুবিধাজনক হয়।

(ঙ) **প্রচেষ্টার অভাব**ঃ—অনেক সময় ছাত্ররা গভীর আগ্রহের সঙ্গে গণিতের পাঠ আরম্ভ করে। কিন্তু এই আগ্রহ ক্ষণস্থায়ী প্রকৃতির হয়। ফলে কিছুক্ষণ পরেই আগ্রহের অভাবে গণিত তার নিকট নীরস বিষয় বলে প্রতিভাত হয়।

(২) **শিক্ষক-সম্বন্ধীয়** (Concerning the teacher) :—

(ক) অনেক সময় শিক্ষক মহাশয়রা গণিত-শিক্ষণের উদ্দেশ্য ঠিকমত বুঝতে পারেন না। উদ্দেশ্যহীনতার ফলে বাস্তব অভিজ্ঞতার সঙ্গে গণিতের যোগসূত্রটি নষ্ট হয়ে যায়। তাছাড়া নির্দিষ্ট সময়ে পাঠক্রম (syllabus) শেষ করার জন্য শিক্ষক মহাশয়রা অত্যন্ত দ্রুত গতিতে এগিয়ে যান। ফলে ছাত্রদের নিকট গণিত একটি নীরস ও অর্থহীন বিষয়ে পর্যবসিত হয়।

(খ) গণিত একটি অমূর্ত বিষয় হলেও এর অনেকখানিই মূর্ত বস্তুর সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। কিন্তু শিক্ষক মহাশয় এ ব্যাপারে কোন পরীক্ষা-নিরীক্ষা করার প্রচেষ্টাই করেন না। গণিতের যে একটা ব্যবহারিক রূপ আছে সে দিকটা সম্পূর্ণ অবহেলা করে শিক্ষক মহাশয় কেবলমাত্র তাত্ত্বিক দিকটাই তুলে ধরেন। অপ্রিয় হলেও বলতে হয়, গণিত সম্বন্ধে অনেক ধারণার (concept) সুস্পষ্ট জ্ঞানও অনেক শিক্ষক মহাশয়ের নেই।

(গ) অনেক সময় শিক্ষক মহাশয় প্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলিতে সময় কম দিয়ে, অপ্রয়োজনীয় অধ্যায়গুলিতে অনর্থক বেশী সময় দিয়ে থাকেন। এ অভ্যাসটি অত্যন্ত ক্ষতিকর।

(ঘ) বিভিন্ন শ্রেণীর পক্ষে উপযুক্ত করে সিলেবাসটি তৈরী করা হয় না। আবার সিলেবাস তৈরী করা থাকলেও শিক্ষাদানের সময় শিক্ষক মহাশয় ঠিক ধারাটি অনুসরণ করেন না। ফলে নীচু শ্রেণীতে কঠিন বিষয় এবং উঁচু শ্রেণীতে সহজ পাঠের ব্যবস্থা হয়ে যায়।

(ঙ) পরীক্ষা, পর্যালোচনা, পুনরালোচনা ইত্যাদির জন্য অযথা বেশী সময় দেবার একটা প্রবণতাও শিক্ষক মহাশয়দের থেকে যায়।

(চ) ব্যক্তিগত মনোযোগ দেওয়া শিক্ষক মহাশয়ের পক্ষে সম্পূর্ণ অসম্ভব হয়ে পড়ে। অনেক সময় শ্রেণীতেই অনেক ছাত্র তাদের অসুবিধার কথা শিক্ষক মহাশয়কে জানায়। কিন্তু শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীতে সে অসুবিধা দূর করার কোন চেষ্টা করেন না। অনেকে আবার বিরক্ত হন। এর ফলে ছাত্ররা নিরুৎসাহ হয়ে পড়ে এবং তাদের অসুবিধাটি থেকেই যায়।

(৩) পরিচালন সম্বন্ধীয় (Concerning the Administration) :—

(ক) পরীক্ষার ফলাফলের ভিত্তিতে প্রমোশন দেওয়ার পদ্ধতিটি অত্যন্ত ত্রুটিপূর্ণ। অনেক সময় গণিতে ফল খারাপ করা সত্ত্বেও স্কুলের ছাত্রসংখ্যা ঠিক রাখার জন্য ছাত্রকে উঁচু শ্রেণীতে তুলে দেওয়া হয়। আবার বর্তমানে বহুমুখী শিক্ষা ব্যবস্থাতে যে সমস্ত ছাত্র কলা বিভাগে (Humanities Stream) ভর্তি হয়, তাদের গণিতে ভালো ফল করাটা একটা প্রয়োজনীয় ব্যাপারই নয়। তারা গণিতে ৩০% নম্বর পেলেই উত্তীর্ণ হয়ে যায়।

(খ) স্কুলে ছাত্র ভর্তি করার আগে অনেক সময় একটা এ্যাডমিশন টেষ্ট নেওয়া হয়। এটা অত্যন্ত মামুলী ব্যাপার হয়ে দাঁড়িয়েছে। ছাত্রসংখ্যা বাড়াবার জন্য টেস্ট নেওয়া হয় ঠিকই, কিন্তু তার ফলাফলের কোন মর্যাদাই দেওয়া হয় না।

(৪) অন্যান্য কারণ (Other Causes) :—

(ক) স্কুলের বিভিন্ন শ্রেণীর গণিত শিক্ষকদের মধ্যে পরস্পর একটা বোঝাপড়া নেই। কোন একজন শিক্ষক যদি তাঁর শ্রেণীর পাঠক্রম সমাপ্ত করতে না পারেন, তবে তার পরবর্তী শ্রেণীর শিক্ষক আর বাকী অংশটুকু শেষ করার চেষ্টা করেন না। তিনি তাঁর শ্রেণীর নূতন পাঠক্রম অনুসরণ করতে আরম্ভ করেন। ফলে একটা বৃহৎ অংশ তাদের অজানাই থেকে যায়।

(খ) শাস্তি, নিন্দা বা শিক্ষকের সহানুভূতিহীন মনোভাব ছাত্রদের মনে বিরূপ প্রতিক্রিয়ার সৃষ্টি করে।

(গ) পরীক্ষার প্রশ্নপত্র ও নম্বরদানের পদ্ধতিও অনগ্রসরতার জন্য কম দায়ী নয়। শিক্ষক মহাশয়রা সাধারণত প্রশ্নপত্রে অত্যন্ত কঠিন ও চাতুর্যপূর্ণ প্রশ্ন দিয়ে থাকেন। আবার কোন প্রশ্নের উত্তর ভুল হলে শূন্য নম্বর দেওয়া হয়। কিন্তু এ পদ্ধতি অত্যন্ত ত্রুটীপূর্ণ। শূন্য নম্বর পেলে ছাত্রের মনে অত্যন্ত হীনমন্যতার ভাব জন্মে। কোন

প্রশ্নের সঠিক পদ্ধতির জন্য (উত্তর যদি ভুল হয়, তবুও) কিছু নম্বর অন্ততঃ দিতেই হবে। সে ক্ষেত্রে সবচেয়ে কম বুদ্ধিসম্পন্ন বা সবচেয়ে ধীরগতিসম্পন্ন ছাত্রও কিছুটা কৃতিত্ব প্রদর্শনের সুযোগ পায়।

(ঘ) অনেক ছাত্র নীচু ক্লাসে গণিতের মৌলিক নীতিগুলি ভালো করে আয়ত্ত করে না। যেমন—নামতা মুখস্থ করা, গণিতের বিভিন্ন অধ্যায়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করা ইত্যাদি ব্যাপারে তারা সম্পূর্ণ অজ্ঞই থেকে যায়।

(ঙ) কতকগুলি সাধারণ ভুল, মৌলিক দক্ষতার অভাব, শিক্ষণের হার, পূর্বজ্ঞান প্রয়োগে অক্ষমতা এ সমস্তও গণিতে অনগ্রসরতার কারণ। অনেক সময় ছাত্ররা কতকগুলি মৌলিক নীতির মধ্যে পার্থক্য পরিষ্কার বুঝতে পারে না। যেমন $2x$ এবং x^2 বা $3x$ এবং x^3-এর মধ্যে পার্থক্য পরিষ্কারভাবে জানতে হবে। তাছাড়া অধিকাংশ ছাত্রই কোণের সঠিক সংজ্ঞা জানে না। আবার কোণের চিত্র থেকে তার নাম বলা বা কোনও ত্রিভুজের কোণগুলি নির্দেশ করার ব্যাপারে তারা অনেক সময় অক্ষমতা প্রকাশ করে থাকে। সে ক্ষেত্রে ছাত্রদের জন্য পৃথক পদ্ধতির ব্যবস্থা করতে হবে। আবার তাড়াতাড়ি করার জন্য অনেক সময় ছাত্ররা $4 \times 4 = 8$ লিখে থাকে। সেইজন্য প্রথমেই ছাত্রদের তাড়াতাড়ি না করার অভ্যাসটি আয়ত্ত করিয়ে দিতে হবে। মোটামুটিভাবে বলতে গেলে এ সমস্তই হল গণিতে অনগ্রসরতার কারণ। এর পরের করণীয় বিষয় হল—ছাত্রদের দুর্বলতা বা অনগ্রসরতা নির্ণয় করা এবং সেই অনুযায়ী প্রতিষেধকমূলক ব্যবস্থা অবলম্বন করা।

দুর্বলতা নির্ণয় :—

নিম্নোক্ত পদ্ধতিগুলির সাহায্যে ছাত্রদের গণিতে দুর্বলতা নির্ণয় করা সম্ভব হয় :—

১। শিক্ষক মহাশয় প্রতিটি ছাত্রের সঙ্গে পরিচিত হয়ে তার বিশেষ সমস্যা বা চাহিদাগুলির খবর নেবেন।

২। প্রতিটি পরীক্ষার পর ছাত্রদের গণিতের নম্বরগুলি পর্যালোচনা করতে হবে।

৩। প্রতিটি ছাত্রের ভুল কোথায় এবং ছাত্রের কোন্ জায়গায় অসুবিধা হচ্ছে তার প্রতি সবিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে।

৪। স্বল্পবুদ্ধিসম্পন্ন এবং ধীরগতিবিশিষ্ট ছাত্রদের পৃথক করে ডেকে নিয়ে এসে তারা কতদূর শিখেছে তার হিসেব নিতে হবে।

৫। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে সমস্যা অনুযায়ী দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা করে ছাত্রদের দুর্বলতা জেনে নিতে হবে ;

৬। ছাত্রদের সর্বাত্মক পরিচয় লিপি (Cumulative Record Card) রাখতে হবে এবং প্রয়োজন হলেই ঐ লিপি পর্যালোচনা করে সেই অনুযায়ী দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা (Diagnosis Test) প্রয়োগ করতে হবে।

প্রতিষেধকমূলক শিক্ষণ (Remedial Teaching) :

প্রতিষেধকমূলক শিক্ষণের ব্যবস্থা করলে গণিতে ছাত্রদের দুর্বলতা বা আগ্রহের অভাব বহুলাংশে দূর করা সম্ভব। নিম্নোক্ত কতকগুলি উপায়ের সাহায্যে প্রতিষেধক-মূলক শিক্ষণের ব্যবস্থা করা সম্ভব হয়।

(১) গণিত-শিক্ষণে গণিতের ধারণা, মূলতত্ত্ব ও পদ্ধতিগুলির পুনরাবৃত্তি করতে হবে। একই জিনিস বার বার ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করলে সবচেয়ে কম বুদ্ধিবিশিষ্ট ছাত্রও সেটি হৃদয়ঙ্গম করতে সক্ষম হয়।

(২) গণিত একটি অমূর্ত বিষয়। কিন্তু অনেক মূর্ত জিনিসের সাহায্যে গণিত শিক্ষণকে সহজ করা সম্ভব। এর জন্য চিত্র, মডেল, বাস্তব কোন ঘটনা বা লেখচিত্র প্রভৃতির সাহায্য নেওয়া চলতে পারে।

(৩) একঘেয়ে ও একটানা বক্তৃতার বদলে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে পাঠ এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে। 'ক্রমবিকাশমূলক প্রশ্ন' (Developmental question) এবং অনুসন্ধানী প্রশ্নই গণিত শিক্ষণে সবচেয়ে বেশী কার্যকরী হয়।

(৪) কঠিন অধ্যায়গুলিতে শিক্ষক মহাশয়কে অধিক মনোযোগ দিতে হবে।

(৫) ছাত্রদের মধ্যে আত্মবিশ্বাস জাগিয়ে তুলতে হবে। আত্মবিশ্বাস আবার নিম্নোক্ত উপায়গুলির সাহায্যে জাগানো সম্ভব।

(ক) গণিতের সমস্যাগুলি যাতে ছাত্ররা স্বাধীনভাবে সমাধান করতে পারে তার জন্য তাদের উৎসাহিত করতে হবে। একান্ত প্রয়োজন না হলে শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সাহায্য করবেন না।

(খ) অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য তাদের উপযোগী পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে। তাহলে তাদের সমস্যাগুলির প্রকৃতি অপেক্ষাকৃত সহজ হবে।

(গ) ছাত্রদের ছোট ছোট দলে ভাগ করে পৃথকভাবে কাজ দিতে হবে। এতে যেমন দলপ্রীতি গড়ে উঠে, তেমনি সুস্থ প্রতিযোগিতার ভাবও গড়ে উঠে।

(৬) গ্রীষ্মের ছুটি বা অন্য কোন ছুটিতে অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য বিশেষ পাঠের ব্যবস্থা করতে হবে। এতে তাদের দুর্বলতা অনেকটা দূর করা সম্ভব।

(৭) কোন একটি বিশেষ অধ্যায় সকল ছাত্র ভালোভাবে আয়ত্ত না করা পর্যন্ত নতুন কোন অধ্যায়ের পাঠ শুরু করা চলবে না।

(৮) পাঠের ফাঁকে ফাঁকে পুরাতন পাঠের আলোচনা একান্ত প্রয়োজনীয়। অনেক স্কুলে 'সাপ্তাহিক পরীক্ষার' ব্যবস্থা আছে। এতে ছাত্রদের অনগ্রসরতার বা তারা কতটা ভুলে গেছে—তার একটা পরিচয় পাওয়া যায়।

(৯) অনগ্রসর ছাত্ররা গণিতে উন্নতির ভাব দেখালে তাদের স্বীকৃতি দিতে হবে। এতে তাদের প্রেষণা উদ্বুদ্ধ হয়।

(১০) নতুন পাঠ শুরু করার আগে ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের পরিচয় নিতে হবে।

(১১) বাড়ীর কাজ খুব বেশী পরিমাণে দিলে চলবে না। যেটুকু দেওয়া হবে

সেটুকু যাতে যথাযথভাবে পরীক্ষা করা হয় এবং ভুলগুলি শুদ্ধ করে দেওয়া হয় তার ব্যবস্থা করতে হবে।

(১২) অনগ্রসর ছাত্রদের প্রতি শিক্ষক মহাশয় বিশেষ মনোযোগ দেবেন। এ ব্যাপারে কয়েকটি কথা মনে রাখতে হবে।

(ক) অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য যে প্রতিষেধকমূলক শিক্ষণের ব্যবস্থা করা হয়, তাতে ছাত্রদের অবিরাম সাহায্যের প্রয়োজন হয়। শিক্ষক মহাশয়কে এর জন্য যথেষ্ট সময়ের ব্যবস্থা করতে হবে।

(খ) অনগ্রসর ছাত্রদের অনগ্রসরতার জন্য তিরস্কার বা নিন্দা করলে চলবে না। তাদের প্রতি বন্ধুসুলভ ও সহানুভূতিসূচক মনোভাব পোষণ করতে হবে।

(গ) প্রতিষেধকমূলক শিক্ষণ ঠিক সেই জায়গা থেকে শুরু করতে হবে, যেখানে ছাত্রদের অনগ্রসরতাও শুরু হয়েছে। তারপর ক্রমপর্যায়ে পাঠ এগিয়ে চলবে।

(ঘ) এক একটি অধ্যায়ের অনগ্রসরতা এক এক দিনের শিক্ষণে দূর করা সম্ভবও নয়, আবার উচিতও নয়। প্রতিষেধকমূলক শিক্ষণের মাত্রা অপেক্ষাকৃত কম হবে।

(ঙ) অনগ্রসর ছাত্রদের জন্য উপযুক্ত প্রশ্ন তৈরী করতে হবে।

এ সমস্ত পদ্ধতি অবলম্বন করলে অনগ্রসরতা যে বেশ কিছু পরিমাণে দূরীভূত হবে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহই নেই। আবার যারা সাধারণ ছাত্র, এ পদ্ধতিতে তারাও কিছুটা উপকৃত হবে। শিক্ষক মহাশয়কেও এর জন্য কিছুটা অতিরিক্ত পরিশ্রম করতে হবে। বিষয়টিতে অনগ্রসরতার কারণ অনুসন্ধান করে তা দূরীভূত করার সঠিক পদ্ধতি তাঁকে নির্ণয় করতে হবে। অনগ্রসর ছাত্রদের প্রতিদিন সম্ভব না হলেও সপ্তাহে অন্ততঃ ২।৩ দিন পৃথক ভাবে পাঠ দিতে হবে। একই পদ্ধতি শ্রেণীর সকল ছাত্রের পক্ষে সমানভাবে কার্যকরী হয় না বলেই অনগ্রসর ছাত্রদের পৃথক পদ্ধতিতে পাঠদানের ব্যবস্থা করলে সুফল পাওয়া যেতে পারে। তাছাড়া বিদ্যালয়ের ও শ্রেণীর পরিবেশটি সুনিয়ন্ত্রিত করে এবং শিক্ষক-ছাত্রের মধ্যে একটা মধুর সম্পর্ক (Rapport) গড়ে তুলে বেশ ভালো ফল পাওয়া যায়।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. What measures will you adopt to remove backwardness in Mathematics?

2. What do you mean by 'Remedial Teaching'? Discuss fully in case of teaching mathematics.

3. What can be the different Causes of inefficiency in the teaching of mathematics? Describe in detals and suggest remedies.

4. What are the principal reasons for ineffective teaching of mathematics? Suggest remedies.

দশম অধ্যায়

গণিতে মৌখিক কার্যাবলী

(Oral work in Mathematics)

গাণিতিক হিসাবে লেখা একটি অপরিহার্য অঙ্গ ; গণিতের রূপই হল—লিখিত রূপ। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে গণিতে লেখার কাজ বাদ দিয়েও মৌখিকভাবে হিসাব করা সম্ভব। যখন গণিতে লেখার কাজ না করে মৌখিক হিসাব করা হয়, তখন তাকে মৌখিক গণিত বা 'মানসাঙ্ক' বলা হয়। প্রাথমিক স্তরে এই জাতীয় মৌখিক গণিতের যথেষ্ট প্রয়োজনীয়তা আছে। গণিতে কোন অঙ্ক করার সময় কিংবা কোন হিসাব করার সময় অনেক ক্ষেত্রেই মৌখিকভাবে হিসাব বা গণনা করতে হয়। ছাত্রদেরও অনেক কিছু মুখস্থ রাখতে হয়—যেমন নামতা, সূত্র ইত্যাদি। এই মৌখিক কাজের ব্যবহার উঁচু শ্রেণীতেও লক্ষ্য করা যায়। অঙ্ক করতে গিয়ে যদি ছোট ছোট গুণ, ভাগও লিখিতভাবে করতে হয়, তাহলে অনেক সময় লেগে যায়। মৌখিক গণিত বা মানসাঙ্কের সাহায্যে অত্যন্ত দ্রুত সমস্যার সমাধান করা সম্ভব। এই পদ্ধতিকে সমস্যা সমাধানের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিও বলা চলে।

যে কোন বিষয়ের পাঠটীকা পর্যালোচনা করলে দেখা যায় সেখানে আয়োজন স্তরে মৌখিক কাজের উপর সবিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়। অভিযোজন স্তরটিও সাধারণতঃ মৌখিক পর্যায়ের হয়ে থাকে। এই জাতীয় প্রশ্নের মাধ্যমে যেমন ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করা হয়ে থাকে, তেমনি তাদের আগ্রহটিকেও উদ্দীপ্ত করা হয়। অনেক শিক্ষক কেবলমাত্র আয়োজন স্তরে মৌখিক প্রশ্ন করার পক্ষপাতী ; কিন্তু অন্য স্তরে আর মৌখিক প্রশ্নের সঙ্গে কোন সম্পর্কই রাখেন না। এটি কিন্তু মারাত্মক ভুল। Godfrey ও Siddons তাঁদের 'Teaching of Elementary Mathematics' এ ৯ রকম প্রশ্নের উল্লেখ করেছেন যেগুলির সাহায্যে পাঠ শুরু করা উচিত। এই প্রশ্নগুলির উত্তর কিন্তু মুখে মুখে দিতে হয়। বাংলা ভাষায় অনুবাদ করলে প্রশ্নগুলি মোটামুটি এই জাতীয় :

1. $2-{\cdot}2=$ কত ? 2. $6\times{\cdot}5=$ কত হয় ? 3. ·05কে ভগ্নাংশে পরিণত কর।

4. $2{\cdot}25\times10=$ কত 5. ${\cdot}56\div8=$ কত ? 6. $2\frac{1}{4}$ কে দশমিকে পরিণত কর।

7. $5{\cdot}25\div100=$ কত ? 8. 1 টাকার $\frac{2}{5}=$ কত পয়সা ? 9. $(2\frac{1}{2})^2=$ কত ?

অনেক শিক্ষক আবার রুটিন মাফিক মৌখিক প্রশ্ন করার পক্ষপাতী নন। মৌখিক কাজেরও একটা সুনির্দিষ্ট লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য থাকা চাই। তাঁরা বলেন, ছাত্রের পূর্বজ্ঞান

পরীক্ষা করার জন্য, তাদের দুর্বলতা নির্ণয় করার জন্য বা নতুন কোন অধ্যায় পড়ানো পর লিখিতভাবে সমস্যা সমাধানের পূর্বে কিছু মৌখিক প্রশ্ন রাখলে ভালো হয়। এতে বিষয়টি আরো ভালোভাবে উপলব্ধি করা যায়।

হিসাব যখন দীর্ঘ হয় বা সংখ্যাগুলি যখন খুব বড় হয়, তখনই লেখার আশ্রয় নিতে হয়। আবার যখন কোন একটি সমস্যার বিভিন্ন স্তরের মধ্যের সম্বন্ধগুলি খুবই জটিল হয়, তখন সেগুলি আর মনে রাখা যায় না বলেই লিখিত ভাবে তার সমাধান করতে হয়। এক্ষেত্রে বলা যায় আমরা স্মৃতির উপর সম্পূর্ণ নির্ভর করে থাকতে পারছি না। লিখিত গণিত হল মৌখিক গণিতের সুশৃঙ্খল ও বিধিবদ্ধ রূপ। প্রত্যেক লিখিত হিসাবের আগে মৌখিক হিসাবের সাহায্য লওয়া বাঞ্ছনীয়।

এখন দেখা যাক মৌখিক হিসাবের কাজ কি কি! এর বিভিন্ন কাজগুলি সংক্ষেপে আলোচনা করলে দেখা যায় :—

১। মৌখিক হিসাব মনোযোগের সহায়ক। শ্রেণীতে গণিত পাঠদানের সময় শিক্ষক মৌখিক গণিতের সাহায্য নিয়ে থাকেন, কারণ সেক্ষেত্রে প্রতিটি ছাত্রই মনোযোগী হয়।

২। সংক্ষিপ্ত অথচ দ্রুত উত্তর দিতে ছাত্ররা আগ্রহ অনুভব করে।

৩। পাঠের একটি মূর্তরূপ পাওয়া যায়।

৪। মৌখিক হিসাবের সাহায্যে শ্রেণীতে শৃঙ্খলা বজায় রাখা যায়।

৫। আয়োজন ও অভিযোজন স্তরে মৌখিক গণিতের ব্যবহার করার ফলে সময় অত্যন্ত কম লাগে, আর উপস্থাপন স্তরে মৌখিক গণিতের সাহায্যে শিক্ষক বিষয়বস্তু সুন্দর ভাবে ব্যাখ্যা করতে পারেন।

৬। মৌখিক গণিতের সাহায্যে অতি সহজেই ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করা সম্ভব।

৭। মৌখিক হিসাব করার অভ্যাস থেকে চিন্তনের দ্রুততা উৎপন্ন হয়। এর ফলে শিক্ষণের কাজটি সহজ হয় এবং গণিতের হিসাবও নির্ভুল হয়।

৮। মৌখিক গণিত থেকেই লিখিত গণিত সম্বন্ধে একটি পরিষ্কার ধারণা জন্মায়।

৯। ছাত্রদের উপলব্ধিমূলক ক্ষমতা পরিমাপ করা যায় মৌখিক গণিতের সাহায্যে।

১০। শ্রেণীর একঘেয়েমি দূর করার জন্য মৌখিক গণিত খুবই কার্যকরী। কোন কারণে শ্রেণীর ছাত্ররা অমনোযোগী হলে বা বিরক্ত হলে নির্বাচিত মৌখিক প্রশ্নের সাহায্যে তাদের মনোযোগ ফিরিয়ে আনা সম্ভব।

১১। মানসিক প্রস্তুতি ও প্রত্যুৎপন্নমতিতা মৌখিক গণিতের সাহায্যে উৎকর্ষ লাভ করে। এতে তাদের বুদ্ধিরও যথেষ্ট ব্যবহার করতে হয়। তাছাড়া তাদের শ্রবণেন্দ্রিয়ের উন্নতি, কল্পনাশক্তির উৎকর্ষ সাধন, দ্রুত চিন্তনের ক্ষমতা, মানসিক প্রত্যর্পণ প্রভৃতি ও মৌখিক গণিতের ব্যবহারের প্রত্যক্ষ ফল। এর সাহায্যেই সংক্ষিপ্ত নির্ভুল উত্তরে উপনীত হওয়া সম্ভব।

এত সুবিধা থাকা সত্ত্বেও মৌখিক গণিতকে একটি স্বাধীন ও পৃথক বিষয় বলে মনে করা চলবে না। একে লিখিত গণিতের একটি পরিপূরক বলে ধরা যেতে পারে। নূতন পাঠ আরম্ভ করার সময়, পাঠের পুনরালোচনার সময় এবং ছাত্রদের উপলব্ধি করার পরিমাণ জানার জন্য (অর্থাৎ আয়োজন, অভিযোজন ও উপস্থাপন স্তরে) মৌখিক গণিত খুব সার্থকভাবে ব্যবহার করা সম্ভব। তবে মৌখিক গণিতের স্মৃতি দীর্ঘস্থায়ী নয় বলে এর ব্যবহার সীমাবদ্ধ থাকাই বাঞ্ছনীয়।

এবার গণিতের বিভিন্ন শাখাতে কিভাবে মৌখিক প্রক্রিয়া ব্যবহার করা যেতে পারে তা আলোচনা করা যাক।

পাটীগণিত :—

মূল্য নির্ণয়, সুদ নির্ণয় করা, সময় ও কাজের সহজ উদাহরণ, বেগ ও দূরত্বের সহজ উদাহরণ, আয়কর, জীবন-বীমা, সভূয়সমুত্থান, কাল নির্ণয়, ক্ষেত্রফল নির্ণয় ইত্যাদি ক্ষেত্রে মৌখিক গণিত ব্যবহার করা সম্ভব।

বীজগণিত :—

সূত্র-ব্যবহার, মান-নির্ণয় ঋণাত্মক-রাশি, বর্গ, বর্গমূল, লেখচিত্র, ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় ইত্যাদি বিভিন্ন ক্ষেত্রে মৌখিক গণিত ব্যবহার করা হয়।

জ্যামিতি :—

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, গভীরতা ও উচ্চতা নির্ণয়, কোণের পরিমাণ, ত্রিভুজের আকৃতি নির্ণয়, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণের পরিমাণ নির্ণয়, বৃত্ত, ত্রিভুজ ইত্যাদির ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রভৃতি ক্ষেত্রে মৌখিক গণিতের ব্যবহারে যথেষ্ট সুবিধা পাওয়া যায়। জ্যামিতির বিভিন্ন সমস্যার সমাধানও মৌখিক গণিতের সাহায্যে করা সম্ভব। যেমন :—

3″, 4″ এবং 5″ বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব কি না?

একটি ত্রিভুজের একটি কোণ 60°, অপরটি 80°, তৃতীয় কোণটির পরিমাণ কত?—এ জাতীয় সমস্যার সমাধান মৌখিক ভাবেই করা সম্ভব।

তাহলে দেখা যাচ্ছে গণিতের বিভিন্ন শাখাতে মৌখিক হিসাব করার যথেষ্ট সুযোগ আছে। গণিতে ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তার দিক থেকে মৌখিক হিসাবের যথেষ্ট গুরুত্ব আছে। এর জন্য বিষয়টির দৈনন্দিন পাঠদানকালে মৌখিক হিসাবের একটি গুরুত্বপূর্ণ স্থান থাকা উচিত।

অন্যান্য বিষয়ে মৌখিক কাজের যেমন গুরুত্ব আছে, গণিতেও তেমনি। মৌখিক কাজ যে কেবলমাত্র চিত্তাকর্ষক, তাই নয়; প্রাথমিক স্তরে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণও বটে। লিখিত কাজে কেবলমাত্র দর্শনেন্দ্রিয়ের ব্যবহার করা হয়, কিন্তু লিখিত কাজের সঙ্গে মৌখিক কাজের সমন্বয় ঘটালে যুগপৎ দর্শনেন্দ্রিয় ও শ্রবণেন্দ্রিয় ব্যবহার করা সম্ভব। শিশুদের ক্ষেত্রে যতো বেশী ইন্দ্রিয় ব্যবহার করা যাবে জ্ঞানও তত পাকা হবে। তা ছাড়া শ্রেণীতে ছাত্ররা নিষ্ক্রিয় শ্রোতার ভূমিকা নিয়ে বসে থাকতে ভালোবাসে না।

মৌখিক গণিতে তাদের স্থান হয় সক্রিয় বক্তার সারিতে। নূতন পাঠ বা নূতন পদ্ধতি যদি শ্রেণীতে ব্যবহার করতে হয়, তবে তা প্রথমে মৌখিকভাবেই করা উচিত। এতে ছাত্র অনগ্রসর বা পশ্চাৎপদ থাকলে তা সঙ্গে সঙ্গে নির্ণয় করা যায় এবং তা দূর করার ব্যবস্থা সঙ্গে সঙ্গেই করা সম্ভব। ছাত্ররা নূতন পাঠের সঙ্গে ঘনিষ্ঠ যোগাযোগ গড়ে তুলতে পারে বলে তাতে তারা অধিকতর আগ্রহ বোধ করে। এই জন্যই তারা বিষয়টির খুঁটিনাটির দিকেও মনোযোগ দেয়।

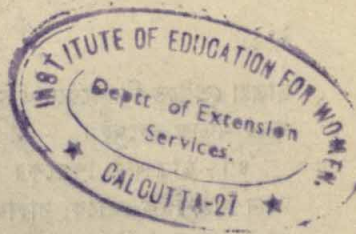
মৌখিক কাজের পরই লিখিত কাজ ব্যবহার করা উচিত। লিখিত কাজটি হল মৌখিক কাজের লিপিবদ্ধ ও সুসংহত রূপ। 'Reading makes a full man, conference a ready man and writing an exact man'—এই নীতিটি গণিতের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। মৌখিক হিসাব নির্ভুল হয় ঠিকই, কিন্তু লিখিত হিসাবে তা আরো নিখুঁত করা হয়। মৌখিক কাজের একটা নিজস্ব বৈশিষ্ট্য আছে। যেখানে অধিক অনুশীলনের প্রয়োজন সেখানে মৌখিক কাজ অধিকতর কার্যকরী।

মৌখিক কাজ পাঠ সূচিত করে ; লিখিত কাজ পাঠ সমাপ্ত করে। গণিত পাঠের লক্ষ্য যদিও লিখিত তথ্যে উপনীত হওয়া, সেই লক্ষ্যে উপনীত হতে সাহায্য করে মৌখিক কাজ। মৌখিক কাজ ও লিখিত কাজ—দু'টিকে পৃথক সত্তা হিসাবে না দেখে বলা যেতে পারে, লিখিত কাজ হল মৌখিক কাজের পরিবর্তিত ও পরিবর্ধিত রূপ। লিখিত কাজের সাফল্য নির্ভর করছে মৌখিক কাজের উপর। এইজন্যই বিদ্যালয়ে মৌখিক কাজের উপর এত গুরুত্ব আরোপ করা হয়।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. Do you advocate oral work in Mathematics ? Give reasons.

2. Regarding oral work in mathematics, some teachers agree, some disagree. What is your standpoint ? Why ?

3. How can you best utilise oral questions in mathematics. Are they of any benefit to your students ?

একাদশ অধ্যায়

পাঠ্য পুস্তক

(Text Book)

আমাদের বর্তমান শিক্ষা ব্যবস্থাতে পাঠ্যপুস্তকের উপর জোর দেওয়া হয়। শুধু পাঠ্যপুস্তক কেন, নোট, সিওর সাকশেস, লাস্ট-মিনিট সাজেশান ইত্যাদি বইয়ের চাপে ছাত্র 'ভারাক্রান্ত'। আর পাঠ্যপুস্তক শেষ করাই যেন স্কুলগুলির শিক্ষার লক্ষ্য হয়ে উঠেছে। শিক্ষকেরাও অন্ধভাবে ও বৈচিত্রহীন পদ্ধতিতে পাঠ্যপুস্তকের অধ্যায়গুলি একে একে শেষ করতে থাকেন। কিন্তু এ পদ্ধতি বেশীদিন চলতে দেওয়া উচিত নয়। গণিতের ক্ষেত্রে অন্ধভাবে পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করা একটি মারাত্মক ভুল। অনেক শিক্ষক জেনেশুনেও এ ভুল পথে পা বাড়িয়ে থাকেন।

গণিতের কাজ কেবল সংবাদ বা তথ্য সরবরাহ করা নয়। এতে বিভিন্ন জাতীয় সমস্যার সমাধান করতে হয় এবং কিভাবে সমাধান করা যেতে পারে তার জন্য ছাত্রদিগকে উপযুক্ত শিক্ষা দেওয়া হয়। 'কার্যভিত্তিক শিক্ষা'র (Learning by doing) মূলনীতিটি গণিতে অনুসরণ করা হয়। আর ঠিক এই কারণেই অন্যান্য বিষয়ে যতটা পাঠ্যপুস্তকের উপর নির্ভর করা যেতে পারে গণিতে ততটা যায় না। তাছাড়া গণিতে বিভিন্ন পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। 'আবিষ্কারক পদ্ধতি' বা 'বিশ্লেষণ পদ্ধতি'তে যেভাবে পাঠদান করা হয়, ঠিক সেইভাবে পাঠ্যপুস্তক রচনা করা অত্যন্ত দুরূহ। গণিতে ছাত্রদিগকে সূত্র, নিয়ম ইত্যাদি আবিষ্কার করতেই শিক্ষা দেওয়া হয়। সেক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তক আগের থেকে তৈরী সূত্র বা নিয়ম সরবরাহ করে ছাত্রদের আত্মবিশ্বাসী হবার পথে বাধার সৃষ্টি করে। এ দিক থেকে দেখতে গেলে গণিতে পাঠ্যপুস্তক কেবলমাত্র অপ্রয়োজনীয় বা অবাঞ্ছনীয় নয়, ক্ষতিকরও।

কিন্তু তবুও গণিতে পাঠ্যপুস্তক ব্যবহার করার রীতি ছিল, এখনও আছে এবং ভবিষ্যতেও থাকবে। এর অবশ্য কয়েকটা কারণ আছে। তার মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ কারণগুলি হল :—

১। পাঠ্যপুস্তকে তৈরী (Ready made) সমস্যার আকারে যথেষ্ট বিষয়বস্তু সন্নিবিষ্ট থাকে। কোন একটি শ্রেণীতে 'ক্লাস-পিরিয়ডের' শেষেই তো গণিতের চর্চা শেষ হয়ে যায় না। শ্রেণীর বাইরে অর্থাৎ বাড়ীতে, পাঠ্যপুস্তকের সমস্যাগুলি দেখে ছাত্ররা অনুশীলন করতে পারে।

২। পাঠ্যপুস্তকে সুনির্দিষ্ট আকারে ও যথাযথভাবে সমস্যাগুলি লিপিবদ্ধ থাকে বলে শিক্ষককে অপ্রয়োজনীয় ও অবান্তর অংশগুলির সম্মুখীন হতে হয় না।

৩। পাঠ্যপুস্তকে পাঠ-পরিকল্পনার একটা সুনির্দিষ্ট আকৃতি থাকে। এর জন্য

ছাত্ররা শ্রেণীতে কি করেছে এবং তারপর আর কি করতে হবে—তা হৃদয়ঙ্গম করতে পারে অত্যন্ত সহজেই।

৪। ছাত্র যদি শিক্ষকের সাহায্য ছাড়াই নিজে নিজে পাঠ শিক্ষা করতে চায় তখন পাঠ্যপুস্তক তাকে সাহায্য করে। পাঠ্যপুস্তকের সাহায্যে ছাত্র 'ডাল্টন-প্ল্যান' বা অন্য কোন 'সক্রিয়তা-ভিত্তিক পদ্ধতি' অনুযায়ী পাঠ শিক্ষা করতে পারে।

৫। পাঠ্যপুস্তকে সুনির্বাচিত উদাহরণ থাকে বলে তা শিক্ষক ও ছাত্র উভয়ের কাছেই উপযোগী।

৬। পাঠ্যপুস্তকে সুনির্বাচিত উদাহরণ থাকে বলে তা শিক্ষক ও ছাত্র উভয়ের কাছেই উপযোগী।

৬। পুনরালোচনার ক্ষেত্রে পাঠ্যপুস্তক অপরিহার্য। পাঠ্যপুস্তক না থাকলে ছাত্ররা অতীতে কি শিক্ষা করেছে তার পুনরালোচনা করতে পারে না। কারণ নিয়মিত ক্লাস নোট রাখা স্কুলের ছাত্রদের পক্ষে সম্ভব নয়।

যাই হোক পাঠ্যপুস্তক ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা থাকলেও এ ব্যাপারেও দু'টি বিষয়ের প্রতি মনোযোগ দিতে হবে। সে দু'টি হল :—

(১) পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন এবং

(২) পাঠ্যপুস্তকের সুব্যবহার প্রণালী।

উত্তর পাঠ্যপুস্তকের বৈশিষ্ট্য :—

একই বিষয়ে একাধিক পাঠ্যপুস্তক বাজারে প্রচলিত—এ আমরা সকলেই জানি। কিন্তু সব পাঠ্যপুস্তকের মান একপ্রকার হয় না। কোনটি ভালো, আবার কোনটি মন্দ। যাই হোক, উত্তম পাঠ্যপুস্তকের কতকগুলি বৈশিষ্ট্য আছে। আমরা সেই বৈশিষ্ট্যগুলিকে **চারভাগে** ভাগ করে থাকি। সেগুলি হল :—

১। **পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু (Contents);**

২। **বিষয়বস্তুর উপস্থাপন পদ্ধতি (Presentation);**

৩। **আকৃতি (Get up);**

৪। **সাধারণ বৈশিষ্ট্য (General)।**

বিষয়বস্তু :

১। পদ্ধতি সম্বন্ধে এবং সমস্যা সমাধান করার কৌশল সম্বন্ধে পাঠ্যপুস্তকে যথেষ্ট বিষয়বস্তু থাকা উচিত। সমস্যা সমাধান করতে ছাত্ররা যাতে আগ্রহী হয় তার জন্য বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা থাকা বাঞ্ছনীয়। সমস্যাগুলির সমাধান পদ্ধতি যেন এক-প্রকারের না হয়। কতকগুলির ক্ষেত্রে সূত্রগুলি প্রত্যক্ষভাবে প্রয়োগ করা যাবে, আবার কতকগুলির ক্ষেত্রে পরোক্ষভাবে প্রয়োগ করা যাবে।

২। সমস্যাগুলি যেন দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধ বজায় রেখে নির্বাচিত হয়। সেই সঙ্গে লক্ষ্য রাখতে হবে যেন গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়েরও একটা যোগসূত্র থাকে। আবার সমস্যাগুলি যেন বিভিন্ন ভিত্তি হিসাবে কাজ করতে পারে সেদিকেও লক্ষ্য রাখতে হবে।

৩। পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু যেন মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতিতে সাজানো হয়। কোন একটি বিষয়কে (Topic) কেন্দ্র করে বিষয়বস্তু না সাজিয়ে এক একটি মূল নীতিকে কেন্দ্র করে বিষয়বস্তু সাজানো উচিত।

৪। পাঠ্যপুস্তকে বিভিন্ন জাতীয় উদাহরণ থাকবে। উদাহরণগুলিও যেন দৈনন্দিন জীবন, সামাজিক চাহিদা ইত্যাদি বিভিন্ন ক্ষেত্র থেকে সংগৃহীত হয়।

৫। পাঠ্যপুস্তকে লিখিত এবং মৌখিক উভয় প্রকার কাজের ব্যবস্থা থাকবে। সমস্যার বেশী সমাধান থাকলে পাঠ্যপুস্তকটি একটি নোট বইয়ের আকৃতি ধারণ করবে। পাঠ্যপুস্তকে যেন উত্তর পত্র না থাকে।

৬। অনুশীলন করার জন্য পাঠ্যপুস্তকে যেন প্রশ্নমালার সংখ্যা বেশী হয়। প্রশ্নমালার সমস্যাগুলির উদ্দেশ্য কিন্তু বিভিন্ন হবে। যেমন :—

(ক) পরীক্ষার জন্য নির্দিষ্ট সমস্যা,
(খ) পুনরালোচনার জন্য সমস্যা,
(গ) ব্যবহারিক কাজের সমস্যা,
(ঘ) মৌখিক কাজের জন্য সমস্যা, এবং
(ঙ) যাদের বুদ্ধি সাধারণ ছাত্রের থেকে বেশী, তাদের উপযোগী কিছু কঠিন সমস্যা।

৭। বিষয়বস্তুর যেন প্রত্যক্ষ, ব্যবহারিক ও সামাজিক উপযোগিতা থাকে। এর সাহায্যে ছাত্র যেন শিক্ষা ও জীবনের মধ্যে সেতুবন্ধ রচনা করতে পারে।

৮। বিষয়বস্তু যেন ধারাবাহিক হয় এবং এর গতি যেন স্বচ্ছন্দ হয় ; সে দিকেও বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে।

উপস্থাপন পদ্ধতি :—

১। সচরাচর যে সমস্ত পদ্ধতি গণিত শিক্ষণের ক্ষেত্রে বেশী প্রয়োগ করা হয়, পাঠ্যপুস্তকে সেই সমস্ত পদ্ধতি অনুযায়ী বিষয়বস্তুগুলি উপস্থাপিত করা বাঞ্ছনীয়।

২। উপস্থাপনের ভাষা হবে সহজ, সরল, স্পষ্ট যাতে ছাত্ররা সহজেই তা বুঝতে পারে। ভাষা এবং রচনাশৈলী ছাত্রদের বয়সোপযোগী হওয়া উচিত।

৩। গণিতের প্রতীক চিহ্ন (Symbol) ও পদ (Term) নির্বাচন করার সময় বিশেষ যত্ন নিতে হবে। এগুলি যেন বেশী-ব্যবহৃত ও সাধারণ (common) প্রতীক ও পদ থেকে লওয়া হয়।

৪। যেখানে প্রয়োজন হবে সেখানেই যেন চিত্র দেওয়া হয়। তবে চিত্রের সংখ্যা যেন খুব বেশী না হয়।

৫। সমস্যাগুলি এমন হবে যেগুলির সঠিক উত্তর হওয়া সম্ভব। এমন সমস্যা থাকা উচিত নয় যার সঠিক উত্তর পাওয়া অসম্ভব বা যার উত্তর কাল্পনিক।

আকৃতি :—

১। পাঠ্যপুস্তক যেন নয়ন মুগ্ধকর হয়।

২। পাঠ্যপুস্তকে ব্যবহৃত অক্ষর (Type) যেন খুব ছোট না হয়। নীচু শ্রেণীতে

বেশ বড় অক্ষর ব্যবহার করা উচিত। পুস্তকের কাগজ বেশ সাদা হবে, কিন্তু যে চকচকে হলে চলবে না কারণ তাতে বেশী আলো প্রতিফলিত হয়। পাঠ্যপুস্তকে যেন নিউজ-প্রিন্ট কাগজ ব্যবহার করা না হয়।

৩। পুস্তকের বাঁধাই যেন বেশ ভালো হয়, তা না হলে বেশীদিন টিকবে না।

৪। পুস্তকের দাম যেন বেশ কম হয়, যাতে সকল ছাত্রই তা কিনতে পারে।

সাধারণ :—

১। পাঠ্যপুস্তক যোগ্য ব্যক্তির দ্বারা লিখিত হওয়া বাঞ্ছনীয়। যিনি গণিতশাস্ত্রে বেশ পারদর্শী এবং দীর্ঘদিন ঐ বিষয়টির পাঠদানের সঙ্গে যুক্ত আছেন, এমন ব্যক্তিই এই কাজের উপযুক্ত। লেখকের গণিত-শিক্ষণে ছাত্রদের অসুবিধাগুলির সঙ্গে পরিচয় থাকলে ভালো হয়।

২। পাঠ্যপুস্তক যেন বাজারে সহজলভ্য হয়।

৩। পাঠ্যপুস্তকের মান (standard) ছাত্রদের মানসিক বয়সের অনুপাতে স্থির করা উচিত। পাঠ্যপুস্তকে স্বাধীন চিন্তা করার সুযোগ দেওয়া উচিত। পাঠ্যপুস্তকে মুখস্থ করার যেন কোন সুযোগ না থাকে।

৪। যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে, সেখানেই যেন গণিতের বিভিন্ন অধ্যায়ের সঙ্গে, বিভিন্ন শাখার সঙ্গে এবং গণিতের সঙ্গে অন্যান্য বিষয়ের ও জীবনের অনুবন্ধ রচনা করা হয়।

৫। পুস্তকে অপ্রয়োজনীয় কোন অংশ যেন না থাকে। অনেক পাঠ্যপুস্তকে ব্যাখ্যা করতে গিয়ে এমন সমস্ত বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়, যেগুলি শিক্ষকের কাজে লাগতে পারে, কিন্তু ছাত্রদের কাজে কখনও লাগবে না। পাঠ্যপুস্তক দু'প্রকারের হলে ভালো হয়। একটি হল ছাত্রদের জন্য আর অপরটি হল শিক্ষকের জন্য। দু'টির আলোচনার ধারাও দু'প্রকারের হবে।

পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার :—

পাঠ্যপুস্তকটি সব দিক দিয়ে সর্বাঙ্গসুন্দর হবে। পাঠ্যপুস্তক যেন লক্ষ্য হয়ে না দাঁড়ায়। মনে রাখতে হবে, এটি লক্ষ্যে পৌছাবার একটি উপায় মাত্র (Means to an end)। এ'টি যেন পুরোপুরি শিক্ষকের স্থলাভিষিক্ত না হয়ে পড়ে। আবার শিক্ষকও যেন সবসময় পাঠ্যপুস্তকের উপর নির্ভর করে না থাকেন। শ্রেণীর পাঠ এবং পাঠ্যপুস্তক আলোচনা এই দু'য়ের সংমিশ্রণে জ্ঞান যেন সম্পূর্ণ হয়।

সকল শ্রেণীতেই পাঠ্যপুস্তক থাকবে কি না, সে বিষয়ে শিক্ষাবিদগণ একমত নন। অনেক বলেন, ১ম ২য় ও ৩য় শ্রেণীতে কোন পাঠ্যপুস্তক থাকবে না। ৪র্থ থেকে ৮ম শ্রেণী পর্যন্ত এ বিষয়ে একটি পাঠ্যপুস্তক থাকবে। ৮ম শ্রেণীর উর্ধ্বে একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে। তার থেকে শিক্ষক একটি নির্বাচন করে দেবেন। নির্বাচনের ব্যাপারে গণিত শিক্ষককে সম্পূর্ণ স্বাধীনতা দিতে হবে। যদি সর্বাঙ্গসুন্দর পাঠ্যপুস্তক না পাওয়া যায়, তবে বিভিন্ন পাঠ্যপুস্তক থেকে অংশ সংগ্রহ করে বিষয় শিক্ষক একটি

আদর্শ পাঠ্যপুস্তক রচনা করে নিতে পারেন। বর্তমানে কেন্দ্রীয় সরকার এবং আঞ্চলিক কর্তৃপক্ষ পাঠ্যপুস্তক প্রণয়নে যথেষ্ট সহযোগিতা করছেন। তাঁদের উদ্যোগে উপযুক্ত ব্যক্তির দ্বারা কয়েকটি নির্বাচিত পাঠ্যপুস্তক প্রকাশ করলে ফল ভালোই হবে।

প্রচলিত পাঠ্যপুস্তকের ত্রুটি ঃ গণিতের সর্বাঙ্গসুন্দর ত্রুটিহীন বই সাধারণতঃ খুবই কম। আমরা গণিতের পাঠ্যপুস্তকে সাধারণতঃ কিছু না কিছু ত্রুটির সম্মুখীন হয়েই থাকি। কতকগুলি ক্ষেত্রে এগুলি সামান্যই ক্ষতিকর, আবার কতক ক্ষেত্রে মারাত্মকভাবে ক্ষতিকর। অবশ্য সুশিক্ষকের হাতে এই ত্রুটিগুলি অনেকক্ষেত্রেই সংশোধিত হয়ে যায়। তবু গণিতে পাঠ্যপুস্তক রচনা করার সময় সাধারণতঃ কি কি ত্রুটি দেখা দিতে পারে সে বিষয়ে একটা সুস্পষ্ট জ্ঞান থাকলে পাঠ্যপুস্তকটি ত্রুটিহীন করার একটা উপায় রচনাকর্তার সামনে তুলে দেওয়া সম্ভব। প্রধান প্রধান সম্ভাব্য ত্রুটি হল :—

১। ত্রুটিপূর্ণ রচনাশৈলী ২। প্রমাদাত্মক বিষয়বস্তু ৩। অধ্যায়গুলি পর পর সাজানোর ত্রুটি ২। মুদ্রণ প্রমাদ ৫। ভাষার দুর্বলতা। ৬। ছাপাই, বাঁধাই ও কাগজের ত্রুটি। ৭। অতিরিক্ত মূল্য ৮। দৃষ্টান্ত বা উদাহরণের স্বল্পতা ৯। জীবনের সঙ্গে যোগসূত্রের অভাব ১০। উন্নতির জন্য চেষ্টা না করা।

একটু চেষ্টা করলেই যে ত্রুটিগুলি দূর করা যায় না তা নয়। গণিত রচনাকর্তারা যদি পারস্পরিক আলোচনার মাধ্যমে বা একটি প্যানেলের অন্তর্ভুক্ত হয়ে পুস্তক রচনায় ব্রতী হন ; তাহলে একজনের ত্রুটি অন্যের চোখে পড়ে সংশোধিত হয়ে যেতে পারে। গণিতের বিষয়বস্তুর পরিধি ও বিষয়বস্তু যেন পাঠ্যপুস্তকে যথাযথভাবে সন্নিবিষ্ট করা হয়। ভাষা যেন সহজ, সরল ও প্রাঞ্জল হয়। উদাহরণ একটু বেশী থাকাই বাঞ্ছনীয়। অভিজ্ঞ শিক্ষকদের মতামত গ্রহণ করে পরবর্তী সংস্করণে পরিবর্তন বা পরিবর্ধন করার মানসিকতা লেখকের অবশ্যই থাকা চাই। চিত্র ইত্যাদি যেন পরিষ্কার ও নিখুঁত হয়। মনে রাখতে হবে শিক্ষকের অনুপস্থিতিতে ঐ পাঠ্যপুস্তকটিই শিক্ষকের কাজ করবে। গণিত পাঠ্যপুস্তক যুক্তিসম্মতভাবে লিখিত হবে ঠিকই, কিন্তু ছাত্রদের মনোবৈজ্ঞানিক দিকটি কিছুতেই উপেক্ষা করা চলবে না। গণিতের পাঠ্যপুস্তক ছাত্রদের নিকট ভীতিপ্রদ না হয়ে যেন চিত্তাকর্ষক হয় সেইরকম প্রচেষ্টা করতে হবে।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. What is the place of text-book in the teaching of mathematics ? Enlist the qualities and marks of a good mathematics text-book.

2. What are the defects in the existing Text-books of Mathematics ? How can we improve them in order to derive maximum advantage from their use.

3. How will you select a good text-book for the students of Mathematics ?

4. "Few tools have been so mis-used as test-books in teaching." Discuss this statement and suggest the proper use of Mathematics text-books for a teacher.

দ্বাদশ অধ্যায়

গণিতের পাঠাগার, পরীক্ষাগার, যন্ত্রপাতি ইত্যাদি

(Mathematical Library, Laboratory, Apparatus etc)

বর্তমানযুগে শিক্ষার উদ্দেশ্য হল ছাত্রদের স্বাধীন চিন্তাশক্তির বিকাশ সাধন করা। তারা যাতে স্বাধীনভাবে কোন কিছু আবিষ্কার করতে পারে, তার শিক্ষা দিতে হবে। শিক্ষকের কাজ হবে কেবলমাত্র সঠিক পথের নির্দেশ দেওয়া। জ্ঞান আহরণের জন্য যে সমস্ত তথ্য সংগ্রহ করা প্রয়োজন, তা ছাত্রই সংগ্রহ করবে। কিভাবে সংগ্রহ করা যাবে, শিক্ষক সে বিষয়ে কার্যকরী নির্দেশ দেবেন।

কোন একটি পাঠ্যপুস্তক থেকে সম্পূর্ণ জ্ঞান আহরণ করা সম্ভব নয়। এর জন্য একাধিক পাঠ্যপুস্তকের সাহায্য লওয়া প্রয়োজন। একজন ছাত্রের পক্ষে একাধিক পাঠ্যপুস্তক ক্রয় করা সম্ভব নয়। ফলে গণিতের পাঠাগার স্থাপনের প্রয়োজনীয়তা দেখা দেয়। যতক্ষণ না গণিতে যথেষ্ট সংখ্যক পাঠ্যপুস্তক ও প্রাসঙ্গিক পুস্তকের (Reference Book) ব্যবস্থা করা হয়, ততক্ষণ ছাত্রদের গণিতের জ্ঞান সম্পূর্ণ হয় না। তাছাড়া Assignment পদ্ধতিতে ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে নির্দিষ্ট পাঠ তৈরী করে আনতে বলা হয়। তার জন্য তাকে উপযুক্ত পাঠ্যপুস্তক না দিলে তার পক্ষে পাঠ তৈরী করা সম্ভব হয় না।

প্রায় প্রত্যেক বিদ্যালয়েই পাঠাগার থাকে। তবে অধিকাংশ পাঠাগারেই বহু পুরাতন, অপ্রয়োজনীয় ও অপ্রচলিত পুস্তক দিয়ে আলমারি ভর্তি করা হয়। গণিতের পাঠাগার সাধারণ পাঠাগারের সঙ্গে একসঙ্গেও রাখা চলতে পারে, আবার আলাদা ভাবেও স্থাপন করা যেতে পারে। প্রতি শ্রেণীর জন্যও পৃথক পৃথক পাঠাগার স্থাপন করা যেতে পারে। বৎসরের শুরুতে প্রায় প্রত্যেক বিদ্যালয়েই বিভিন্ন প্রকাশক কর্তৃক বিভিন্ন বিষয়ে নমুনা-পুস্তক পাঠানো হয়ে থাকে। এগুলি বিষয় পাঠাগারে (Subject Library) জমা দিলে ভালো হয়। গণিত পাঠাগারে শ্রেণীর জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তকটি তো থাকবেই, ঐ বিষয়ে অন্যান্য পাঠ্যপুস্তকও রাখতে হবে। এছাড়া গণিতের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত বিষয়ের পুস্তক, ম্যাগাজিন ইত্যাদিরও ব্যবস্থা থাকবে। এগুলি থেকে ছাত্র যেমন গণিতে জ্ঞান অর্জন করবে, তেমনি সার্থকভাবে অবসর সময়ও কাটাতে পারবে। গণিত পাঠাগারের দেওয়ালগুলিতে বিভিন্ন গণিতবিদের ছবি, গণিতের ইতিহাসের ক্রমবিবর্তন প্রভৃতির চিত্র থাকলে বিষয়টি সম্বন্ধে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি পাবে। আবার এর ফলে পাঠাগারটির পরিবেশও অনুকূল ও উপযুক্ত হবে।

এখন আলোচনা করা যাক, পাঠাগারে কি জাতীয় পুস্তক থাকবে। পাঠাগারে যে সমস্ত পুস্তক থাকবে, সেগুলি যেন 'বিষয় সম্বন্ধীয়' (Books relating to matter),

মজার ধাঁধা যুক্ত, অবসর সময় যাপনের উপযুক্ত ইত্যাদি বিভিন্ন জাতীয় হয়। মনে রাখতে হবে, পাঠাগারের উদ্দেশ্য কেবলমাত্র প্রয়োজনীয় জ্ঞান বা সংবাদ সরবরাহই নয়, ছাত্রদের গণিতে আগ্রহ বৃদ্ধি করাও বটে। পাঠাগারের জন্য পুস্তক নির্বাচনের ক্ষেত্রে নীচের অভিমতগুলি অনুসরণ করলে ভালো হয়।

১। পাঠাগারে বিভিন্ন শ্রেণীর জন্য নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক তো থাকবেই, উপরন্তু শিক্ষক যে সমস্ত পুস্তক প্রয়োজনীয় মনে করবেন, সেগুলিও থাকবে।

২। বিভিন্ন ভাষার (যেমন আঞ্চলিক ভাষা, ইংরেজী) পুস্তকও পাঠাগারে থাকবে।

৩। উত্তর-পত্র-যুক্ত ও উত্তর-পত্র-বিহীন, দু'রমের পাঠ্যপুস্তকই থাকবে।

৪। গণিতের ইতিহাস (ক্রমবিকাশের), গণিতবিদদের জীবনী ইত্যাদি সম্বন্ধেও কিছু কিছু পুস্তক থাকবে।

৫। বৈচিত্র আনার জন্য নূতন ও পুরাতন, জীবিত ও মৃত, দেশী ও বিদেশী গণিতবিদদের দ্বারা লিখিত পাঠ্যপুস্তকও থাকবে।

৬। প্রতি ক্ষেত্রেই পুস্তকের সংখ্যা একাধিক হবে যাতে একসঙ্গে একাধিক ছাত্র উপকৃত হতে পারে। পুস্তকের ভাষা হবে সহজ ও সরল।

৭। পুস্তক নির্বাচন করবেন শিক্ষক। বহুল ব্যবহৃত পুস্তকই পাঠাগারে রাখা উচিত। যে পুস্তক কোন ছাত্র বা শিক্ষক ব্যবহার করছেন না, যা কেবলমাত্র পাঠাগারের শোভা বর্ধন করে, সেই রকম পুস্তক নির্বাচন করে কোন লাভ হয় না। নির্বাচিত পুস্তকের যেন একটা সর্বনিম্ন মান রক্ষিত হয়।

বিদ্যালয়ের সমস্ত গণিতের শিক্ষক একত্রে যদি পুস্তক নির্বাচন করেন; তবে কাজটি অনেক সহজ হয়। প্রত্যেক গণিত শিক্ষকেরই নিজস্ব একটি পাঠাগার থাকা প্রয়োজন। কিন্তু বিভিন্ন কারণের জন্য (প্রধানতঃ অর্থ নৈতিক) ভারতবর্ষের মতো দেশে এ শুধুই কল্পনামাত্র। আবার যেখানে একক বিদ্যালয়ের পক্ষে পাঠাগার স্থাপনের অসুবিধা আছে, সেখানে অনেকগুলি বিদ্যালয় একত্রিত হয়ে একটি কেন্দ্রীয় পাঠাগার স্থাপন করতে পারে। এ ব্যাপারে বিভিন্ন বিদ্যালয়ের গণিত শিক্ষকদের এগিয়ে আসতে হবে।

পরীক্ষাগার (Laboratory)—পদার্থবিদ্যা, রসায়ন-বিদ্যা প্রভৃতির মতো গণিতকে 'পরীক্ষা-মূলক বিষয়' (Laboratory Subject) বলা হয় না ঠিকই, কিন্তু গণিতেও পরীক্ষাগার ব্যবহারেরও যথেষ্ট সুযোগ এবং প্রয়োজনীয়তা আছে। পাঠদানের নূতন পদ্ধতি আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে পরীক্ষাগারের ব্যবহারও উত্তরোত্তর বেড়ে চলেছে। পরীক্ষাগারের প্রচলনের পর থেকেই ছাত্রদের গণিতের আগ্রহও যথেষ্ট বেড়েছে। অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের মতো গণিতে পরীক্ষা-নিরীক্ষার সুযোগ অনেক কম। কিন্তু বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিতের যথেষ্ট প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

গণিতের পরীক্ষাগার অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের পরীক্ষাগার থেকে কিছুটা আলাদা। এই পরীক্ষাগারের প্রধান কাছ হল—বাস্তব ও কার্যকরী অভিজ্ঞতার সঙ্গে পরিচিত করা এবং অন্যান্য ক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োগ। এর জন্য কিছু কিছু যন্ত্রপাতিরও

প্রয়োজন হয়। এ সমস্ত যন্ত্রপাতির অভাবে গণিতের পরীক্ষাগারের কাজ ঠিকমত চালানো অসম্ভব।

এখন দেখা যাক গণিত-পরীক্ষাগারে কি কি জিনিসের বা যন্ত্রপাতির প্রয়োজন হয়।

নীচু শ্রেণীতে :—

পুঁতি অথবা তেঁতুল-বীচি, বল-ফ্রেম, যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ সম্বন্ধীয় তালিকা, ভগ্নাংশের উদাহরণের জন্য কাঠের বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি বিশিষ্ট কাঠ বা কার্ড বোর্ডের অংশ, নামতার চার্ট ইত্যাদি।

উঁচু শ্রেণীতে :—

জটিল রাশির তালিকা, মুদ্রা, তুলাদণ্ড ও ওজন, ঘড়ি, চেন্, ভগ্নাংশের তালিকা, গ্রাফ কাগজ, বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতির কাঠের টুকরা, কাঠের ঘনক (cube), পাশ বই, চেক বই ইত্যাদি।

যন্ত্রপাতি (Apparatus) :—

যন্ত্রপাতির মধ্যে প্রথমেই বলতে হয় ব্ল্যাকবোর্ডের কথা। শ্রেণীতে একটি ব্ল্যাকবোর্ড তো থাকবেই, সম্ভব হলে দু'টি রাখা উচিত। গ্রাফবোর্ডও একটি থাকবে। চক্‌গুলি যেন বেশ সাদা হয়। রঙীন চক্‌ও রাখতে হবে। এ ছাড়া থাকবে:— Angle Mirror, Plane-Table, Divider, Hypsometer, Clinometer, Thermometer, Barometer, Slide-rule, Calculating machine প্রভৃতি। তা ছাড়া প্রজেক্ট পদ্ধতি বা ডাল্টন পদ্ধতির জন্য যে সমস্ত জিনিসের প্রয়োজন হয় সেগুলি শিক্ষক ও ছাত্রের যুগ্ম প্রচেষ্টায় তৈরী করা যেতে পারে। প্রত্যেক ছাত্রের একটি করে Instrument Box থাকবে।

পরীক্ষাগারে ছাত্রেরা ভূমিকা হবে বৈজ্ঞানিকের। স্বাধীনভাবে হাতে-কলমে কাজ করতে করতেই তার সুপ্ত সম্ভাবনাগুলি বিকশিত হবে। কিন্তু আমাদের দেশ এ ব্যাপারে এখনও অনেক পিছিয়ে আছে। তার কারণ হল :

১। আর্থিক দুরবস্থা।
২। উপযুক্ত শিক্ষকের অভাব।
৩। শিক্ষাক্ষেত্রে বিজ্ঞানসম্মত দৃষ্টিভঙ্গীর অভাব।
৪। বিদ্যালয়ে গৃহাভাব প্রভৃতি।

একথা বলা যেতে পারে, যেখানে যন্ত্রপাতি কেনাকাটার জন্য যথেষ্ট অর্থ নেই সেখানে খুব দামী যন্ত্রপাতি বাদ দিয়ে যেগুলি একান্ত প্রয়োজনীয়, সেই রকম কিছু যন্ত্রপাতি বিদ্যালয়েই তৈরী করে নেওয়া যায়। এতে ছাত্রদের আগ্রহও বাড়বে, তারা আনন্দও পাবে। কাঠের বা কার্ডবোর্ডের মডেল তৈরী করা তো অত্যন্ত সহজ ব্যাপার। এ ব্যাপারে শিক্ষক আগ্রহী হলে যথেষ্ট উপকার সাধিত হওয়ার সম্ভাবনা

গণিত ক্লাব (Mathematics Club) :—বর্তমানে যুগে শিক্ষার অন্যতম প্রধান লক্ষ্য হল অভিজ্ঞতার সম্প্রসারণ। এর জন্য কেবলমাত্র পাঠক্রমিক বিষয়ই নয়

সহপাঠক্রমিক বিভিন্ন বিষয়ের ও কার্যাবলীরও সাহায্য নেওয়া হয়। গণিত ক্লাব এইরকম একটি সহপাঠক্রমিক সংগঠন। এই ক্লাবের মুখ্য উদ্দেশ্য হল :—

(ক) গণিত পাঠে উৎসাহ বৃদ্ধি করা এবং (খ) গণিতের জ্ঞান বৃদ্ধি করা।

এর জন্য অবশ্য বিভিন্ন পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। ছাত্ররা যাতে ব্যক্তিগত ভাবে ও সমষ্টিগত ভাবে গণিত চর্চা করতে পারে-সে বিষয়েও দৃষ্টি দেওয়া হয়।

গণিত ক্লাবে যে কোন শ্রেণীর ছাত্রই (গণিতের) সদস্য হতে পারে। তবে বিদ্যালয় যদি খুব বড় হয়, এবং ছাত্র সংখ্যা যদি বেশী হয়, তবে একই বিদ্যালয়ে দু'টি ক্লাব করা যেতে পারে ; যথা—**Junior** এবং **Senior Mathematics Club**- যে সমস্ত ছাত্র গণিতে অত্যন্ত উৎসাহী এবং যাদের গণিতে বেশ ভালো দখল আছে তারাই প্রথমে ক্লাবে সক্রিয় সদস্য হয়ে ক্লাবটি পরিচালনা করবে।

ক্লাবের কার্যাবলী অনুষ্ঠিত হবে বিদ্যালয়ের ছুটির পর কিংবা কোন অবসর সময়ে। সাধারণ মিটিং-এর মতো এর বিবরণী লিপিবদ্ধ করে রাখার প্রয়োজন নেই। ছাত্ররাই ব্যবস্থাপক, তারাই বক্তা, তারাই শ্রোতা। অবশ্য নূতন কাজে হাত দেবার সময় গণিত শিক্ষক প্রয়োজনীয় উপদেশ দেবেন। মাঝে মাঝে গণিতজ্ঞ ব্যক্তিদের ও বিশেষজ্ঞদের নিমন্ত্রণ করে নিয়ে এসে বক্তৃতা দেবার ব্যবস্থা করতে পারলে ভালো হয়।

ক্লাবের কার্যাবলী :—প্রথম প্রথম শিক্ষক নেতৃত্ব দিলেও ধীরে ধীরে সরে আসবেন। ছাত্ররা নিজেরা তারপর কাজের ভার গ্রহণ করবে। তারা প্রথমে গণিতের ক্ষেত্রে নিজ নিজ অভিজ্ঞতার আলোচনায় সাহায্যে ক্লাবের কাজ শুরু করতে পারে। গণিতে ভালো পাঠাগার থাকলে, আর শিক্ষক সেরকম উৎসাহী হলে ক্লাবের কাজের মধ্যে নূতনত্ব আনা সম্ভব। এতে ছাত্রদের মধ্যে যে আগ্রহের সৃষ্টি হবে তা হল আন্তরিক আগ্রহ।

ক্লাবে নিম্নরূপ কাজের ব্যবস্থা রাখা যেতে পারে। যথা :—

১। হিসাব করার সংক্ষিপ্ত পন্থা উদ্ভাবন।
২। বিভাজ্যতা প্রভৃতি পরীক্ষা করা।
৩। গণিতে ভুল নির্ণয় করা।
৪। ম্যাজিক স্কোয়ার পূরণ করা (বত্রিশের ঘর পূরণ ইত্যাদি)।
৫। ধাঁধা, কৌশলযুক্ত সমস্যা, গাণিতিক প্রমাদ (fallacy) ইত্যাদি।
৬। গণিতের ছড়া, আর্যা।
৭। খেলার ছলে গণিতের জ্ঞান পরীক্ষা (Quiz)।
৮। গণিত সম্বন্ধীয় সাময়িক পত্রাদি পাঠ করা এবং সে বিষয়ে আলোচনা করা।
৯। প্রাচীন পুস্তক-পুস্তিকাতে গণিত সম্বন্ধীয় আলোচনাগুলি পর্যালোচনা করা।
১০। বিভিন্ন উপায়ে জ্যামিতিক সিদ্ধান্তগুলির সত্যতা প্রমাণ করা।
১১। গণিতের বিভিন্ন চার্ট, মডেল, যন্ত্রপাতি, প্রদীপন ইত্যাদি তৈরী করা।
১২। গণিতের সংগ্রহশালা থাকলে তার জন্য নমুনা সংগ্রহ করা।

১৩। স্থানীয় অঞ্চল সমূহের পরিসংখ্যান গ্রহণ করা এবং সেগুলির উপযুক্ত ব্যাখ্যা দেওয়া।

১৪। সম্ভাবনার নীতির (Probability) উপর ভিত্তি করে খেলাধুলার ব্যাখ্যা করা।

১৫। গণিতের সমস্যা সমাধানের সহজ ও সংক্ষিপ্ত পন্থা উদ্ভাবন করা।

এবার দু-একটি কাজের নমুনা দেওয়া হচ্ছে :—

(৪)-এর উদাহরণ :—৩২-এর ঘর পূরণ :—

১	৮	৯	১৪
১১	১২	৩	৬
৭	২	১৫	৮
১৩	১০	৫	৪

(সূত্র :—
চন্দ্র, নেত্র, সমুদ্র, বাণ
পৃষ্ঠে নব করি গ্রহ সন্ধান,
যাহা কর অঙ্ক, তাহা কর আধা
কুম্ভ পদে পদে ভাগ সমাধা।)

(৭)-এর উদাহরণ লীলাবতীর সমস্যাগুলিতে যথেষ্ট দেখা যায়।

(তুলনীয় :— একদিন চারি বুড়ী আহারে বসিয়া
বয়স গণনা করে হাসিয়া হাসিয়া ইত্যাদি।)

(১৫)-এ উদাহরণ :— $V=u+ft$ এই সূত্রটি t বর্জিত কর।

সমাধান :— আমরা জানি $S=ut+\frac{1}{2}ft^2$.

$V=u+ft$. বর্গ করিলে $V^2=u^2+2uft+f^2t^2$.

অথবা $V^2-u^2=2uft+f^2t^2$
$=2f(ut+\frac{1}{2}ft^2)$.
$=2fs$.

গণিত ক্লাসের সাফল্য নির্ভর করছে ছাত্র ও শিক্ষকের যুগ্ম প্রচেষ্টায় উপর। ক্লাব প্রতিষ্ঠিত হলে সেটি যাতে স্থায়ী হয়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। ছাত্রদিগকে নিত্য নতুন উদ্ভাবনী শক্তির পরিচয় দিতে হবে যাতে সকলেরই আগ্রহ অটুট থাকে। সমষ্টিগত প্রচেষ্টা যেমন প্রয়োজন, তেমনি ব্যক্তিগত চিন্তনেরও প্রয়োজন।

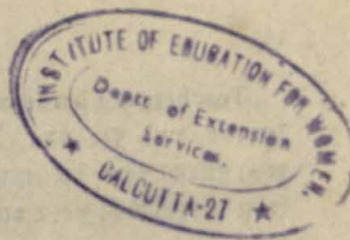
প্রশ্নগুচ্ছ

1. Mathematics Laboratory is no longer a misnomer. Mention the different items of equipment helpful in the teaching of mathematics. How will the teacher organise different materials in the laboratory ?

2. Suggest a few apparatuses that would facilitate teaching of certain topics in mathematics. Show how you could improvise some of these apparatuses ?

3. Discuss the need of a mathematics library in a School.

4. Write notes on ;—

(a) Use of black-board in the teaching of Mathematics. (b) Role of Mathematics Laboratory in the teaching of Mathematics.

ত্রয়োদশ অধ্যায়

গণিত শিক্ষক

(Mathematics Teacher)

যে কোন বিষয়ের সাফল্য বহুলাংশে নির্ভর করে সেই বিষয়ের শিক্ষকের উপর। একথা নিঃসন্দেহে বলা যায় গণিতে ও ছাত্রদের সাফল্য অনেকাংশে নির্ভর করে গণিত শিক্ষকের উপর। শিক্ষার অ-মনোবৈজ্ঞানিক যুগে শিক্ষকের যোগ্যতা বিচার করা হত তার বিষয়বস্তুর জ্ঞান বা পাণ্ডিত্যের বিচারে। কিন্তু বর্তমান মনোবৈজ্ঞানিক যুগে শিক্ষক সম্বন্ধে এ ধারণা পরিবর্তিত হয়ে গেছে। বর্তমান যুগে শিক্ষকের দায়িত্ব ও কর্তব্য অনেক বেড়ে গেছে। John Adams এর সেই বিখ্যাত উক্তি The teacher teaches Jchn Latin থেকে আমরা বুঝতে পেরেছি শিক্ষকের পক্ষে বিষয়বস্তুর জ্ঞান থাকা প্রয়োজন ঠিকই, কিন্তু তার চেয়েও বেশী প্রয়োজন শিক্ষার্থী সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা। আধুনিক শিশুকেন্দ্রিক শিক্ষার লক্ষ্যই হ'ল শিশুর আভ্যন্তরীণ সুপ্ত গুণাবলীর বিকাশ সাধন করা এবং তার সহজাত প্রবণতাগুলিকে সুনিয়ন্ত্রিত পথে পরিচালিত করা। শিক্ষার এই লক্ষ্যের সার্থক রূপকার হতে পারেন একমাত্র শিক্ষক। এর জন্যই স্বভাবতঃ শিক্ষকের দায়িত্ব বৃদ্ধি পেয়েছে। মনোযোগ, পর্যবেক্ষণ, ধৈর্য, স্থিরতা প্রভৃতি মানসিক ক্ষমতারও অনুশীলন করতে হয়, এই সমস্ত মানসিক ক্ষমতার মধ্যে পড়ে যুক্তিসম্মতভাবে চিন্তা করা, বিচার করা, বিমূর্ত চিন্তা করা প্রভৃতি। গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য বা লক্ষ্য সাধারণ শিক্ষার উদ্দেশ্য বা লক্ষ্য থেকে পৃথক নয়। কাজেই গণিত শিক্ষককে মনে রাখতে হবে তিনি তার বিষয় সম্বন্ধে শিক্ষাদানের মাধ্যমে সাধারণ শিক্ষার লক্ষ্যের পথেই তাঁর ছাত্রদের পরিচালিত করে নিয়ে যাচ্ছেন।

শিক্ষকের সর্বপ্রধান কাজই হল শিক্ষা দেওয়া এবং সাফল্যের সঙ্গে শিক্ষা দেওয়া। কিন্তু শিক্ষা দেওয়ার অর্থ এই যে ছাত্রদের মন তথ্য-ভারাক্রান্ত করা বা তাদের পরীক্ষায় সাফল্য অর্জনের গুপ্ত রহস্য শিক্ষা দেওয়া। শিক্ষকের নিকট ছাত্র অভিভাবক বা বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষ অনেক কিছুই আশা করে। শিক্ষকদের বলা হয় জাতির কর্ণধার। ছাত্রদের ভাবীসমাজের সুনাগরিক করে গড়ে তোলার গুরু দায়িত্ব শিক্ষক সমাজের উপর ন্যস্ত। কাজেই শিক্ষকের এই দায়িত্ব যথাযথভাবে পালন করার উপযুক্ত নিম্নতম যোগ্যতা এবং গুণাবলী থাকা একান্ত প্রয়োজন। আমরা আমাদের সমাজে শিক্ষককে একজন আদর্শ মানুষ হিসাবে দেখতে চাই। কিন্তু শিক্ষকও একজন মানুষ। তিনি সর্বগুণ-সমন্বিত কোন মহামানব নন। তাঁর কিছু মানবিক দোষ ত্রুটি অবশ্যই থাকবে। তবে সুশিক্ষক হতে গেলে তাঁর যে নিম্নতম যোগ্যতা ও বিশেষগুণাবলী থাকা প্রয়োজন সেটুকু আমরা নিশ্চয়ই তাঁর নিকট আশা করতে পারি।

Teachers are born, not made-একথা সত্য হলেও আংশিক সত্য। জাত শিক্ষকের সংখ্যা খুবই কম। যে কোন শিক্ষক চেষ্টা করলেই সফল ও সার্থক শিক্ষক হতে পারেন। এর জন্য প্রয়োজন ধৈর্য, অনুশীলন ও প্রচেষ্টার। গণিত শিক্ষক হিসাবে সাফল্য অর্জন করতে হলে শিক্ষককে কয়েকটি বিষয়ে অবহিত হবে। সেগুলি হ'ল :

প্রথমেই বলতে হয় শিক্ষকের বিষয়টি সম্বন্ধে যথেষ্ট পাণ্ডিত্য থাকবে। তাঁর নিজের জ্ঞান যদি অসম্পূর্ণ হয়, তবে তিনি ছাত্রদের আর কি করে জ্ঞান দান করবেন। তাছাড়া গণিত সম্বন্ধে নিত্য নূতন যে সমস্ত গবেষণা হচ্ছে, সেগুলির সঙ্গেও তাঁকে সুপরিচিত হতে হবে।

শিক্ষণের বিভিন্ন পদ্ধতির সঙ্গে তাঁর পরিচয় থাকবে। বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন পদ্ধতি ব্যবহার করার মতো মানসিক প্রস্তুতিও তাঁর থাকবে।

শিক্ষক সপ্রতিভ ও চটপটে হবেন। ছাত্ররা কোন সমস্যা উপস্থিত করলে দ্রুত মানসিক চিন্তনের সাহায্যে তার সমাধান করার মতো ক্ষমতা শিক্ষকের থাকবে।

শিক্ষক বিষয়টি সম্বন্ধে আগ্রহী ও উৎসাহী হবেন। এ প্রসঙ্গে Bagley বলেন, "Enthusiasm for one's work and devotion to the interest of the learner are qualities of the artist teacher for which there are no substitutes."

শিশু মনোবিজ্ঞান সম্বন্ধে শিক্ষকের উপযুক্ত জ্ঞান থাকা বাঞ্ছনীয়।

শিক্ষক কখনও শ্রেণীতে প্রস্তুত না হয়ে যাবেন না। সম্ভব হলে প্রতি শ্রেণীর জন্য পাঠ-টীকা প্রস্তুত করে যাবেন। অবশ্য প্রস্তুতি বলতে কেবল পাঠের জন্য প্রস্তুতিই নয়, পরিবর্তিত বা নূতন পরিস্থিতির সঙ্গে সঙ্গতিবিধান করার মতো প্রস্তুতিও তাঁর থাকবে।

কর্ম-কেন্দ্রিক শিক্ষা পদ্ধতি ও আবিষ্কারক পদ্ধতিতে শিক্ষাদান করার ক্ষমতা তাঁর থাকবে। তিনি বক্তৃতা পদ্ধতি যতদূর সম্ভব কম ব্যবহার করবেন। তিনি ছাত্রদিগকে প্রশ্ন করতে, আবিষ্কার করতে ও স্বাধীনভাবে চিন্তা করতে উৎসাহিত করবেন।

শিক্ষক তাঁর পাঠদান কার্যে নির্ভুল ও নিয়মানুগ পদ্ধতিতে অগ্রসর হবেন। অবশ্য ভুল হলে সে ভুল স্বীকার করে নেওয়ার মতো মানসিক শক্তি শিক্ষকের থাকা উচিত।

বিভিন্ন ক্ষেত্র থেকে উপাদান সংগ্রহে ও উদ্ভাবনে শিক্ষকের বিশেষ দক্ষতা থাকবে (Resourcefulness)।

শিক্ষক হবেন সহানুভূতিসম্পন্ন। ছাত্র যদি গণিতে অনগ্রসরও হয়, তবে তিনি তার জন্য তাকে তিরস্কার করবেন না। আবার ছাত্রের কৃতিত্বের জন্য উচ্ছ্বসিতভাবে প্রশংসাও করবেন না।

বিভিন্ন বিষয়ের সঙ্গে এবং জীবনের সঙ্গে গণিতকে যুক্ত করার (correlation) মত ক্ষমতা শিক্ষকের থাকা উচিত।

শিক্ষকের বৈজ্ঞানিক শুভ মনোভাব থাকা একান্ত বাঞ্ছনীয়। শিক্ষাদানের কাজ যাতে সহজ ও ফলপ্রসূ করা যায় তার জন্য শিক্ষক বিভিন্ন পরীক্ষা-নিরীক্ষার আশ্রয় অবলম্বন করবেন।

শিক্ষকের হাতের লেখাটি হবে সুন্দর ও স্পষ্ট। জ্যামিতিক চিত্র ইত্যাদি পরিষ্কার-ভাবে আঁকার ক্ষমতাও তাঁর থাকবে।

শিক্ষকের কণ্ঠস্বর হবে মিষ্ট ও উচ্চারণ ভঙ্গী হবে সংযত। শিক্ষকের হাসিমুখ শ্রেণীতে একটা সুন্দর ও সৌহার্দ্যপূর্ণ পরিবেশ সৃষ্টি করবে।

শিক্ষক হবেন সহিষ্ণু ও ধৈর্যশীল। তাঁর কর্তব্য সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান থাকাও একান্ত প্রয়োজনীয়।

এক কথায় বলা যেতে পারে, গণিতকে একটি জীবন্ত বিষয় হিসাব গড়ে তুলে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি করতে যে সমস্ত গুণাবলীর প্রয়োজন, একজন সুশিক্ষকের সে সমস্ত গুণাবলী থাকবে।

এবার তাঁর জ্ঞাতব্য তথ্য সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

গণিত মুখস্থ করে মনে রাখার মতো বিষয় নয়। অভিজ্ঞতার মাধ্যমে গণিত সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা হয়। কোন্ কোন্ অভিজ্ঞতা এ বিষয়ে উপকারী, শিক্ষককে তা জানতে হবে। ছাত্রের কি কি অভিজ্ঞতা আছে তাও তাঁকে জানতে হবে। অর্থাৎ তিনি বিষয়টি যেমন জানবেন, ছাত্রকেও তেমনি জানবেন।

সকল শ্রেণীতে একই পদ্ধতিতে গণিতের পাঠ দেওয়া যায় না। বিভিন্ন শ্রেণীর উপযুক্ত পদ্ধতিগুলি তাঁকে জানতে হবে। এর জন্য ছাত্রের মানসিক বিকাশের সঙ্গে শিক্ষককে পরিচিত হতে হবে।

শিক্ষণ-পদ্ধতি উন্নত করলেই ছাত্ররা গণিতে দক্ষতা অর্জন করবে—এমন কোন কথা নেই। ছাত্রদের আগ্রহও জাগ্রত করতে হবে।

ছাত্রদের গণিতবোধে আগ্রহের অভাব বিষয়টির কাঠিন্যের জন্য নয়; সহানুভূতি-শীল মনোভাবের অভাবের জন্যই ছাত্ররা বিষয়টি কঠিন বলে মনে করে।

শিক্ষক নিজের ব্যক্তিত্ব কখনই অবহেলা করবেন না। তিনি হাস্যরসিক হবেন ঠিকই, কিন্তু তাও নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে। (The student must laugh with the teacher but not at him).

সমস্যার সমাধানে শিক্ষক কেবলমাত্র ইঙ্গিত দেবেন। সমাধানের জন্য বাকী চিন্তা ছাত্ররাই করবে।

শিক্ষক গৃহকাজ দেবেন কম করে। গৃহকাজের সমস্যাগুলি যেন সুনির্বাচিত হয়। আবার গৃহকাজগুলি ঠিকমতো সংশোধন করে দিতে হবে। গৃহকাজে ছাত্রদের আত্ম-বিশ্বাস ও আত্ম-নির্ভরতা বৃদ্ধি পায়।

আদর্শ গণিত শিক্ষক বিষয় ও ছাত্র, উভয়ের উপরই আস্থাশীল হবেন। তিনি ছাত্রদের নিকট খুব কম বা অত্যন্ত বেশী সাড়া প্রত্যাশা করবেন না।

বিষয়টি সম্বন্ধে পাণ্ডিত্য থাকলেই ভালো শিক্ষক হওয়া যায় না। পাঠদান পদ্ধতি তো জানতে হবেই, শিক্ষককে ছাত্রদের ভালোবাসতে হবে।

শিক্ষক বিষয়টির ক্রমবিকাশের ইতিহাসের সঙ্গে সুপরিচিত থাকবেন।

যেখানে সুযোগ পাওয়া যাবে শিক্ষক সেখানেই প্রজেক্ট পদ্ধতি বা তার অনুরূপ কোন পদ্ধতি ব্যবহার করবেন। এতে ছাত্রদের আগ্রহও বাড়বে, আবার তাদের বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গীরও উন্মেষ ঘটবে।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. Mention the chief qualities and characteristics of a mathematics teacher.

2. "The teacher must be sincere and resourceful to make effective Class-room planning and its execution."—Discuss.

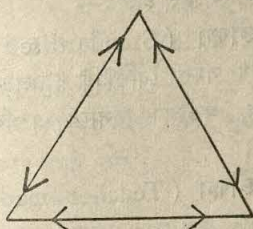
3. Write note on ; 'The preparation of a teacher of mathematics and the planning of his work :

———

চতুর্দশ অধ্যায়
পরীক্ষা ও মূল্যায়ন
(Examination and Evaluation)

শিক্ষা একটি দ্বিমুখী প্রক্রিয়া। শিক্ষণ ও শিক্ষালাভ—এই দু'রকম প্রক্রিয়ার মাধ্যমে শিক্ষাকার্য সম্পাদিত হয়। শিক্ষার লক্ষ্য কেবলমাত্র অভিজ্ঞতা অর্জন করা নয়; সেই অভিজ্ঞতা যাতে ছাত্র দক্ষতার সঙ্গে ব্যবহার করতে পারে তার ব্যবস্থা করাও শিক্ষার লক্ষ্য। ছাত্রকে শিক্ষার লক্ষ্যের দিকে শিক্ষক পরিচালনা করে নিয়ে যান, কিন্তু ছাত্র কতটা অভিজ্ঞতা অর্জন করল বা লক্ষ্যের পথে কতদূর অগ্রসর হ'ল তা বিচার করাও শিক্ষাপ্রক্রিয়ার অঙ্গ। আমরা যে পরীক্ষা নিয়ে থাকি, তার মূল উদ্দেশ্য হ'ল শিক্ষাদানের বিষয়বস্তু, পদ্ধতি ও সার্থকতা বিচার করা। শিক্ষক যে উদ্দেশ্য সামনে রেখে অগ্রসর হচ্ছেন এবং ঐ উদ্দেশ্য রূপায়িত করার জন্য যে পদ্ধতি অবলম্বন করছেন পরীক্ষার সাফল্য—অসাফল্য ঐ পদ্ধতিরই কার্যকারিতা যাচাই করে থাকে।

মূল্যায়ন শব্দটি শিক্ষাক্ষেত্রে নূতন। পরীক্ষার উদ্দেশ্যের চেয়ে মূল্যায়নের উদ্দেশ্য ব্যাপক। পরীক্ষা এবং মূল্যায়ন দুটিই শিক্ষার্থীর শিক্ষাগত ও মানসিক দক্ষতা ও ক্ষমতার পরিমাপক। প্রচলিত পরীক্ষা কেবলমাত্র বুদ্ধিগত ও তত্ত্বমূলক জ্ঞানের সাফল্য বা ব্যর্থতা পরিমাপ করে, কিন্তু মূল্যায়ন শিক্ষার্থীর সামগ্রিক বিকাশের পরিমাপক। আমরা মূল্যায়নকে একটি ত্রিভুজের সঙ্গে তুলনা করতে পারি। যেমন :—

শিক্ষামূলক উদ্দেশ্য (লক্ষ্য)

শিক্ষামূলক অভিজ্ঞতা (উপায়) মূল্যায়নের কৌশল (যাচাই)

মূল্যায়নকে তিনটি স্তরে বিন্যস্ত করা যায়। **প্রথম :**—কোন একটি বিষয়ের বিশেষ অধ্যায় সম্বন্ধে শিক্ষাদানের উদ্দেশ্য নির্ণয়। **দ্বিতীয় :**—প্রত্যেক উদ্দেশ্যের জন্য আচরণের পরিবর্তন বা সম্ভাব্য বাঞ্ছনীয় পরিবর্তন সম্বন্ধে নির্দিষ্ট ধারণা তৈরী করা এবং **তৃতীয় :**—সম্ভাব্য আচরণেরপরিবর্তন পরিমাপ করার উপযোগী মূল্যায়নের কৌশল অবলম্বন করা।

এখন দেখা যাক্ গণিত শিক্ষার ফলে ছাত্রদের আচরণের কি কি পরিবর্তন সাধিত হয় এবং আমরা তাদের আচরণে কোন জাতীয় পরিবর্তন আশা করি।

১। ছাত্র হিসাব বিষয়ে দক্ষতা অর্জন করে।

২। সে গাণিতিক ধারণা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে এবং সেগুলি প্রয়োগ করে।

৩। গাণিতিক ভাষা সম্বন্ধে ছাত্রের ক্ষমতা বৃদ্ধি পায় এবং সেগুলি ব্যবহার করে

৪। পরিসংখ্যানমূলক এবং লেখচিত্র জাতীয় তথ্যাদি সংগ্রহ করা ও ব্যাখ্যা করার ব্যাপারে ছাত্রের দক্ষতা বৃদ্ধি পায়।

৫। গণিতে নির্ভুলতার মাধ্যমে তার আত্মবিশ্বাস বৃদ্ধি পায়।

৬। ছাত্রের বিশ্লেষণী ক্ষমতা বৃদ্ধি পায় এবং সে নির্ভুলভাবে সমস্যার সমাধান করতে শিক্ষালাভ করে।

৭। ছাত্র সঠিক চিন্তনের ক্ষমতা অর্জন করে।

৮। ছাত্রের মধ্যে সাধারণীকরণের ক্ষমতা দেখা যায়।

৯। ছাত্র গণিতের সঙ্গে তার পরিবেশের বিভিন্ন উপাদানের সম্বন্ধ নির্ণয় করে এবং দৈনন্দিন জীবনে গণিতের বিভিন্ন দিক প্রয়োগ করতে শেখে।

১০। পরিমাপের বিভিন্ন এককের সঙ্গে সে পরিচিত হয়।

আমরা শিক্ষাক্ষেত্রে বিভিন্ন জাতীয় অভীক্ষা প্রয়োগ করে থাকি। কোন অভীক্ষা সু-অভীক্ষা না হলে পরিমাপের উদ্দেশ্যটি ব্যর্থ হতে বাধ্য। বিশেষ বিশেষ কতকগুলি বৈশিষ্ট্য থাকলে তবেই তাকে সু-অভীক্ষা বলা যেতে পারে, এই বৈশিষ্ট্যগুলি হ'ল— **সত্যতা বা যথার্থতা** (Validity), **নির্ভরযোগ্যতা** (Reliability), **নৈর্ব্যক্তিকতা** (Objectivity), **প্রয়োগশীলতা** (Administrability), **প্রয়োজনীয়তা** (Utility), **পরিমিততা** (Economy), **নম্বরদানের সুবিধা** (Scorability) প্রভৃতি। আমরা সাধারণতঃ মূল্যায়নের কৌশল হিসাবে যে সমস্ত অভীক্ষা প্রয়োগ করি, সেগুলি হ'ল :—

১। **আদর্শায়িত অভীক্ষা** (Standardised Test) :—এই জাতীয় অভীক্ষাতে সু-অভীক্ষার প্রায় সমস্ত বৈশিষ্ট্যই পরিলক্ষিত হয়। এর একটি নির্দিষ্ট 'আদর্শমান' বা Norm থাকে, অভীক্ষা হিসাবে এগুলি সর্বোৎকৃষ্ট যদিও গণিতে এ জাতীয় অভীক্ষা খুবই কম।

২। **শিক্ষক-কৃত অভীক্ষা** (Teacher made Test) :—এই জাতীয় অভীক্ষাকে সাধারণ শিক্ষাগত অভীক্ষাও বলে। এগুলি আদর্শায়িত নয় এবং সু-অভীক্ষার বহু বৈশিষ্ট্যই এর মধ্যে দেখা যায় না। তবুও এগুলি বহুল প্রচলিত। এগুলির আবার কয়েকটি উপবিভাগ আছে।

(ক) রচনাধর্মী অভীক্ষা (Essay type Test)
(খ) মৌখিক অভীক্ষা (Oral Test)
(গ) নৈর্ব্যক্তিক বা বিষয়মুখী অভীক্ষা (New type or Objective Test).

(ক) **রচনাধর্মী অভীক্ষা** :—এগুলিতে প্রশ্নের উত্তর রচনার আকারে লিখতে হয়। গণিতে এ জাতীয় প্রশ্ন বিরল ; কারণ এ জাতীয় প্রশ্নের গণিতে স্থান নেই।

(খ) **মৌখিক অভীক্ষা** :—এ সম্বন্ধে আগে আলোচনা করা হয়েছে। শিক্ষার্থীদের আচরণের পরিবর্তন পরিমাপ করার জন্য মৌখিক অভীক্ষার প্রচলন আছে। এই জাতীয় অভীক্ষাতে প্রশ্নগুলি সুনির্বাচিত না হয়ে এলোমেলো বা উদ্দেশ্যহীন হলে মূল্যায়নের উদ্দেশ্য ব্যর্থ হতে পারে। এর মাধ্যমে ছাত্রদের মানসিক হিসাব করার ক্ষমতা, দ্রুততা, যুক্তি ও বিচার করণ ক্ষমতা, প্রত্যুৎপন্নমতিত্ব প্রভৃতি পরিমাপ করা সম্ভব।

(গ) **নৈর্ব্যক্তিক অভীক্ষা** :–পরীক্ষার ব্যাপক উদ্দেশ্যগুলিকে মোটামুটি তিনটি ভাগে ভাগ করা হয়। **প্রথমতঃ**, ছাত্রদের জ্ঞান পরিমাপ করা (Measurement), **দ্বিতীয়তঃ** ক্ষমতানুযায়ী ছাত্রদের শ্রেণীবিভাগ করা (Classification) এবং **তৃতীয়তঃ**, ফলাফলের মাধ্যমে ছাত্রদের প্রেষণা উদ্বুদ্ধ করা (Motivation)। এছাড়া পরীক্ষার আরো কতকগুলি উদ্দেশ্য আছে। এগুলি হ'ল :—শিক্ষকের আত্মসমালোচনার সুযোগ দান, ছাত্রদের ভবিষ্যত শিক্ষা সম্বন্ধে পূর্বাভাস দেওয়া, শ্রেণীর গড় মান নির্ণয় করা। এসব কারণে আমাদের দেশে যে পরীক্ষা পদ্ধতি এখনও প্রচলিত আছে, তা হ'ল গতানুগতিক লিখিত পরীক্ষা। এই জাতীয় পরীক্ষা কখনো সাপ্তাহিক, কখনো পাক্ষিক আবার কখনো মাসিক, ত্রৈমাসিক, ষান্মাসিক বা বাৎসরিক হয়ে থাকে। কিন্তু বর্তমানে এই পরীক্ষার সঙ্গে নৈর্ব্যক্তিক অভীক্ষা যুক্ত করা হচ্ছে। নৈর্বক্তিক অভীক্ষাতে যে সমস্ত প্রশ্ন দেওয়া হয়—সেগুলির উত্তর সবসময় একই হয়। একই পরীক্ষক বিভিন্ন সময়ে বা বিভিন্ন পরীক্ষক একই সময়ে একই উত্তরপত্র পরীক্ষা করে যে নম্বর দেন তা সব সময় একই থাকে। প্রত্যেক পরীক্ষার প্রশ্নপত্রে 80% গতানুগতিক প্রশ্ন ও 20% নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন থাকা বাঞ্ছনীয়।

এখন গণিতে কয়েক জাতীয় সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন বা নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নের উদাহরণ দেওয়া হ'ল : প্রথমে **মনে করা** জাতীয় (Recall Type) :—

১। **প্রশ্ন আকারের (Question) :**—

(ক) ত্রিভুজের দু'টি কোণের সমষ্টি 135°, তৃতীয় কোণটি কত ?

(খ) পঞ্চভুজের কোণ সমষ্টি কত ?

(গ) 10, 25 এর কত শতাংশ ?

২। **বিবৃতি আকারের (Statement) :**—

(ক) দুইটি সংখ্যার যোগফল 14, উহাদের বর্গের অন্তরফল 28, সংখ্যা দুটি কি কি ?

(খ) দুটি সংখ্যার পার্থক্য 9, বড়টি x হলে ছোটটি কত ?

(গ) দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার তিনটি সর্তের উল্লেখ কর।

৩। **উদ্দীপক-শব্দ আকারের (Stimulus word) :**—

	গণিতে অবদান	গণিতবিদের নাম
১।	Binomial Theorem	
২।	অতিভুজ^2 = অপর বাহুদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি	

৪। **শূন্যস্থান পূরণ আকারের** (Completion) :—

১। একটি সরলরেখার উপর আর একটি — দণ্ডায়মাণ হইলে — কো দ্বয়ের সমষ্টি — হয়।

২। $x^{10} \div x^5 = ?$

৩। $\sqrt[3]{125} = ?$

দ্বিতীয়তঃ, চিনতে পারা জাতীয় (Recognition Type) :—

১। **সত্য-মিথ্যা/হ্যাঁ-না জাতীয় (True-False or Yes-No) :—**

(ক) ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি তিন সমকোন—সত্য/মিথ্যা

(খ) ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হ্যাঁ/না।

(গ) চার বর্গফুট ও চার ফুট বর্গ একই—হ্যাঁ/না।

২। **বহু নির্বাচন জাতীয়** (Multiple-Choice) :—

(ক) একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 20′ এবং প্রস্থ 15′ ক্ষেত্রফল—150, 200, 25 300 বঃ ফুঃ।

(খ) স্থূলকোণ হল যার পরিমাণটি—90°, 75°, 60°, 120°. (এক্ষেত্রে)

(গ) 10, 15, 20, 25 এবং 30 এর গড় হ'ল—20, 25, 22, কোনটিই ন

৩। **ঠিক করে সাজানো** (Matching) :—

স্তম্ভ 1	স্তম্ভ 2
(i) 6×7···	(i) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
(ii) 3·5÷5	(ii) ·7.
(iii) $\frac{1}{2}$ of $\frac{3}{4}$	(iii) πr^2.
(iv) Right angle.	(iv) $\frac{3}{8}$.
(v) Area of circle.	(v) 42.
(vi) Volume of a cone.	(vi) 90°

৪। **সামঞ্জস্য নির্ণয়** (Similarity) :—

(ক) ত্রিভুজ, বৃত্ত, $a^2 - b^2$, সমান্তরাল সরলরেখা

(খ) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $1\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$.

তৃতীয়তঃ অন্যান্য জাতীয় প্রশ্ন :—

১। **সংখ্যা সারি** (Number Series) :—

(i) 2, 4, 8, 16, —, —.

(ii) 4, 9, 16, 25, —, —.

(iii) 8, 4, 2, 1, —, —.

২। **বুদ্ধি-বাচক প্রশ্ন (Intelligent Questions) :—**

(i) একটি ডিম সেদ্ধ করতে 10 মিনিট সময় লাগে। 4টি ডিম একসঙ্গে সেদ্ধ করতে কতক্ষণ সময় লাগবে?

(ii) একটি ছেলের ষোল বছরের মধ্যে মাত্র চারবার জন্মদিন পালন করা সম্ভব হয়েছে অথচ কোন জন্মদিন বাদ যায় নি। তার জন্মদিন কবে?

(iii) একজন লোকের 12´ লম্বা একটি ছড়ি আছে যেটি কেটে 1 ফুটের ছোট ছোট লাঠি করতে হবে। সে রোজ 1´ করে কাটলে কতদিনে কাটা শেষ হবে?

প্রত্যেকটি প্রশ্নের নির্দিষ্ট উদ্দেশ্য থাকা প্রয়োজন। লক্ষ্য রাখতে হবে, যেন প্রশ্নের সাহায্যে দক্ষতা (Skill) এবং ক্ষমতা (Power) উভয়ই পরিমাপ করা যায়। দক্ষতা বলতে সমাধানের ক্ষেত্রে গতি (speed) এবং যথার্থতা (accuracy) বোঝায়। ক্ষমতা বলতে বোঝায় ছাত্র কত কঠিন সমস্যার সমাধান করতে পারে। অনেক সময় এইজন্য প্রশ্নগুলিকে গতির অভীক্ষা (Speed Test) এবং শক্তির অভীক্ষা (Power Test) এই দু'ভাগেও ভাগ করা হয়। তা ছাড়া ছাত্রদের দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা (Diagnostic Test) এবং পূর্বাভাসসূচক অভীক্ষাও (Prognostic Test) ব্যবহার করা হয়। নীচু শ্রেণীতে মৌখিক পরীক্ষা ব্যবহারে অনেক সুফল পাওয়া যায়।

মূল্যায়ন :—শিক্ষার ক্ষেত্রে মূল্যায়ন একটি নূতন শব্দ। মূল্যায়নের উদ্দেশ্য পরীক্ষার উদ্দেশ্য থেকেও আরো ব্যাপক। মূল্যায়ন শিশুর ব্যক্তিত্বের ক্রমপরিবর্তন ও শিক্ষার মূল উদ্দেশ্যগুলি পরিমাপ করে। শিক্ষাক্ষেত্রে গণিতের প্রয়োজনীয়তার ও গুরুত্বের কথা আগেই আলোচনা করা হয়েছে। গণিত শিক্ষার কতকগুলি বিশেষ উদ্দেশ্যের কথাও বলা হয়েছে। এই উদ্দেশ্যগুলি কতদূর সফল হল তা জানা দরকার। কেবলমাত্র পরীক্ষার সাহায্যে তা জানা যায় না। মূল্যায়নকে শিক্ষা-প্রক্রিয়ার একটি অবিচ্ছেদ্য অংশ বলা যেতে পারে।

গণিতে মূল্যায়ন কিন্তু একটু বিশেষ ধরনের। এর কারণ হল বিষয়টির বৈশিষ্ট্য। গণিত একটি অমূর্ত বিষয়। বিশেষভাবে যত্ন না নিলে শ্রেণীতে পাঠদানের মাধ্যমে গণিত শিক্ষণের উদ্দেশ্য সফল নাও হতে পারে। কাজেই ছাত্ররা উদ্দেশ্যের পথে কতটা এগিয়েছে তা জানার জন্য, পাঠদান পদ্ধতির সাফল্য-অসাফল্য নির্ণয় করার জন্য এবং ছাত্রদের বিশেষ বিশেষ অধ্যায়ে দুর্বলতা নির্ণয় করার জন্য মূল্যায়নের প্রয়োজন।

মূল্যায়নের জন্য যে সমস্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়, সেগুলি হল—

(ক) দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রাথমিক নিয়ম চারটির প্রয়োগ,

(খ) পূর্ণ রাশি, ভগ্নাংশ এবং দশমিকের ব্যবহার,

(গ) গণিতের পদ, ধারণা ও প্রতীক সম্বন্ধে জ্ঞান ও উপলব্ধি,

(ঘ) বিচারকরণের সাহায্যে সমস্যার সমাধান।

গণিতে মূল্যায়নের উপায়—লিখিত পরীক্ষা, মৌখিক পরীক্ষা, হাতে-কলমে শিক্ষা, প্রশ্নাবলী, শ্রেণীর কাজ ও গৃহকাজ পরীক্ষা, রেকর্ড ও ডায়েরী, দুর্বলতা নির্ণায়ক অভীক্ষা, বুদ্ধির অভীক্ষা, গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ প্রভৃতি হল গণিতে মূল্যায়নের উপায়।

ভারতবর্ষের মতো দেশে গণিতে মূল্যায়নের অত্যন্ত প্রয়োজন আছে। এ ব্যাপারে এখনও বিজ্ঞানসম্মত গবেষণার প্রয়োজন। ভাষার কাঠিন্য, উঁচু শ্রেণীতে বিদেশী ভাষার মাধ্যমে গণিত শিক্ষা, বাস্তব অভিজ্ঞতার অভাব প্রভৃতি কারণের জন্য মূল্যায়নের অত্যন্ত অসুবিধা হয়। পরীক্ষা পদ্ধতিকে আমরা এখনই বিদায় জানাতে পারছি না। মূল্যায়নের বিভিন্ন কলা-কৌশলও এখনই আয়ত্ত করতে পারছি না। তাই পরীক্ষা পদ্ধতির কিছুটা সংস্কার করে, আর মূল্যায়নের কয়েকটি কৌশল অবলম্বন করে সুফল পাওয়া যেতে পারে। বৎসরের শেষে একটি পরীক্ষার ফলের উপর নির্ভর না করে থেকে বিভিন্ন সময়ে পরীক্ষা গ্রহণ করে তার ফলাফলের ভিত্তিতে মতামত গড়ে তুলতে হবে। নম্বর দানের পদ্ধতিরও পরিবর্তন করতে হবে। সংখ্যামানের বদলে 'পয়েন্ট-স্কেলে' (A, B, C, D, E) ছাত্রদের কৃতিত্বের মূল্যায়ন করলে ভালো হয়।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. What is the difference between Examination and Evaluation ? Draw an evaluation plan for the mathematics class you are teaching.

2. Describe the essential features of a good system of evaluation in mathematics. Explain with examples.

3. "Evaluation is an integral part of the total educational process.'. Explain this with special reference to mathematical instruction and discuss, how the achievement of your pupils in mathematics could be effectively evaluated.

4. What is meant by evaluation in education ? State how would you proceed to evaluate the mathematical ability and achievement of your pupils.

———

পঞ্চদশ অধ্যায়

গণিত শাস্ত্রের ইতিহাস

(History of Mathematics)

অন্যান্য বিষয়ের মতো গণিতেরও একটা ইতিহাস আছে। বিষয়টি একদিনে বা একজনের প্রচেষ্টাতে উন্নত হয়নি। অনেক গণিতবিদের গবেষণা ও অক্লান্ত পরিশ্রমের ফলেই গণিত আজ বর্তমান অবস্থায় এসে পৌছাতে পেরেছে। এর ইতিহাস যেমন চিত্তাকর্ষক, তেমনি শিক্ষাপ্রদ। সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতেরও অগ্রগতি হয়েছে। সেদিক দিয়ে দেখতে গেলে গণিতের ইতিহাস সভ্যতারই ইতিহাস।

বয়সের সঙ্গে সঙ্গে শিক্ষার্থীর মনোজগতেও একটা পরিবর্তন হয়। এই পরিবর্তনকে এইভাবে ধরা হয়—প্রথম অবস্থায় রোমান্সের প্রাধান্য, দ্বিতীয় অবস্থায় কৌতূহল এবং তৃতীয় অবস্থায় প্রয়োজনীয়তার প্রাধান্য (Age of Romance, curiosity and utility)। এই কৌতূহল পর্যায়ে সে সবকিছু জানতে চায়, শিখতে চায়। তখনই তাকে গণিতশাস্ত্রের ইতিহাস শেখানো যেতে পারে এবং ঐতিহাসিক পদ্ধতিতে (Historical method) পাঠ দিলে ছাত্র যথেষ্ট আগ্রহও অনুভব করে। গণিতের ইতিহাসের উদ্ভব সাধারণ লোকের চাহিদা পূরণের উদ্দেশ্যেই। আর এই অভাব পূরণের জন্যই গণিতকে আরো উন্নত করতে হয়েছে। সভ্যতার প্রাথমিক স্তরে গণিত ছিল সহজ ও সরল। কিন্তু মানব সভ্যতার অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতও ক্রমশঃ জটিল ও বিমূর্ত হতে সুরু করে। একটা দৃষ্টান্ত দেওয়া যাক। বর্তমানে 'Calculus' কথাটি যে অর্থে ব্যবহার করা হয়, পূর্বে কিন্তু সেভাবে ব্যবহার করা হ'ত না। Calculus কথাটি ল্যাটিন 'Calculi' কথাটি থেকে এসেছে—যার অর্থ হ'ল নুড়ি পাথর। পূর্বে মেষপালকরা যখন গণনা করতে জানত না তখন তারা তাদের মেষের সংখ্যা নির্ণয় করত এক-একটি মেষের বদলে এক-একটি নুড়ি পাথর ধরে। পরে মেষের সংখ্যা যখন অনেক বেড়ে গেল তখন দুটি, তিনটি, পাঁচটি বা দশটি মেষের বদলে এক একটি নুড়ি ধরা হ'ত।

গণিতের ইতিহাসকে সভ্যতার ইতিহাস বললেও বিশেষ অত্যুক্তি হয় না। বর্তমান সভ্যতার অগ্রগতি বা প্রাকৃতিক জগতের রহস্য উদ্ঘাটনের ক্ষেত্রে গণিতের অবদান অপরিসীম। অবশ্য গণিত যে কেবলমাত্র সভ্যতার বর্তমান অগ্রগতির পরিমাণ করে ক্ষান্ত থাকে তা নয়, সভ্যতার অগ্রগতির ভবিষ্যৎ একটা ধারণাও এর সাহায্যে পাওয়া যায়। পারমাণবিক শক্তি, যার সম্ভাবনা অপরিসীম, তার উদ্ভবও গণিত থেকেই। Albert Einstein-এর আপেক্ষিক তত্ত্ব আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে গণিতে একটা যুগান্তর এসেছে বলা যেতে পারে। বিশুদ্ধ গণিত চর্চার ফলে এমন সব ফল পাওয়া গেছে যেগুলি আমাদের দৈনন্দিন জীবনে অনেক কাজে লাগে। গণিতের এই

ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্যই পরবর্তী কালে ফলিত গণিত (Applied Mathematics) নামে একটি নূতন শাখার উদ্ভব হয়।

আমরা কি অর্জন করেছি বা কতটা সাফল্য অর্জন করেছি গণিতের ইতিহাস কেবল সেটুকু নিয়েই আলোচনা করে না। এর আলোচনার ক্ষেত্র আরো ব্যাপক। আমরা আরো কতটা সাফল্য অর্জন করতে পারি, কিভাবে সহজে অধিক সাফল্য অর্জন করা সম্ভব এ সমস্তও গণিতের ইতিহাসের আলোচ্য বিষয়বস্তু। প্রথমদিকে গণিতের যে ইতিহাস পাওয়া যায়, তাতে আমাদের পূর্বসূরীরা যে ভুল করেছিলেন, সেগুলির একটা পরিচয় পাওয়া যায়। কাজেই ভালোভাবে গণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে ঐ সমস্ত ভুলের হাত থেকে নিষ্কৃতি পাওয়া যেতে প্যরে। এইজন্যই গণিতের ইতিহাসে আরো অনেক বেশী করে মনোযোগ দেওয়া প্রয়োজন। এ প্রসঙ্গে মনে রাখা উচিত, গণিত একটি স্থিতিশীল বিজ্ঞান নয়; গতিশীল বিজ্ঞান। কাজেই এটিকে একটি মৃত বা অপ্রচলিত বিষয় মনে করে সেইভাবে পড়ালে চলবে না। বিষয়টিকে একটি জীবন্ত বিষয় হিসাবে আকর্ষণীয় পদ্ধতিতে পড়াতে হবে।

এখন গণিতের ইতিহাসের একটা সংক্ষিপ্ত বিবরণী দেওয়া যাক। প্রথমে কতকগুলি দেশ এবং সেই দেশের গণিতবিদদের কথা ধরা যাক।

মেসোপটেমিয়া—খৃঃ পূঃ 4000 বৎসর পূর্বে টাইগ্রিস আর ইউফ্রেটিস নদীর মাঝামাঝি সুমের নামক একটি দেশের অধিবাসীরা (সুমেরীয়রা) নিজেদের সামাজিক প্রয়োজনেই সংখ্যার প্রচলন করতে বাধ্য হন। তখনও পর্যন্ত সংখ্যা লিপিবদ্ধ করার কোন ব্যবস্থা ছিল না বলে কাদার উপর কাঠি দিয়ে লিখতে হ'ত। পরিমাপের ক্ষেত্রে ষষ্ঠিক পদ্ধতির (Sexagesimal System) তাঁরাই প্রবক্তা। তাছাড়া কোন সংখ্যার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করার কৌশলটিও তাঁরা আবিষ্কার করেন। ঘণ্টা, মিনিট, সেকেণ্ড নির্ণয়ের বা বৃত্ত ও কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে এখনও ষষ্ঠিক পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়, আর বীজগণিত ও পাটীগণিতের স্থানাঙ্ক ব্যবহার এখনও প্রচলিত আছে। তা ছাড়া ক্ষেত্রফল যে দৈর্ঘ্য-প্রস্থের গুণফল তাও তাঁরা আবিষ্কার করেন। পরবর্তীকালে তাঁরা বৃত্তের পরিধির সঙ্গে ব্যাসের একটা অনুপাতও নির্ণয় করেন যা এখন π-এর মাপে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাবিলনের অধিবাসীরা সুমেরীয়দেয় চেয়ে গণিতে বেশী অগ্রসর হয়েছিলেন। তাঁরা পূরক সংখ্যার (Reciprocal) একটি তালিকা প্রণয়ন করেন এবং দেখান যে N জাতীয় কোন সংখ্যার পূরক হল $\frac{1}{N}$। বর্তমানের পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সম্বন্ধগুলিও এঁদের জানা ছিল। বীজগণিত ও জ্যামিতি নিয়েও এঁরা চর্চা করেন এবং জ্যোতির্বিজ্ঞানের ক্ষেত্রেও এঁদের অবদান কম ছিল না।

মিশর : প্রাচীন মিশরের গণিতের ইতিহাস জানতে পারা যায় প্যাপিরাসে লিখিত পুঁথি থেকে। এ জাতীয় একটি পুঁথি হল Ahmes Papyrus, যেটির রচনাকাল খৃঃ পূঃ 1600 সাল বলে ধরা হয়। মিশরীয়রা দশমিকের ভিত্তিতে হিসাব

নিকাশ করতেন। মিশরীয়রা ছবির সাহায্যে সংখ্যা প্রকাশ করতেন। আবার অনেক সময় খুব টানা টানা অক্ষর লেখা বা রেখার সাহায্যেও সংখ্যা প্রকাশ করা হ'ত। প্রথম পদ্ধতিটিকে বলা হ'ত—hieroglyphics ; আর দ্বিতীয়টিকে বলা হ'ত—hieratic। মিশরীয়রা যে গণিতকে অত্যন্ত দক্ষতার সঙ্গে ব্যবহারিক কাজে লাগিয়ে ছিলেন তার সুস্পষ্ট প্রমাণ হল পিরামিডগুলি। জ্যামিতির অত্যন্ত সূক্ষ্ম পরিমাপও তাঁদের অজানা ছিল না। সেইজন্য দেখা যায় মিশরের সবচেয়ে বড় পিরামিড (Great Pyramid) তৈরী করতে যেয়ে যে সমস্ত কোণের সৃষ্টি হয়েছিল তার সবচেয়ে বেশী ভুলের পরিমাণ হল 12″ বা এক সমকোণের 1/27000 ভাগ মাত্র। প্রথম দিকে অবশ্য গণিতের চর্চা পুরোহিত শ্রেণীর মধ্যেই সীমাবদ্ধ ছিল। তাঁরা স্বার্থপরের মতো এই বিষয়টিকে আঁকড়ে ধরে ছিলেন বলে দীর্ঘ দিন যাবৎ সাধারণ লোক বিষয়টির রস আস্বাদনে অসমর্থ ছিল।

গ্রীস : গ্রীকরা ছিলেন জীবনবোধের রসে সিঞ্চিত এক স্বাধীন জাতি। জীবন সম্বন্ধে তাদের যেমন আগ্রহ ছিল–তেমনি কৌতূহলও ছিল। তাদের পর্যবেক্ষণ ক্ষমতাও ছিল অত্যন্ত সূক্ষ্ম। তারা মিশরীয় ও মেসোপটেমিয়ার অধিবাসীদের গণিত সম্বন্ধে গবেষণার ফল লক্ষ্য করে মুগ্ধ হয়েছিল। কিন্তু প্রভাবিত হওয়া সত্ত্বেও তারা সেগুলি পুরোপুরি নকল করেননি। গ্রীস দেশে তখন দাসত্ব প্রথা প্রচলিত ছিল, সেইজন্য ধনী সম্প্রদায় বুদ্ধিগত আলোচনাতে যথেষ্ট সময় খরচ করতে পারত। গ্রীকদের সবচেয়ে বড় অবদান হল জ্যামিতির ক্ষেত্রে। Geometry কথাটির উৎপত্তিই গ্রীক শব্দ geo (=earth) এবং metria (=measurement) থেকে। জমি জরীপ করার ব্যবস্থারও প্রথম প্রচলন করেন গ্রীকরা। কতকগুলি সহজ এবং সুস্পষ্ট সত্য (axiom) থেকে তাঁরা যুক্তিপূর্ণ বিচারকরণ বা যুক্তিযুক্তভাবে প্রমাণ করার পদ্ধতি প্রবর্তন করেন। এবার গ্রীসদেশের কয়েকজন সুবিখ্যাত গণিতবিদের নাম উল্লেখ করা হল।

পীথাগোরাস (Pythagoras) : ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি সম্বন্ধীয় ও অন্যান্য কতকগুলি উপপাদ্য তিনি আবিষ্কার করেন। সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় যে উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের নাম বহন করে—সেটি কিন্তু মিশরীয়রা প্রায় ১,৫০০ বৎসর পূর্বে এবং চীনারাও তারও পূর্বে জানত। হিন্দুরাও পীথাগোরাসের আগেই উপপাদ্য জানতো। ক্ষেত্রফল এবং ঘনফলের বৈশিষ্ট্যগুলিও তিনি আবিষ্কার করেন। বাস্তবিক পক্ষে পীথাগোরাসই জ্যামিতিকে একটি নিখুঁত বিজ্ঞানের পর্যায়ে উন্নীত করেন।

হিপোক্রেটস্ (Hippocrates) : (460 খৃঃ পূঃ) তিনি গণিত সম্বন্ধে পুস্তক রচনা করেন। বৃত্তাঙ্কন ও বৃত্ত সম্বন্ধীয় উপপাদ্য প্রমাণ করার ব্যাপারে তিনি অগ্রণী ছিলেন। তিনি প্রথম প্রমাণ করেন—সমান সমান বৃত্তাংশে সমান সমান কোণ উৎপন্ন হয়। বিন্দু ও সরলরেখার সুনির্দিষ্ট পদ্ধতিতে সংজ্ঞা দেবার ব্যাপারে তাঁকে অনেকে পথিকৃৎ বলে থাকেন।

ইউক্লিড (Euclid): ইউক্লিড ছিলেন মিশরের অধিবাসী। তিনি গণিতশাস্ত্র অধ্যয়ন করার জন্যই আলেকজান্দ্রিয়া আসেন এবং পরবর্তীকালে তিনি আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিত বিভাগের প্রধান অধ্যাপকের পদ অলঙ্কৃত করেন। তিনি জ্যামিতি সম্বন্ধে Element নামক একটি পুস্তক রচনা করেন। তাঁর এই পুস্তকে তিনি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে বীজগণিত আলোচনা করেছেন। ইউক্লিড অবশ্য জ্যোতির্বিজ্ঞান ও সঙ্গীত সম্বন্ধেও পুস্তক রচনা করেছেন।

আর্কিমিডিস (Archimedes): ইনি ছিলেন সিসিলীর অধিবাসী এবং পড়াশুনা করার জন্য তিনি আলেকজান্দ্রিয়া আসেন। আর্কিমিডিসের গল্প প্রায় সকলেরই জানা আছে। তাঁর সময়ে গণিতে যে সমস্ত শাখার প্রচলন ছিল, তিনি তার প্রায় সবগুলির উপরই পুস্তক রচনা করেন। তবে জ্যামিতির ক্ষেত্রে তাঁর কৃতিত্বই সর্বাধিক। তিনি প্রমাণ করেন যে একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান—যে ত্রিভুজের ভূমি বৃত্তটির পরিধির সমান এবং যার উচ্চতা বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান। যদি ব্যাসার্ধ a ধরা হয়, তবে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}a \times 2\pi a$. তাছাড়া তিনি প্রমাণ করেন—বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুপাত হল 11 : 14 (আনুঃ)।

অ্যাপোলোনিয়াস (Apollonius): অ্যাপোলোনিয়াস বিখ্যাত ছিলেন শাঙ্কব জ্যামিতির জন্য (co ic geometry)। তিনিই 'Ellipse, Parabola, Hyperbola এই সমস্ত নামগুলি প্রচলন করেন। অ্যাপোলোনিয়াসের সময়ই এবং তাঁর অবদানের জন্য গ্রীস দেশে গণিতের উন্নতি চরমে ওঠে।

ডায়োফ্যান্টাস (Diophantus): আলেকজান্দ্রিয়ার গণিত জগতের শেষ বিখ্যাত গণিতবিদ হলেন ডায়োফ্যান্টাস। খৃঃ পূঃ ৩য় শতকে তিনি জীবিত ছিলেন। তাঁকে ত্রিকোণমিতির জনক বলা যেতে পারে। তিনি বিভিন্ন কোণের একটি তালিকাও প্রণয়ন করেন। তিনি Arithmetica নানক একটি গ্রন্থ রচনা করেন, যদিও গ্রন্থটির আলোচ্য বিষয় ছিল বীজগণিত।

এরপর গণিতের ইতিহাসকে **তিনটি স্তরে** ভাগ করা যায়।

প্রথম স্তর হল: খ্রীষ্টীয় ৪র্থ থেকে ষোড়শ শতাব্দী পর্যন্ত,

দ্বিতীয় স্তর হল:—সপ্তদশ শতাব্দী থেকে আধুনিক যুগের পূর্ব পর্যন্ত,

তৃতীয় স্তর হল:—আধুনিক যুগ।

প্রথম স্তর: এই স্তরের প্রথমেই বলতে হয় রোমানদের কথা। রোমানরা ছিল অত্যন্ত কর্ম-দক্ষ জাতি। তাঁরাই প্রথম গণিতের জ্ঞানকে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করেন। গণিতের সাহায্যে তাঁরা জমি জরীপ করতেন এবং বাড়ী তৈরী করতেন। তাঁরা গণিতকে বিশুদ্ধ (Pure) এবং ফলিত (Applied) এই দু'ভাগে

ভাগ করেন। তাঁদের নিজস্ব সংখ্যাসারি ছিল—যে সংখ্যাগুলি আসলে বর্ণ (letters)। যেমন—I, V, X, L, C, D, M ইত্যাদি। রোমানদের প্রচলিত সংখ্যাসারি এখনও বহুক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

বর্বর আক্রমণের ফলে রোম সাম্রাজ্যের পতন হয়। আনুমানিক পাঁচ শত খৃষ্টাব্দে গণিত সম্বন্ধে গবেষণার কেন্দ্রস্থল হয়ে ওঠে ভারতবর্ষ। এর প্রায় চারশত বৎসর পরে এই কেন্দ্র সরে চলে যায় মেসোপটেমিয়াতে। পঞ্চদশ বা ষোড়শ শতাব্দী পর্যন্ত ভারতবর্ষই ছিল গণিত সম্বন্ধে বিভিন্ন গবেষণা ও আবিষ্কারের ক্ষেত্রে অগ্রণী। এখান থেকেই সমস্ত পৃথিবী দশমিক প্রথা ও শূন্য সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে। তবে দুঃখের বিষয়, ভারতবর্ষের এই সমস্ত আবিষ্কার কিভাবে অন্য দেশে চলে যায় এবং যে ভারতবর্ষ গণিতে একদিন শীর্ষস্থান অধিকার করেছিল, সেই ভারতবর্ষকেই অন্য দেশ থেকে গণিতের তত্ত্ব শিক্ষা করতে হয়। যাই হোক ভারতবর্ষের শীর্ষস্থানীয় গণিতবিদদের মধ্যে নিম্নোক্তদের নাম উল্লেখযোগ্য।

১। **আর্য ভট্ট (Arya Bhatta):** ইনি আনুমানিক ষষ্ঠ শতকে জীবিত ছিলেন। তাঁর প্রধান কাজগুলিকে চার ভাগে ভাগ করা হয়। এইগুলির মধ্যে তিন ভাগই হল জ্যোতির্বিজ্ঞান সম্বন্ধীয়। চতুর্থ ভাগে আছে পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি সম্বন্ধীয় তেত্রিশটি নিয়ম। বীজগণিতে Series, linear এবং quadratic equation তিনি প্রচলন করেন। দশমিক পদ্ধতিও তাঁর অজানা ছিল না বলেই মনে হয়। বর্গমূল নির্ণয়ের একটি নিয়মও তিনি আবিষ্কার করেন। তিনি π-এর মান যে 3 1416, তা প্রমাণ করেন।

২। **ব্রহ্মগুপ্ত (Brahmagupta):** তিনি পাটীগণিত, বীজগণিত ও জ্যামিতি সংক্রান্ত একটি পুস্তক রচনা করেন। জ্যোতির্বিজ্ঞানে তিনি প্রথম বীজগণিত প্রয়োগ করেন। ঋণাত্মক রাশি-সংক্রান্ত নিয়মও তিনি প্রথম প্রবর্তন করেন। $x^2+px+q=0$, এই জাতীয় সমীকরণের সমাধানের একটি নিয়ম তিনি আবিষ্কার করেন।

এঁর পর উত্তর ভারতে গণিতের চর্চা বেশ কমে যায়। তার প্রায় দুইশত বৎসর পরে দক্ষিণ ভারতে আবার ব্যাপকভাবে গণিত চর্চা শুরু হয়।

৩। **মহাবীর (Mahavira):** ইনি আনুঃ ৮৫০ খৃষ্টাব্দে জীবিত ছিলেন। তিনি তৎকালীন প্রচলিত গণিতকে উন্নত করার জন্য প্রভূত পরিশ্রম করেন। তিনি শূন্য (zero) সম্বন্ধে কতকগুলি মূল্যবান নিয়ম লিপিবদ্ধ করে যান। যেমন: কোন রাশিকে শূন্য দিয়ে গুণ করলে গুণফলও শূন্য হবে। শূন্য দ্বারা ভাগ করলে, শূন্য যোগ করলে বা শূন্য বাদ দিলে রাশিটির কোন পরিবর্তন হয় না।

গুণ পদ্ধতিতে ভাগের উত্তর মিল করার পদ্ধতি বা ভগ্নাংশের ভাগে গুণ পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া (যেমন $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}$) তিনিই প্রথম প্রচলন করেন। এই নিয়মটি ইউরোপের অধিবাসীদের ষোড়শ শতাব্দী পর্যন্ত অজানা ছিল। তিনি Quadratic equation সম্বন্ধেও অনেক গবেষণা করেন।

৪। **ভাস্কর (Bhaskara) :** ভাস্কর যতদূর সম্ভব ১১০০ খ্রীষ্টাব্দে জীবিত ছিলেন। তাঁকে সেই সময়ের সবচেয়ে জ্ঞানী ব্যক্তি বলা হ'ত। ভাস্কর উজ্জয়িনীতে পড়াশুনা করেন। তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থের নাম হল—**লীলাবতী**। এই পুস্তকটি প্রধানতঃ পাটীগণিত ও পরিমিতি সম্বন্ধীয়। তা ছাড়াও এতে কিছু কিছু বীজগণিতের আলোচনাও ছিল। লীলাবতীতে যথেষ্ট '0'-র ব্যবহার দেখা যায়। তাছাড়া দশমিক সংখ্যার ব্যবহারও তাতে ছিল। তিনি দিক নির্দেশক সংখ্যা, ঋণাত্মক রাশি, অজানা সংখ্যা, quadratic equation ইত্যাদি নিয়েও যথেষ্ট গবেষণা করেন।

হিন্দু গণিতবিদদের দু'টি বিখ্যাত অবদান হল—0 (শূন্য) ও দশমিক পদ্ধতি। 0-কে বলা হয় শূন্য (শূন্য স্থান অর্থাৎ কিছু নেই বা কিছু নয়)। প্রকৃত পক্ষে এই নামকরণের সঙ্গে তৎকালীন দর্শনের একটা বিশেষ যোগসূত্র ছিল। যাই হোক এই শূন্য আবিষ্কৃত না হলে সংখ্যা ব্যবহারে যথেষ্ট অসুবিধা হ'ত। শূন্য আবিষ্কারের জন্যই সংখ্যার ব্যবহার এত সহজ হয়েছে। তেমনি দশমিক পদ্ধতি প্রচলিত হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে দশগুণ, শতগুণ, সহস্রগুণ বা দশাংশ, শতাংশ, সহস্রাংশ প্রভৃতি নির্ণয় করা সম্ভব হয়েছে। এক কথায়, কোন সংখ্যার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করার জন্য দশমিক পদ্ধতির প্রয়োগ অপরিহার্য।

আরবদের বলা হয় গণিত সম্বন্ধে জ্ঞানের বাহক। তারা নিজেরা যতটা আবিষ্কার করেছে তার থেকে বেশী তারা এক দেশের আবিষ্কার অন্য দেশে বহন করে নিয়ে গেছে। গ্রীস দেশে গণিতের যে চর্চা হয়েছিল, তা সংরক্ষিত ছিল আরবদের কাছে। যথাসময়ে তারা তা বহন করে নিয়ে যায় ইউরোপে। তেমনি যখন তারা ভারতবর্ষে আসে তখন ভারতবর্ষের গবেষণা লব্ধ জ্ঞান তারা বহন করে নিয়ে যায় নিজেদের দেশে এবং কালক্রমে সেখান থেকে চলে যায় ইউরোপ।

মধ্যযুগে ধর্মযুদ্ধ প্রচলিত ছিল। সেই সময় তুর্কীদের হাত থেকে পবিত্র ভূমি প্যালেস্টাইনকে রক্ষা করার জন্য ইউরোপ থেকে সৈন্যদল আসতে শুরু করে। তাদের যাত্রা পথে পড়ে ভূমধ্যসাগর। যখন তারা ইউরোপ থেকে ইটালীর দিকে অগ্রসর হ'ত তখন ভেনিস, জেনোয়া প্রভৃতি ইটালীর বিখ্যাত বন্দরে তাদের অবস্থান করতে হ'ত। এর ফলে ঐ বন্দরগুলি ব্যবসা-বাণিজ্যের কেন্দ্র হিসাবে গড়ে ওঠে। এর জন্যই অর্থাৎ ব্যবসা-সংক্রান্ত হিসাব-পত্রের জন্যই আরবী ও ইটালীয় গণিতবিদদের মধ্যে একটা সমন্বয় স্থাপিত হয়। এই সময়কার বিখ্যাত গণিতবিদ হলেন—

Leonardo Fibonacci : ইনি ১২২৮ খৃঃ অব্দে একখানি পুস্তক রচনা করেন। এই পুস্তকের সাহায্যেই ইউরোপে সর্বপ্রথম দশমিক পদ্ধতি প্রচার করা হয়। তিনি Practical Geometry নামক আর একটি পুস্তকও রচনা করেন। $x^2-y^2=z^2$ —এই জাতীয় সমাধানের প্রচলন তাঁর সময়েই হয়।

Francois Vieta : ষোড়শ শতাব্দার একজন বিখ্যাত ফরাসী গণিতবিদ। ইনি প্রধানতঃ বীজগণিত ও জ্যামিতির উপর পুস্তক প্রণয়ন করেন।

John Napier : জন নেপিয়ারের জন্ম এডিনবরাতে ১৫৮০ খ্রীঃ অব্দে। তিনি ছিলেন একজন পদার্থবিজ্ঞানী ইন্‌জিনয়ার। আধুনিক লগারিদ্‌মের তিনিই জনক। আসলে logarith শব্দের অর্থ হল আনুপাতিক সংখ্যা, Logarithm-এর মূলকে (base) এখনও Napier-এর নামের অনুসারে Napier an base বলা হয়।

দ্বিতীয় স্তর—খ্রীষ্টীয় সপ্তদশ শতাব্দী থেকেই গণিতের বহুমুখী বৃদ্ধি ও প্রসার লক্ষ করা যায়। ছাপাখানার উদ্ভব হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে গণিতের অত্যন্ত দ্রুত প্রসার ঘটতে দেখা যায়। তাছাড়া বিভিন্ন ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার অবশ্যম্ভাবী হয়ে পড়ার জন্য গণিতের ক্ষেত্রে নূতন নূতন গবেষণার প্রয়োজনও অনুভূত হয়েছিল। গণিত সম্বন্ধে বিভিন্ন প্রয়োজনীয় যন্ত্রপাতিও আবিষ্কৃত হয়। এই স্তরেই গণিতের বিভিন্ন শাখা-প্রশাখা সমানভাবে উন্নত হয়।

এই সময়ের বিখ্যাত গণিতবিদদের মধ্যে অন্যতম হলেন Galileo, Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662), Newton (1642-1727) প্রভৃতি। এঁদের উল্লেখযোগ্য অবদান হল :—

Galileo : পেণ্ডুলাম ঘড়ি আবিষ্কার, hydrostatic balance, বলবিদ্যা (Mechanics), শক্তি ও গতি সম্বন্ধীয় নিয়মাবলী।

Kepler : গ্রহের গতি (Astronomy), আয়তন নির্ণয়।

Descartes : Analytical Geometry (Algebra+Geometry), বীজগণিতে জ্যামিতির প্রয়োগ, চিহ্নের (Signs) নিয়মাবলী।

Fermat : Theory of Numbers, Geometry, Problems on Probability.

Wallis : Infinite Series, Calculus.

Pascal : জ্যামিতি-শাঙ্কব জ্যামিতি।

Newton : মাধ্যাকর্ষণ, সাদা আলোর রং নির্ণয়, binomial Theorem ; *Principia* নামক একখানা পুস্তক তিনি রচনা করেন। তাঁর বিখ্যাত আবিষ্কার হল নিরন্তর পরিবর্তনশীল সংখ্যার পরিবর্তনের হার (fluxion), স্বচ্ছন্দ গতিবিশিষ্ট সংখ্যা (fluents), differential এবং Integral Calculus.

তৃতীয়স্তর : আধুনিক যুগে উন্নত স্তরের গণিত বলতে যা বোঝায় (higher-mathematics) তার চর্চাই বেশী হয়েছে। গণিতের দু'টি শাখাকে পৃথক করে নিয়ে দু'টি শাখাতেই ব্যাপক গবেষণা চালানো হচ্ছে এখনও। একটি শাখা হল ; বিশুদ্ধ গণিতের শাখা, যেটি তত্ত্বমূলক। অপরটি হল ফলিত গণিত, যেটি ব্যবহারমূলক অর্থাৎ যে শাখাটির অন্য বিষয়ের ক্ষেত্রে বা ব্যবহারিক জীবনে প্রয়োগ করার প্রয়োজনীয়তা আছে। যাই হোক যাঁদের গবেষণার ফলে উন্নত স্তরের গণিত উন্নততর হয়েছে, তাঁদের নাম ও অবদান সংক্ষেপে উল্লেখ করা হল।

Leonhard Euler (1707-1783) : গাণিতিক বিশ্লেষণ, difference Calculus-এর উপর পূর্ণাঙ্গ পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন।

Laplace : মাধ্যাকর্ষণ ব্যাখ্যা করার ক্ষেত্রে ক্যালকুলাসের প্রয়োগ, Calculus of Probability-র সৃষ্টি।

G. D. Birkhoff (1884-1944) : General dynamics, Theory of orbits, Point-set Theory, বহু বিস্তার (dimension) বিশিষ্ট ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়। তিনি আপেক্ষিক তত্ত্ব সম্বন্ধেও দু'টি পুস্তক রচনা করেন।

C. H. Hardy (1877-1947) : বিশ্লেষণ ও পাটীগণিত সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান। বহু বিভিন্ন জাতীয় পাঠ্যপুস্তক প্রণেতা, Convergence and Summability of Series, inequalities, analytic theory of numbers প্রভৃতি বিষয়ে তাঁর অবদান প্রচুর। হার্ডির মতে—চিত্রকর বা কবির মতো গণিতবিদ একজন শিল্পী। তবে শেষোক্ত শিল্পীর শিল্প কাজ চিরস্থায়ী না হলেও দীর্ঘস্থায়ী; শিল্পীদের সকলকেই একটা বিশেষ নিয়ম মেনে চলতে হয়। গণিতের ক্ষেত্রে এই নিয়ম একটু কঠিন হলেও নিয়মটির সুষম বিকাশের জন্য সেটি সুন্দর হওয়া চাই—আর তা সুষ্ঠুভাবে পালিত হওয়া চাই।

শ্রীনিবাস রামানুজন (Srinivasa Ramanujan, 1887-1920) : বিচিত্র জীবনের অধিকারী শ্রীনিবাস রামানুজন গণিত জগতে এক বিস্ময়কর প্রতিভা। এক মধ্যবিত্ত ব্রাহ্মণ বংশে তাঁর জন্ম। মাত্র ১৬ বৎসর বয়সে তিনি ম্যাট্রিক পাশ করেন। কলেজে পড়ার সময় তিনি খুব একটা কৃতিত্বের পরিচয় দিতে পারেন ন। সাংসারিক অবস্থা বেশ সচ্ছল ছিল না বলে চাকুরীর প্রয়োজনে ও খাতিরে ১৯০৯ সালে তিনি বিবাহ করতে বাধ্য হন। মাদ্রাজ পোর্ট ট্রাস্টে একজন সাধারণ কেরানীরূপে তাঁর কর্মজীবন শুরু হয়। কিন্তু তখন থেকে তিন গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে ব্যাপক গবেষণা শুরু করেন। তাঁর প্রথম দিকের গবেষণাগুলি Journal of the Indian Mathematical Society-তে প্রকাশিত হ'ত। তাঁর প্রবন্ধে 'Some Properties of Bernoullis Numbers' উচ্চ প্রশংসিত হয়েছিল। Madras Port Trust-এর চেয়্যারম্যানের সহায়তায় তিনি বিখ্যাত গণিতবিদ C. H. Hardy-র সঙ্গে যোগাযোগ করতে সমর্থ হন। এর পর স্কলারশিপ নিয়ে তিনি ইংল্যাণ্ড যাত্রা করেন এবং Hardy-র অধীনে গবেষণা শুরু করেন।

Modular equation, theorem of complex multiplication, continued fractions প্রভৃতি বিষয়ে তাঁর সমকক্ষ কেউ আর ইংল্যাণ্ডে ছিলেন না। হার্ডি তাঁর উচ্ছ্বসিত প্রশংসা করেছেন। তিনি পাঁচ বৎসর ইংল্যাণ্ডে ছিলেন এবং সেখানকার Royal Society-র সদস্য নির্বাচিত হয়েছিলেন। তিনি Trinity Fellowship-এর জন্যও নির্বাচিত হয়েছিলেন। মাত্র তেত্রিশ বৎসর বয়সে টি. বি. রোগে এই তরুণ ও প্রতিভাবান গণিতবিদের জীবনাবসান হয়।

গণিতের ইতিহাসের গুরুত্বঃ শিশুর বয়োবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে সে যে সমস্ত শারীরিক ও মানসিক স্তর অতিক্রম করে, সেগুলি পৃথিবী সৃষ্টি হবার পর মানব জাতির জীবনবিকাশের স্তরের অনুরূপ, কিন্তু একটা পার্থক্য আছে। মানবজাতীর সর্বাঙ্গীণ বিকাশের জন্য প্রয়োজন হয়েছিল হাজার বছরের, কিন্তু শিশুকে খুব কম সময়ের মধ্যে ঐ সমস্ত স্তরগুলি অতিক্রম করতে হয়। গণিত শিক্ষণের সময় এ সত্যটি মনে রাখতে হবে। শিশুর স্বাভাবিক এবং সুসমঞ্জসপূর্ণ বৃদ্ধির যেন কোন প্রকারে পরিবর্তন না হয়। এই বৃদ্ধির স্বাভাবিক বিকাশটি বাধাপ্রাপ্ত হলে শিশুর ব্যক্তিসত্তা পুরোপুরি গড়ে উঠতে পারে না। শিশুর প্রকৃতি অনুসারে শিশুর বৃদ্ধি পরিচালিত করতে হবে।

শুনতে আশ্চর্য লাগে, গণিতের বৃদ্ধি বা ক্রমবিকাশ শিশুর মানসিক বিকাশের অনুরূপ। গণিতের ইতিহাস সেদিক দিয়ে শিশুর মানসিক বৃদ্ধিকে সাহায্য করে এবং শিক্ষকের পাঠ-পরিকল্পনা ও পাঠদান কার্যে সাহায্য করে। তাছাড়া গণিতের ইতিহাস শিক্ষণ আর এক দিক থেকে গুরুত্বপূর্ণ। গণিতের ইতিহাস থেকেই জানতে পারা যায় শিশুকে গণিত শিক্ষা দিতে হলে কোন্ কোন্ স্তরের মধ্য দিয়ে যেতে হবে।

এমন একদিন ছিল যেদিন মানুষ গণনা করতে জানত না। এক, দুই, তিন ইত্যাদি করে তার গণনা করতে পারত না। কিন্তু কোন বিশেষ একটি জিনিস যে একটি জিনিস, তা তারা বুঝতে পারত। ক্রমশঃ তারা একটি জিনিসের সঙ্গে একাধিক পার্থক্য বুঝতে শিখল। কিন্তু তখন তাদের এই বোধটি ছিল না যে এক আর একে দুই হয়। সংখ্যাগুলির বিশেষ কোন নামও ছিল না। তখনকার দিনে মেষপালনের প্রথা প্রচলিত ছিল। মেষপালককে তার ক'টি মেষ আছে জিজ্ঞাসা করলে সে চট্ করে উত্তর দিতে পারত না। সে প্রতিটি মেষের জন্য একটি করে নুড়ি পাথর রাখত। যখন তাকে জিজ্ঞাসা করা হত তোমার ক'টি মেষ আছে? তখন সে সব নুড়িগুলি দেখিয়ে বলত—আমার এতগুলি মেষ আছে। পরে যখন মেষের সংখ্যা অনেক বেড়ে গেল, তখন একটি মেষের জন্য এক-একটি নুড়ি রাখতে গেলে নুড়ির সংখ্যা অনেক বেশী হ'ত, তাই এক এক দল মেষের জন্য একটি করে নুড়ি রাখা হ'ত, হয়তো দুটি মেষের জন্য একটি নুড়ি রাখা হত। তখন দশটি মেষ বোঝাবার জন্য সে পাঁচটি নুড়ি দেখাত—কিন্তু বলত না পাঁচ জোড়া মেষ আছে। কাজেই দেখা যাচ্ছে, প্রথম অবস্থাতে কেবল চোখে দেখে সংখ্যার কম-বেশী নির্ণয় করা হ'ত। এর জন্য কোন যুক্তি তারা দেখাতে পারত না। কিন্তু এ অবস্থা বেশীদিন চলল না। শীঘ্রই যুক্তির প্রয়োজন দেখা দিল। যে মেষের সংখ্যা এতদিন নুড়ির সাহায্যে নির্ণয় করা হ'ত, এবার তা সংখ্যার সাহায্যে নির্ণয় করার ব্যবস্থা করা হল। ক্রমে ক্রমে সংখ্যাগুলির বিশেষ নামও আবিষ্কৃত হল। ছোট-বড় বিভিন্ন দল স্থির করে সংখ্যাগুলির ভিন্ন ভিন্ন নাম দেওয়া হল। এখনও দল-অনুযায়ী সংস্থার নাম স্থির করার প্রথাটি প্রচলিত আছে। আমরা এখনও জোড়া, দশ, কুড়ি, শ', হাজার ইত্যাদি দলগত নাম ব্যবহার করে থাকি।

গণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে মানুষ কিভাবে গণিতের জ্ঞান অর্জন করল, তার বিভিন্ন স্তরের একটি পরিচয় পাওয়া যায়। সেই স্তরগুলি হল—

১। চোখে দেখে মূর্ত জিনিস সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা।

২। মূর্ত জিনিসের সাহায্যে মূর্ত জিনিসের সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

৩। জিনিসগুলিকে কতকগুলি দলে ভাগ করে কতকগুলি মূর্ত জিনিসের সাহায্যে সেই দলগুলির সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করা।

৪। সংখ্যাগুলির নাম স্থির করা।

৫। ছোট এবং বড় দল স্থির করে নাম দেওয়া।

৬। সংখ্যাগুলির বিশেষ বিশেষ নামের সাহায্যে গণনা করা।

৭। বিমূর্ত সংখ্যা গণনা করা।

ছাত্রদিগকে এই স্তরগুলি অনুসরণ করে গণিত শিক্ষা দিতে হবে। এর জন্য নিম্নোক্ত সাধারণ নিয়মগুলি মনে রাখতে হবে।

১। প্রথমেই সংখ্যাটির বিশেষ নামটি ছাত্রকে না শিখিয়ে সংখ্যাটি সম্বন্ধে তাকে একটা ধারণা দিতে হবে। যখন সে 'এক' বা 'দুই' বলে, তখন তার অর্থ তাকে আগে বুঝতে হবে। তোতাপাখীর মতো এক, দুই, তিন—এর অর্থ না বুঝে পুনরাবৃত্তি করা নিরর্থক।

২। প্রথমে মূর্ত জিনিসের সাহায্যে ছাত্রকে গননা করতে শেখানো হবে, তারপর বিমূর্ত সংখ্যা ব্যবহার করা উচিত।

৩। সেইরূপে ছাত্রকে প্রথমে এককভাবে গণনা করতে শিক্ষা দিয়ে তারপর দলগতভাবে গণনা করতে শিক্ষা দেওয়া উচিত।

গণিত শিক্ষা দেবার সময় পূর্বোক্ত স্তরগুলির কথা বিশেষভাবে মনে রাখতে হবে। প্রতিটি স্তর অনুযায়ী শিক্ষা দিলে তা যথেষ্ট কার্যকরী হয়। দু-একটি স্তর হয়তো বাদ দেওয়া যেতে পারে কিন্তু এদের বিন্যাসটি ওলট-পালট করা উচিত নয়। যেভাবে স্তর-বিন্যাসের কথা বলা হয়েছে—সেটি হল স্বাভাবিক বিন্যাস।

সংখ্যা গণনা করতে শেখার জন্য মানুষের কয়েক সহস্র বছরের প্রয়োজন হয়েছিল। আবার সংখ্যাগুলি কি ভাবে লেখা হবে, তা নির্ণয় করতে লেগেছে আরও কয়েক সহস্র বছর। কিসে লেখা হবে তাও স্থির করা সম্ভব হয়নি প্রথম অবস্থাতে। সভ্যতার প্রথম প্রত্যুষে, দেখা যায়, মানুষ গাছের ছালে চিহ্নের সাহায্যে সংখ্যা খোদাই করে রাখতো। মিশরবাসীরাও দাগ কেটে সংখ্যা প্রকাশ করতো। আমাদের শৈশব অবস্থাতে বৃদ্ধাদের দেখেছি দেওয়ালে দাগ কেটে গোয়ালার দুধের হিসাব রাখতে। তাঁরা লেখাপড়া বিশেষ জানতেন না বটে, কিন্তু দাগ কেটে হিসাব করা হলেও সে হিসাবে কোনদিন ভুল হ'ত না। আবার গ্রামে দেখেছি, চাষীরা ধান মাপ করে এক একটি মাপের জন্য একটি করে পাথর বা ইটের টুকরো রাখে। পরে সমস্ত ধান মাপ করা হয়ে গেলে পাথরের সাহায্যে মোট ধানের পরিমাণ ঠিক করে। এ দুটিই হল

গণনা করার প্রথম দিকের কৌশল। যাই হোক, প্রাচীন পদ্ধতিতে দাগ কেটে গণনা করার সময় মানুষ দেখল এই পদ্ধতিতে খুব বড় সংখ্যা লেখা সম্ভব নয়। তখন বড় সংখ্যাকে ছোট চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করার চেষ্টা চলতে লাগল। আমরা এখনও রোমান্ চিহ্ন ব্যবহার করে থাকি। I, II, III, IV, V, X, C (=100), M (=1000), L (=50) এখনও ব্যবহৃত হয়। রোমানরা কোন বড় সংখ্যার বাম দিকে একটি ছোট সংখ্যা বসিয়ে বিয়োগ করার পদ্ধতি আবিষ্কার করে, আবার ডানদিকে সংখ্যা থাকলে সেটি যোগ হবে এটিও তাদের আবিষ্কার। যেমন—XL (=50 − 10), LX (50 + 10) ইত্যাদি। রোমানরা হাতের আঙ্গুলের সাহায্যে পাঁচ ও দশটি জিনিসের দল প্রকাশ করত। বিভিন্ন দল বিভিন্ন প্রতীক বা চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হ'ত। তবে প্রতীকগুলির অর্থ ঠিকমত বুঝে তারপর সংখ্যাটি লিখতে অনেক সময় লাগত। যেমন—যদি M CM LX IX -এর বদলে কি সংখ্যা হবে তা প্রকাশ করতে বলা হয় তবে এটি যে 1969 (M = 1000, CM = 900, LX = 60. IX = 9) তা নির্ণয় করতে বেশ বেগ পেতে হয়। গণনার সুবিধার জন্যই abacus-এর উদ্ভব। এখনও বিভিন্ন দেশে ছেলেমেয়েদের এর সাহায্যে গণনা করতে শেখানো হয়।

সংখ্যা বলতে প্রথমে শূন্যকে (0, Zero) কিন্তু বোঝাত না। সংখ্যা আবিষ্কারের অনেক পরে '0', আর তার অনেক পরে দশমিক পদ্ধতি আবিষ্কৃত হয়। 1612 খৃষ্টাব্দে John Napier লগারিদ্‌মের সাহায্যে বড় বড় গুণ ও ভাগ করার পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। পরে Briggs এই পদ্ধতির আরো উন্নতি সাধন করেন। 1637 খ্রীষ্টাব্দে Rene Descartes নামক একজন ফরাসী গণিতবিদ Analytical Geometry-র ক্ষেত্রে নূতন দিগন্ত বিস্তার করেন। Fermat অথবা Leibuitz এবং Newton—এই তিনজনের মধ্যে কে প্রথম Differential এবং Integral Calculus আবিষ্কার করেন, সে বিষয়ে মতবিরোধ আছে। তবে একথা ঠিক যে তিনজনে প্রায় একই জিনিস আবিষ্কার করেন। এই প্রসঙ্গে বলা যেতে পারে, গণিতের উন্নতিকল্পে ভারতবাসীদের অবদানও কম উল্লেখযোগ্য নয়। স্বদেশবাসীদের গণিত সম্বন্ধে অবদানের কথা জানতে পারলে ছাত্ররাও স্বদেশের গৌরববৃদ্ধির জন্য গণিতের ক্ষেত্রে নূতন একটা কিছু আবিষ্কার করার চেষ্টা করতে পারে। এটাও কম আশার বা আনন্দের কথা নয়।

যাই হোক, এইবার দেখা যাক মাধ্যমিক স্কুলগুলিতে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দেওয়ার ফলে কি সুফল পাওয়া যেতে পারে।

গণিতের ইতিহাসের মূল্য ঃ—গণিতের বর্তমান পাঠক্রমে এর ইতিহাসের কোন স্থান দেওয়া হয়নি। বলতে গেলে গণিতের ইতিহাসটিকে অবহেলা করাই হয়েছে। এটি না পড়ানোর জন্য যে যুক্তি দেওয়া হয় তা হল গণিতের পাঠক্রমের অস্বাভাবিক দীর্ঘ ও জটিল আকৃতি। গণিতের ইতিহাস বাদ দিয়েও যে পাঠক্রম নির্দিষ্ট আছে তা শেষ করতে যথেষ্ট সময় লাগে।' গণিতের ইতিহাস যদি পড়াতে হয়, তবে নির্দিষ্ট

সময়ে পাঠক্রমটি শেষ করা সম্ভব হবে না। সেইজন্য বিষয়টি মাধ্যমিক স্তরে বা স্নাতক পর্যায়ে পড়ানো হয় না। স্নাতকোত্তর পর্যায়ে এই সম্বন্ধে কিছু আলোচনা হয়ে থাকে। অথচ মাধ্যমিক স্তরে এই ইতিহাস পাঠের ব্যবস্থা রাখলে যে বিশেষ সুফল পাওয়া যাবে, সে বিষয়ে আমরা দৃষ্টি দিই না। যাই হোক, গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে কি কি মূল্য অর্জিত হতে পারে, এখন সে সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক।

১। গণিতের ইতিহাস পাঠের ফলে ছাত্ররা বুঝতে পারে যে গণিত একটি প্রগতিধর্মী গতিশীল বিষয় এবং মানবিক আগ্রহ ও প্রয়োজনে পূর্ণ।

২। গণিতের অনেক কঠিন অধ্যায় এর ইতিহাস পাঠের ফলে সহজ ভাবে উপস্থাপিত করা সম্ভব। গণিতের আপাত-নীরস বিষয়বস্তুর মধ্যেও ছাত্ররা রস আস্বাদন করতে পারে।

৩। এই ইতিহাস পাঠের ফলে ছাত্ররা গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগের পরিচয় পায়। তারা বুঝতে পারে যে মানুষ নিজের প্রয়োজনেই গণিত আবিষ্কার করেছে। এটা একটা আকস্মিক দুর্ঘটনা জাত বিষয় নয়।

৪। গণিতের অনেক পদ (term), নাম বা ধারণা এর ইতিহাসের সঙ্গে ঘনিষ্ঠভাবে যুক্ত। এইগুলি বুঝতে হলে গণিতের ইতিহাস জানা একান্ত প্রয়োজন।

৫। উপযুক্ত চিত্র এবং উদাহরণ সহযোগে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে ছাত্রদের আগ্রহ বৃদ্ধি পায়।

৬। গণিত যে একটি বিচ্ছিন্ন বিষয় নয়, এর সঙ্গে যে আরো অনেক বিষয়ের যোগ আছে তা গণিতের ইতিহাস পাঠ করলে ভালোভাবে জানা যায়।

৭। শিশুরা তাদের পূর্ব-পুরুষদের অতীত কৃতিত্বের কথা শুনতে ভালোবাসে। তাদের মনে এই সময় 'বীরপূজা' করার একটা প্রবণতা দেখা যায়। সেদিক দিয়ে গণিতের ইতিহাস মানবজাতির অতীত কীর্তি ও গৌরবময় কৃতিত্বের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করে।

৮। গণিতের ইতিহাস শিশুকে জানিয়ে দেয় যে গণিত একটি মানব-সৃষ্ট বিজ্ঞান। কোন দৈবশক্তি এর পশ্চাতে কাজ করে না। ফলে ছাত্ররা নিজে কিছু আবিষ্কার করার একটা প্রবণতা অনুভব করে।

৯। গণিতের ইতিহাস থেকে জানা যায় যে গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে একটি সম্বন্ধ আছে। এর ফলে কোন একটি বিশেষ শাখাতে বিশেষজ্ঞ হবার অপ্রয়োজনীয় প্রচেষ্টা থেকে শিশুকে বিরত করা যায়।

১০। গণিতের ইতিহাস শিশুকে কোন ব্যাপারে দ্রুত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা থেকে বিরত করে।

১১। গণিতের ইতিহাস থেকে গণিত শেখানোর বিভিন্ন স্তরগুলির সঠিক পরিচয় পাওয়া যায়। এই স্তর-বিন্যাস অনুযায়ী ছাত্রদের গণিত শিক্ষা দেওয়া প্রয়োজন। মানবজাতি যেভাবে সম্পূর্ণ অজ্ঞ অবস্থা থেকে ধীরে ধীরে গণিতের জ্ঞান অর্জন করেছে, ঠিক সেইভাবেই শিশুকে গণিত শিক্ষা দেওয়া উচিত। বিষয়টির ক্রমবিকাশ,

প্রয়োজনীয়তা, সরলতা, পরীক্ষণমূলক দিক, ব্যবহারিক প্রয়োগ ইত্যাদির দিকে বিশেষ দৃষ্টি রাখা প্রয়োজন।

১২। শিক্ষক যদি সুষ্ঠুভাবে গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিতে পারেন, তবে ছাত্রের তাঁর জ্ঞানের পরিমাণ দেখে শিক্ষক সম্বন্ধে শ্রদ্ধা অনেক বেড়ে যায়। এর ফলে শ্রেণীতে শৃঙ্খলা বজায় রাখা তাঁর পক্ষে অনেক সহজ হয়।

দুঃখের বিষয়, গণিতের ইতিহাসের যথেষ্ট শিক্ষাগত মূল্য থাকা সত্ত্বেও বিদ্যালয়ের পাঠক্রমে এটি শিক্ষা দেবার ব্যবস্থাই নেই। গণিতের কোন জটিল তত্ত্ব বা তথ্যের সম্পূর্ণ উপলব্ধির আগে সেটি সম্বন্ধে ছাত্রদের মনে একটা ধারণা সৃষ্টি করা প্রয়োজন। তত্ত্ব বা তথ্যের প্রমাণের সঙ্গে পরিচিত হবার আগে সেগুলির সঙ্গে সহজভাবে পরিচিত হওয়া প্রয়োজন। কোন বিষয় ভালোভাবে শিখতে হলে তার গোড়া থেকে সুরু করাই উচিত। এর জন্যই গণিতের ইতিহাস—যাকে আমরা গণিতের ভিত্তি বলতে পারি—সেটি ভালোভাবে জানা উচিত।

ভারতবর্ষে বর্তমানে একটা দারুণ নৈরাশ্যবাদ তার কালো ছায়া বিস্তার করেছে। ছাত্রসমাজের উপরও তার একটা কুপ্রভাব পড়েছে। জীবনবোধের নিম্নতম মান সম্বন্ধে ধারণাও মনে হয় আমরা ভুলতে বসেছি। ছাত্রসমাজের কোন স্থির লক্ষ্য সেই, কোন মহান আদর্শ নেই। উপযুক্ত নেতৃত্বের অভাবে তারা বিপথগামী হচ্ছে। অথচ একটা মহান জাতির গৌরবময় কৃতিত্বের তারা যে ধারক এবং বাহক এ কথাটা তাদের মনে নেই। গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিলে তারা সেই মহান পূর্বপুরুষদের সঙ্গে পরিচিত হতে পারবে। বাঙালীর একটা দুর্নাম আছে—তারা নাকি বড় বেশী আত্মবিস্মৃত জাতি। পূর্বপুরুষদের কীর্তির কথা ভুলে গেছি বলেই আজ আমাদের এই হীনমন্য ভাব, আমাদের সামনে হতাশার এই গাঢ় অন্ধকার। কিন্তু আমাদের উজ্জ্বল অতীতের আলোকে বর্তমানকে আলোকিত করে ভবিষ্যৎকে কি রঙীন করে তুলতে পারি না? এ দায়িত্ব শিক্ষক সমাজের।

গণিতের ইতিহাস শিক্ষা দিতে গিয়ে আর একটি বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। এই ইতিহাসের গতি সর্বত্র একমুখী নয়। আবার অগ্রগতিও মাঝে মাঝে ব্যাহত হয়েছে। অর্থাৎ গণিতের চর্চা কখনও চরমে উঠেছে, আবার কখনও বা সম্পূর্ণ বন্ধ হয়ে গেছে। আবার গণিত-ইতিহাসের সমগ্র ইতিহাসও স্কুলের ছাত্রদের জানাবার কোন প্রয়োজন নেই। সেইজন্য এই ইতিহাসের সুনির্বাচিত অংশগুলিই ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা প্রয়োজন। সব শেষে Sarton-এর দু'টি বিখ্যাত উক্তি দিয়ে বক্তব্যটি শেষ করা যাক।

"The History of Mathematics should really be the kernel of the history of Civilization."

এবং

"The History of Mathematics exhilarating, because it unfolds

before us the visions of an endless series of victories—of the human mind, victories without counter balancing dishonourable and humiliating failures and without atrocities."

J. W. L Glaisher এর অভিমতও অনুরূপ। তিনি বলেছেন –"I *am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from history.*"

প্রশ্নগুচ্ছ

1. What is the importance of the history of mathematics to the teachers and students of the Subject ?

2. How does a study of the history of mathematics make one a better teacher of the Subject ? Discuss it with reference to the teaching of mathematics in Secondary School ?

3. Discuss with examples the value of the Study of History of Mathematics in mathematical instruction in Schools and the manner in which this should be incorporated in the teaching of the Subject with advantage.

4 Discuss the place of the History of Mathematics in the teaching of the subject,

———

ষষ্ঠ দশ অধ্যায়

গণিতে নতুন পাঠক্রম

(New Curriculum in Mathematics)

গণিত একটি অত্যন্ত গতিশীল বিষয় (dynamic Subject)। এই বিষয়টির অগ্রগতি বর্তমান শতাব্দীতেই সবচেয়ে বেশী বৃদ্ধি পেয়েছে। বর্তমানে যে সমস্ত গাণিতিক তথ্য ও তত্ত্বের সঙ্গে আমরা পরিচিত হতে পারছি তার বেশীর ভাগই আবিষ্কৃত হয়েছে এই শতাব্দীতে। অবশ্য গণিত কেবলমাত্র নিজস্ব ক্ষেত্রে উন্নতি অর্জন করে ক্ষান্ত হয় নি ; অন্যান্য শাস্ত্রকেও গণিত যথেষ্ট প্রভাবান্বিত করেছে। পূর্বে যে গণিতকে কেবলমাত্র প্রাকৃতিক বিজ্ঞান ও প্রযুক্তি বিদ্যার ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ করে রাখা হয়েছিল, সেই গণিতের প্রয়োগ-ক্ষেত্র বর্তমানে অত্যন্ত প্রসারিত হয়েছে। অর্থনীতি, ব্যবসা-বাণিজ্য ইত্যাদি বহু বিষয়ে গণিতের প্রয়োগ সুস্পষ্টভাবে লক্ষ্য করা যায়। কি সামাজিক জীবন, কি ব্যক্তিগত জীবন সর্বত্রই গণিতের ব্যবহার অপরিহার্য। গণিতের পাঠক্রম স্থির করার সময় এ সমস্ত বিষয় মনে রাখা প্রয়োজন।

গণিত সম্বন্ধে ধারণাটি স্থির বা অনড় হয়ে বসে নেই। যুগ পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে গণিত সম্বন্ধে ধারণা এর লক্ষ্য বা উদ্দেশ্য এবং পদ্ধতি সম্বন্ধে বৈপ্লবিক পরিবর্তন ঘটে যাচ্ছে পৃথিবীর বহু দেশেই। গণিতের লক্ষ্য হওয়া উচিত সমাজ ও ব্যক্তি উভয়ের কাজে লাগা এবং এই শাস্ত্রের নিজস্ব অগ্রগতি ও সামাজিক প্রয়োজনে এর প্রয়োগ এই উভয় ধারণার মধ্যে সুষ্ঠু সঙ্গতি সাধন করা। অন্যান্য দেশে যেমন গণিতের বিভিন্ন দিক নিয়ে গবেগণা চলছে আমাদের দেশেও এ নিয়ে বহু আলোচনা হয়েছে এবং হচ্ছে। National Council of Educational Research and Training এর প্রচেষ্টায় কয়েকটি পাঠচক্র এ নিয়ে গবেষণা করেছেন। পশ্চিমবঙ্গেও কিছু কিছু সংস্থা এ-জাতীয় আলোচনা চক্রের আয়োজন করেছেন।

১৯৭৪ সাল থেকে মাধ্যমিক শিক্ষার পুনর্বিন্যাস করা হয়। স্বভাবতঃই অন্যান্য পাঠক্রমের সঙ্গে সঙ্গে গণিতের পাঠক্রমটি পুনর্বিন্যস্ত করার প্রয়োজন দেখা দেয়। পর্ষৎ নতুন পাঠক্রম উল্লেখ করে যে পুস্তিকা প্রকাশ করেছে তাতে গণিত শিক্ষার চারটি উদ্দেশ্যের কথা বলা হয়েছে। সেগুলি হল :—(১) **বিচার শক্তির উন্নয়ন সাধন ; (২) পারিবারিক ও সামাজিক জীবনে উদ্ভূত সমস্যাবলীর সমাধান ; (৩) সঠিকভাবে তথ্যাদি প্রকাশ করা এবং সেগুলিকে কাজে রূপ দেওয়ার ক্ষমতার অনুশীলন এবং (৪) বহির্বিশ্বে মানুষের বিভিন্ন অভিযান সফল ও সার্থক করতে যে গণিত সাহায্য করেছে তার প্রতি অনুরাগ সৃষ্টি করা।**

এই উদ্দেশ্যগুলিকে সামনে রেখে নতুন পাঠক্রমটি রূপায়িত করতে হবে। অর্থাৎ পাঠক্রমটি অনুসরণের মাধ্যমে যেন আমরা ঐ সমস্ত উদ্দেশ্যে উপনীত হতে পারি—সে বিষয়ে যথেষ্ট যত্ন নিতে হবে। সেক্ষেত্রে গণিত শিক্ষাদানের সময় কতকগুলি বিষয় মনে রাখতে হবে। যেমন :

(১) যান্ত্রিক উপায়ের উপর গুরুত্ব আরোপ না করে ছাত্রছাত্রীদের বোধগম্যতার উপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে। তার অর্থ এই নয় যে প্রত্যেক ক্ষেত্রে কঠোর যুক্তি তর্কের আশ্রয় নিতে হবে। এই পদ্ধতি শিশুর স্বাভাবিক জ্ঞানের ভিত্তিতে 'নিজে আবিষ্কার করে' এই নীতির উপর জোর দেয়। কার্যশীলতা বা সক্রিয়তাই হ'ল এর মূল কথা।

(২) গণিতে যে সমস্ত সমস্যার অবতারণা করা হবে, সেগুলি হবে বাস্তবানুগ এবং শিক্ষার্থীর পারিপার্শ্বিক অবস্থা থেকে উদ্ভূত। জটিল এবং ঘোরানো সমস্যাগুলি বাদ দিতে হবে। কিন্তু স্থান অনুসারে শিক্ষার্থীদের পারিপার্শ্বিক অবস্থা পরিবর্তিত হয়ে যায়। একটি শহর ও একটি গ্রামের পারিপার্শ্বিক অবস্থা এক হতে পরে না। কাজেই কোন একটি নির্দিষ্ট পাঠ্যপুস্তক সকলের প্রয়োজন মেটাতে পারে না। সেই কারণে পাঠ্যপুস্তকের উপর অতিরিক্ত নির্ভরশীলতা কমাতে হবে। শিক্ষকরা নিজেরাই স্থানীয় পরিবেশ অনুসারে সমস্যা নির্বাচন করবেন। এতে শিক্ষার্থীরা সমস্যাটি সহজে উপলব্ধি করে নিজেরাই সমাধানে পৌছাতে পারবে। এইভাবে তারা বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে এবং মূর্ত থেকে বিমূর্ত ধারণায় পৌছাতে পারবে।

এই প্রসঙ্গে একটি উদ্ধৃতির উল্লেখ বোধ হয় অপ্রাসঙ্গিক হবে না। সেটি হল: "অঙ্ক শিক্ষায় সাধারণতঃ জোর দেওয়া হয় কয়েকটি নিয়ম আয়ত্ব করার উপরে। নিয়মগুলি আয়ত্ব করে যন্ত্রের মতো শিশু অঙ্ক কষে থাকে। এই অঙ্কগুলি শেখার কি উদ্দেশ্য, জীবনযাত্রার সঙ্গে এদের কি সম্পর্ক তা অস্পষ্ট থেকে যায়। ফলে অধিকাংশ শিশুর কাছে, বিশেষতঃ যাদের বুদ্ধি সেরূপ তীক্ষ্ন নয়, অঙ্ক বিষয়টি নিতান্ত একঘেয়ে, অপ্রীতিকর মনে হয়, শিশু অঙ্ক কষতে মোটেই আগ্রহান্বিত বোধ করে না। অঙ্ক মানে সে বোঝে কয়েকটি সংখ্যার শুধু অর্থহীন খেলা। অঙ্কে শিশুর আগ্রহ জন্মাতে হ'লে অঙ্ককে জগতের বিষয়-বস্তু থেকে পৃথক করে না দেখে দৈনন্দিন জীবনের অভিজ্ঞতা ও কার্যকলাপের ভিতর দিয়ে শিখলে সে বুঝতে পারবে যে জীবনযাত্রার সঙ্গে অঙ্ক শেখবার সম্পর্ক রয়েছে—এটা অর্থহীন যন্ত্র চালনার মত কাজ অথবা কতকগুলো নিয়ম আয়ত্ব করা নয়।"

[পঃ বঙ্গ শিক্ষা অধিকর্তা ; কিশলয় (গণিত) এর ভূমিকা]

এখন নতুন পাঠক্রমে গণিতকে কিভাবে রাখা হয়েছে দেখা যাক্। এতে গণিতকে কয়েকটি শাখায় ভাগ করা হয়েছে যেমন **পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি, পরিমিতি ও ত্রিকোণমিতি**। পাটীগণিত, বীজগণিত ও পরিমিতিতে সংযোজন কিছু করা হয়নি, বরং প্রয়োজনীয়তা ও বোধগম্যতার দিকে লক্ষ্য রেখে কিছু কিছু অংশ বাদ দেওয়া হয়েছে। পাঠক্রমটিকে একটি সুনির্দিষ্ট ও সুবিন্যস্ত রূপ দেওয়ার

চেষ্টা করা হয়েছে। ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় করা পাটীগণিত থেকে সরিয়ে এনে পরিমিতির মধ্যে আনা হয়েছে কারণ ঐ জাতীয় জ্যামিতিক চিত্রগুলির ক্ষেত্রফল বা আয়তন সম্পর্কে সঠিক ধারণা জন্মানোর আগে ঐ সম্পর্কে আলোচনা কিছুটা যান্ত্রিক হতে বাধ্য। জটিল সমস্যাগুলি বাদ দেওয়া হয়েছে। শতকরা হিসাব, সময় ও কার্য, সুদকষা, লাভক্ষতি ইত্যাদি জাতীয় সমস্যা ঐকিক নিয়মের প্রত্যক্ষ প্রয়োগ হিসাবে দেখানো হয়েছে। এই সমস্যাগুলি হতে হবে বাস্তবানুগ এবং স্থানীয় পরিবেশ থেকে নেওয়া। শিক্ষার অন্যতম উদ্দেশ্য হ'ল শিশুমনে জাতীয় ভাবধারা ও সামাজিক চেতনার উন্মেষ সাধন। গণিতের সমস্যাগুলি এই উদ্দেশ্য সাধনে বহুলাংশে সাহায্য করে। ব্যক্তিগত প্রশ্ন বা সমস্যার বদলে যৌথ প্রথা যেমন সমবায়, যৌথ খামার প্রথা ইত্যাদি জাতীয় সমস্যা বেশী থাকা উচিত। তেমনি দুধে জল বা মদে জল দেওয়া জাতীয় ভেজাল 'মিশ্রণের' সমস্যা বাদ দিয়ে পদার্থবিদ্যা বা রসায়নবিদ্যার সমস্যা অন্তর্ভুক্ত করা উচিত। পরিমিতির সমস্যার সমাধান করানো হয় কতকগুলি সূত্র ব্যবহারের মাধ্যমে। সাধারণতঃ এই সূত্রগুলি মুখস্থ করে ছাত্ররা যান্ত্রিক উপায়ে অঙ্ক কষে থাকে। ফলে পরিমিতির সমস্যাগুলি তাদের কাছে দুর্বোধ্য বলে মনে হয়। মডেলের সাহায্য নিয়ে বা বাস্তব কাজের মধ্য দিয়ে ছাত্ররা নিজেরাই যদি সূত্র উদ্ভাবন করে বা সত্যতা নিরূপণ করে, তাহলে সমস্যাগুলি আর নীরস বা দুর্বোধ্য বলে মনে হবে না। তেমনি ত্রিকোণমিতির যেটুকু অংশ নেওয়া হয়েছে তার ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তার দিকে লক্ষ্য রেখেই নেওয়া হয়েছে। পূর্বে কোর গণিতেও রাশি-বিজ্ঞান অন্তর্ভুক্ত ছিল। কিন্তু এবার তা বাদ দেওয়া হয়েছে। যদিও এর ব্যবহার বর্তমান যুগে অত্যন্ত ব্যাপক। কিন্তু গড়ের সমস্যা (Average) এবং বীজগণিতের লেখর প্রদত্ত তথ্য (Data) ঐ দিকে লক্ষ্য রেখেই নির্বাচন করা হয়েছে। জ্যামিতির পাঠক্রমে যথেষ্ট পরিবর্তন করা হয়েছে এবং গতানুগতিক দৃষ্টিভঙ্গীর পরিবর্তে এক নতুন দৃষ্টিভঙ্গী নিয়ে জ্যামিতিকে বিচার করা হয়েছে।

প্রচলিত পাঠক্রমে জ্যামিতির পাঠ সুরু হয়েছে পারিপার্শ্বিক পার্থিব বস্তু থেকে জ্যামিতিক বস্তুর ধারণায় আসা নিয়ে। তারপর পরিমাপের সাহায্যে কতকগুলি সত্য প্রতিপাদিত করা হয়েছে এবং শেষে কতকগুলি পথকে বা উপায়কে স্বতঃসিদ্ধ বলে ধরে নিয়ে যুক্তির সাহায্যে অন্যান্য জ্যামিতিক পথগুলি প্রতিষ্ঠা করার চেষ্টা করা হয়েছে। পার্থিব জগতের মডেল হিসাবে জ্যামিতিকে বিচার করা চলে। কাজেই পার্থিব বস্তুর ধারণা থেকে জ্যামিতিক বস্তুর ধারণায় আসার ব্যাপারে দ্বিমত নেই। এই ধারণা থেকেই ক্রমশঃ আমরা বিমূর্ততার দিকে অগ্রসর হতে পারি। বিন্দুর সংজ্ঞা দেওয়া বা ছবি আঁকা খুবই কঠিন। কিন্তু আমরা একটি বিন্দুকে একটি ক্ষুদ্র 'dot' এর বিমূর্ত রূপ হিসাবে চিন্তা করতে পারি। তেমনি একটি রেখাকে কল্পনা করা যেতে পারে একটি টান করা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত তারের এবং একটি তলকে কল্পনা করা যেতে পারে টেবিলের উপরের পিঠ বা ঘরের দেওয়ালের বিমূর্ত রূপ হিসাবে। কিন্তু এই জ্যামিতিক বস্তুগুলির সংজ্ঞা কিভাবে দেওয়া হবে? এই বস্তুগুলির সংজ্ঞা দিতে

গিয়ে এমন শব্দ ব্যবহার করতে হয় যেগুলির সংজ্ঞা দিতে গিয়ে আবার ঘুরে ফিরে জ্যামিতিক বস্তুতেই আসতে হয়। অর্থাৎ সংজ্ঞার বস্তু ও বস্তুর সংজ্ঞার মধ্যে যথেষ্ট অসঙ্গতি দেখা দেয়। এই অসঙ্গতির জন্যই এগুলির কোন সংজ্ঞা দেওয়া হয় না। এগুলিকে' সংজ্ঞাবিহীন পদ' বা undefined term বলে ধরে নেওয়া হয়। নতুন পাঠক্রমে আর একটি শব্দ প্রায়ই ব্যবহার করা হয়েছে। সেটি হ'ল 'Segment' বা 'Segment of a line.' আমরা রেখাকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত বলে মনে করি। সেইজন্য সীমাবদ্ধ কোন রেখাকে প্রকৃত অর্থে রেখা বলা উচিত নয় বলেই মনে হয়। এইজন্যই 'রেখাংশ' পদটির ব্যবহার।

এইবার আসা যাক পাঠক্রমটির দ্বিতীয় অংশে। পাঠক্রমের উদ্দেশ্যে বলা হয়েছে শিক্ষার্থী বিভিন্ন জাতীয় কার্যকলাপের মধ্য দিয়ে নিজেই পথ আবিষ্কার করবে। পাঠক্রমের এ উদ্দেশ্য সাধিত হয়েছে কিনা তা বিচার করে দেখা দরকার। ধরা যাক ছাত্রদের শেখাতে হবে ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দু সমকোণ। এটি পরিমাপের সাহায্যে প্রমাণ করা সম্ভব কিন্তু নিখুঁত করে মাপলেও ছাত্র একটিমাত্র সুযোগ নিয়ে তিনটি কোণের সমষ্টি দু' সমকোণ দেখাতে পারবে না। তাছাড়া বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ এঁকে কোণগুলি পরিমাপ করতে হবে। এটি একজাতীয় কাজ ঠিকই। কিন্তু এর পরিবর্তে যদি কাগজের ত্রিভুজ কেটে কাগজ ভাঁজ করে কোণগুলির সমষ্টি নির্ণয় করা হয় তাহলে প্রমাণ করাও সহজ হয়, কাজটিও চিত্তাকর্ষক হয়।

জ্যামিতির ভিত্তি হল 'ইউক্লিডিয় জ্যামিতি'। ইউক্লিডিয় জ্যামিতিতে সত্যগুলিকে প্রতিষ্ঠা করা হয়েছে কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ ও সাধারণ ধারণার উপর ভিত্তি করে। জ্যামিতিক চিত্রের গোড়ার কথা হ'ল—বিন্দু, রেখা, তল। এগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক জ্যামিতিক সত্য প্রমাণে একান্তভাবে অপরিহার্য। এগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরে নেওয়া যেতে পারে।

জ্যামিতিতে যে কোন সত্য প্রতিষ্ঠা করতে হলে 'সর্বসমতার' ধারণা এসে পড়ে। ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রমাণ করতে গিয়ে আমরা বেশ কয়েকটি ঘটনা পাই যেখানে একটি ত্রিভুজকে অন্য একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করা হয়। অর্থাৎ কোনরকম বিকৃতি না ঘটিয়ে একটি ত্রিভুজকে তার স্থান থেকে সরানো হয়েছে। অর্থাৎ চিত্রটিকে এমনভাবে রূপান্তরিত করা হয় যাতে তার ধর্মগুলি অপরিবর্তিত থাকে। ছাত্রদের মনে প্রশ্ন জাগতে পারে এই রূপান্তর কিভাবে ঘটান সম্ভব? ছাত্ররা আয়না দেখে এবং তাতে অনুরূপ প্রতিবিম্বের সঙ্গে তারা পরিচিত (প্রতিফলন)। তাছাড়া ছাত্রদের চৌকা বাক্স ঠেলে সরিয়ে দেওয়া বা কোন বাহুকে এক জায়গা থেকে আর এক জায়গায় ঠেলে নেওয়া (চলন), কিংবা রেডিওর 'নব্' ঘোরানো ইত্যাদি কর্মের অভিজ্ঞতা আছে। কাজেই এই জাতীয় কর্মশীলতার মধ্য দিয়ে এই সমস্ত রূপান্তর এবং তাদের ধর্ম সম্বন্ধে অতি সহজেই শিশুদের ধারণা দেওয়া সম্ভব। পরবর্তীকালে জ্যামিতিক সত্য প্রতিষ্ঠা করার জন্য এগুলিকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরে নেওয়া চলতে

পারে। আবার এগুলি থেকে প্রতিসাম্যের ধারণায় আসা সম্ভব। এই সমস্ত ধারণা থেকে শিশু নতুন কার্যকলাপের প্রেরণা পাবে।

তবে কর্মশীলতাকে কার্যকরী করতে হলে যথেষ্ট উপাদান থাকা প্রয়োজন যেগুলি নিয়ে পরীক্ষা বা গবেষণা করা যেতে পারে। শ্রেণীকক্ষগুলি এক একটি পরীক্ষাগারে পরিণত করতে পারলে আরো ভালো হয়। বিভিন্ন জাতীয় মডেল দিতে হবে ছাত্রদের। ছাত্ররা নিজেরাই যেন বিভিন্ন জাতীয় মডেল তৈরী করে—সে বিষয়ে সবিশেষ দৃষ্টি দেওয়া বাঞ্ছনীয়। কিন্তু ছাত্রদের কর্মের প্রতি আগ্রহ সৃষ্টি করার পরিবর্তে যদি গতানুগতিক পদ্ধতিতে শিক্ষাদান করা হয় তবে পাঠক্রমটির উদ্দেশ্য ব্যাহত হতে বাধ্য।

নতুন পাঠক্রমের দৃষ্টিভঙ্গী ও বিষয়বস্তু সম্পূর্ণ নতুন। গতানুগতিক বিষয়বস্তুর সঙ্গে এর অনেক ক্ষেত্রেই মিল নেই। কিন্তু এতদিন পর্যন্ত গণিতের পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়ে এসেছে গতানুগতিক ধারাতে। নতুন পাঠক্রম কেন্দ্র করে যে সমস্ত পাঠ্যপুস্তক রচনা করা হয়েছে সেগুলি ভালো করে পর্যবেক্ষণ করে তবেই পাঠ্যপুস্তক নির্বাচন করা উচিত।

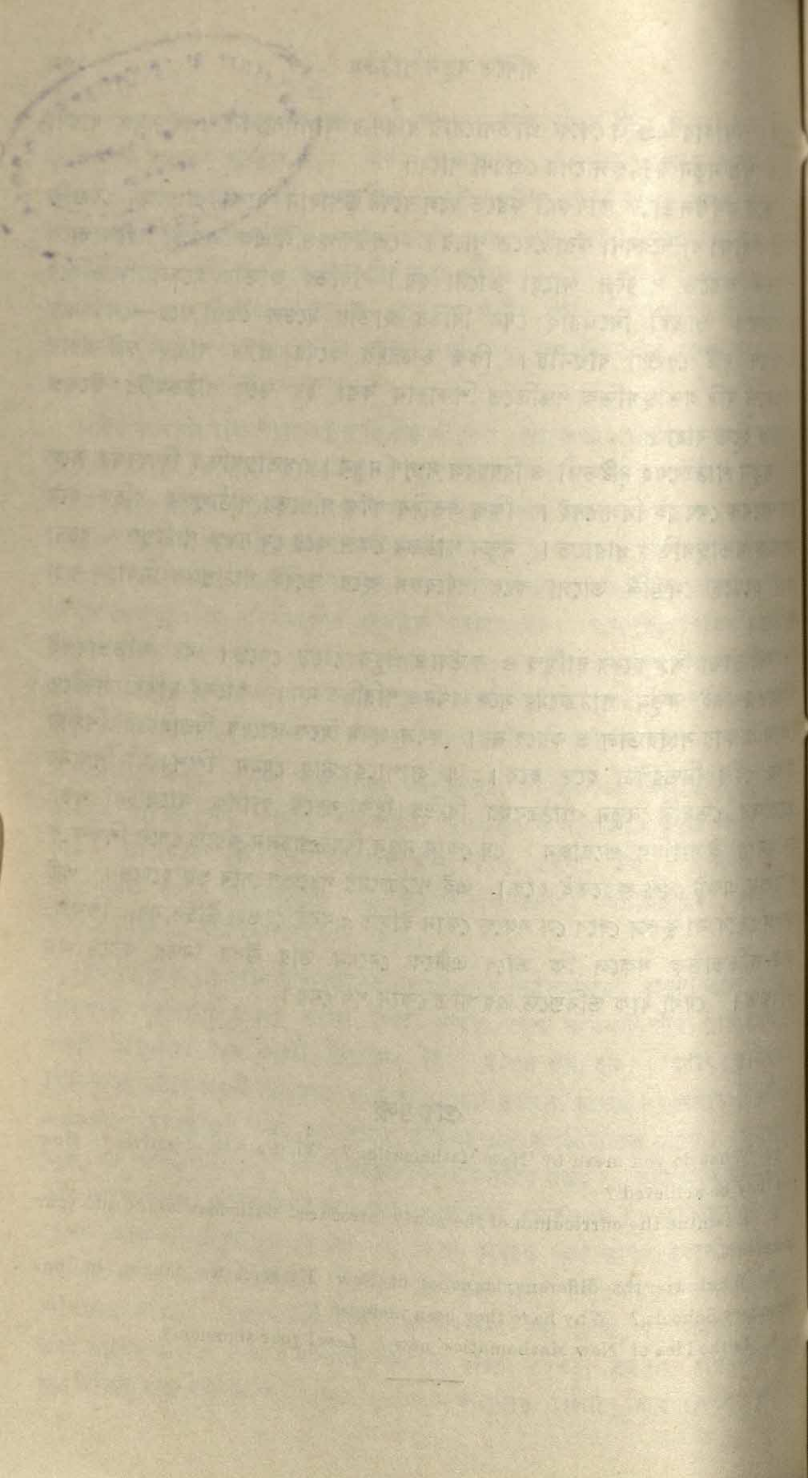
তা ছাড়া শিক্ষকদের দায়িত্ব ও কর্তব্যও প্রচুর বেড়ে গেছে। বহু অভিভাবকই গণিতের এই নতুন পাঠক্রমের সঙ্গে এখনও পরিচিত নন। কাজেই ছাত্ররা বাড়ীতে কোন প্রকার সহায়তালাভ করবে না। ফলে প্রথম দিকে তাদের বিদ্যালয়ের শিক্ষার উপর বেশী নির্ভরশীল হতে হবে। এ ব্যাপারে তাঁর যেমন বিশেষধর্মী শিখনের প্রয়োজন তেমনি নতুন পাঠক্রমের বিভিন্ন দিক সম্বন্ধে ব্যাপক আলোচনা সভা, সেমিনার ইত্যাদির প্রয়োজন। যে কোন নতুন বিষয় প্রচলন করতে গেলে শিক্ষককে পরিশ্রম একটু বেশী করতেই হবে। এই পাঠক্রমের পদক্ষেপ সবে শুরু হয়েছে। এটি সুফল দেবে না কুফল দেবে সে সম্বন্ধে কোন ইঙ্গিত এখনই দেওয়া উচিত নয়। শিক্ষক-ছাত্র-অভিভাভক সকলে কি ভাবে এটিকে নেবেন তার উপর নির্ভর করছে এর ভবিষ্যত। দেখা যাক ভবিষ্যতে এর গতি কোন্ পথ নেয়।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. What do you mean by 'New Mathematics ? What are its objectives ? How can they be achieved ?

2. Examine the curriculum of the newly introduced Mathematics and add your comments.

3. What are ths different branches of New Mathematics taught in our Secondary Schools ? Why have they been included ?

4. Is the idea of 'New Mathematics' new ? Level your arguments.

দ্বিতীয় খণ্ড

প্রথম অধ্যায়

পাটীগণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য ও পদ্ধতি

(Aims and Methods of Teaching Arithmetic)

আমরা সুবিধার জন্য গণিতকে তিনটি শাখায় বিভক্ত করেছি। সেগুলি হল—পাটীগণিত বা অঙ্ক, বীজগণিত এবং জ্যামিতি। পরবর্তী কালে ত্রিকোণমিতি, পরিমিতি ইত্যাদি বিভিন্ন শাখার উদ্ভব হয়েছে ঠিকই, কিন্তু সেগুলি জ্যামিতি বা বীজগণিতের উপবিভাগ মাত্র। অঙ্ককে বলা হয় সংখ্যার বিজ্ঞান এবং হিসাবের শাস্ত্র (Science of numbers and art of computation)। ইংরেজদের মতে—অঙ্ক হল তর্কশাস্ত্রের মতো একটি বিষয়; আবার আমেরিকানদের মতে—এ হল একজাতীয় অভ্যাসমূলক বিষয়। সার্থক জীবন-যাপনের জন্য অঙ্ক চর্চা করা অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। গণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য এবং উপকারিতা যে রকম, অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য ও উপকারিতাও ঠিক সেই রকমই। অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্যকে আমরা এককথায় এই বলে বর্ণনা করতে পারি যে, কতকগুলি বিশেষ চিন্তাধারা অনুধাবন করা, তাতে দক্ষতা অর্জন করা এবং সেই দক্ষতা বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করা। আমরা আগেই দেখেছি গণিত এমন একটি বিষয় যা সর্বস্তরের, সর্বদেশের লোকই কোন না কোন ভাবে ব্যবহার করছে। এখন দেখা যাক শিক্ষার উদ্দেশ্যগুলি কি কি! অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্যগুলিকেও তিন ভাগে ভাগ করা যায় :—

(১) ব্যবহারিক (Utilitarian), (২) কৃষ্টিমূলক (Cultural) এবং (৩) শৃঙ্খলামূলক (Disciplinary)।

ব্যবহারিক উদ্দেশ্য :—অঙ্কের ব্যবহারিক মূল্য অত্যন্ত বেশী। এই জন্যই যে পাঠক্রমে তার স্থান সর্বাগ্রে এ কথা সকলেই স্বীকার করেন। পাঠক্রম যদি সুনির্বাচিত হয়, তবে তার মাধ্যমে ছাত্ররা অর্থনৈতিক, সামাজিক, নৈতিক, সৌন্দর্যবোধমূলক ইত্যাদি বিভিন্ন ধারণার সঙ্গে পরিচিত হতে পারবে। অঙ্ক প্রত্যেকেই ব্যবহার করে থাকেন। কেবলমাত্র নির্বাচিত হিসাব পত্রই গণিতের একমাত্র প্রয়োগস্থল নয় (যেমন—বিল তৈরী করা, ক্যাশবই রাখা ইত্যাদি)। সুদক্ষ যন্ত্রবিদ, কৃষক, ছুতার মিস্ত্রী, রাজমিস্ত্রী, নাপিত, ব্যবসায়ী, সুদক্ষ গৃহকর্ত্রী সকলেরই অঙ্ক সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা একান্ত প্রয়োজনীয়। Lindquist-এর মতে প্রত্যেক লোকেরই অঙ্কের উপর দখল থাকা দরকার। আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সাধারণ কাজগুলিতেও অঙ্কের বিভিন্ন প্রক্রিয়া, যথা—যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি প্রয়োগ করে থাকি।

কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য :—অঙ্কের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্যও কিছু কম নয়, মানব জীবন, তার প্রাকৃতিক পরিবেশ, বিভিন্ন বৃত্তি ও পেশার ক্রমোন্নতি, অন্যান্য বিজ্ঞান বিষয়ের অগ্রগতি ইত্যাদির সঙ্গে অঙ্কের সম্বন্ধ নির্ণয়ের মধ্যেই অঙ্কের কৃষ্টিমূলক উদ্দেশ্য নিহিত থাকে। চরম ও পরম সত্যের সঙ্গে অঙ্ক সম্বন্ধ স্থাপন করে দেয়। যেখানে কোন বিশেষ যুক্তি বিশ্লেষণ করতে হয়, সেখানেও অঙ্ক সাহায্য করে। আর আমাদের বহুদূর প্রসারিত কর্মক্ষেত্রে প্রয়োগ করার জন্য যে সমস্ত বিচিত্র অভ্যাস অর্জন করা প্রয়োজন, অঙ্ক সে সমস্ত অভ্যাস গঠনে আমাদের সাহায্য করে।

শৃঙ্খলামূলক উদ্দেশ্য :—অঙ্ক মানসিক শৃঙ্খলা আনয়নে সাহায্য করে। অঙ্কের একটি প্রকৃত শৃঙ্খলামূলক মূল্য আছে। অঙ্কের সত্য চরম সত্য। অঙ্ক হয় নির্ভুল হবে নয়তো ভুল হবে, ভুল ও নির্ভুলের মাঝামাঝি কিছু হবার কোন সম্ভাবনা নেই। অঙ্ক হল একটি খাঁটি বিজ্ঞান এবং যিনি অঙ্ক চর্চা করেন ধরে নেওয়া যেতে পারে তিনি একজন খাঁটি লোক হবেন। অঙ্কের চর্চার ফলে বিচারের ক্ষমতা, মনোনিবেশ ও অমূর্ত চিন্তা করার ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। তাহলে দেখা যাচ্ছে, অঙ্ক এমন একটি বিষয়, যার সাহায্যে আমাদের অজ্ঞানতা দূর হচ্ছে, আবার আমরা অনেক প্রয়োজনীয় তথ্যও আহরণ করিতে পারছি। এর চর্চার ফলে আমাদের বুদ্ধিবৃত্তিগুলি তীক্ষ্ণ হয়, মানসিক দিগন্ত বিস্তৃত হয় এবং যুক্তিযুক্তভাবে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে আমাদের কোন কষ্ট হয় না। এককথায় বুদ্ধিমান ও যোগ্য নাগরিক হয়ে উঠতে হলে অঙ্ক চর্চা করতেই হবে।

শিক্ষক যখন শ্রেণীতে গণিত শিক্ষা দেন তখন তাঁর সামনে কতকগুলি লক্ষ্য থাকে। অঙ্ক শিক্ষা দেবার লক্ষ্যগুলি সংক্ষেপে বলা যেতে পারে :—

(১) গানিতিক চিন্তাধারার সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করা, অঙ্কের সমস্যাগুলি হৃদয়ঙ্গম করা, সেইগুলি বিশ্লেষণ করা এবং সঠিক সমাধানে উপনীত হওয়া।

(২) ছাত্রের চারিদিকে যে পৃথিবী, তার পরিমাণমূলক দিকটি সম্বন্ধে তাকে আগ্রহী করা।

(৩) মূল প্রক্রিয়াগুলির সহজ প্রয়োগে ছাত্রকে সুযোগ দেওয়া এবং সেগুলি যাতে নির্ভুল হয় তার শিক্ষা দেওয়া।

(৪) বাস্তব জীবনে অঙ্কের বিভিন্ন সমস্যাগুলি প্রয়োগ করার শিক্ষা দেওয়া।

(৫) অঙ্কে উচ্চতর শিক্ষা যাতে ছাত্র গ্রহণ করতে পারে তার জন্য তাকে তৈরী করা।

এই আলোচনা থেকে আমরা দেখতে পেলাম, অঙ্ক শিক্ষা দেবার আগে অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য সম্বন্ধে শিক্ষকের একটা পরিষ্কার ধারণা থাকা বাঞ্ছনীয়। তাঁর প্রথম কাজই হল ছাত্রদিগকে গণিতের ধারায় চিন্তা করতে শিক্ষা দেওয়া। ছাত্র যাতে সঠিক ভাবে অঙ্কের বিভিন্ন সমস্যাগুলি সমাধান করতে পারে, অঙ্কের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলি সুষ্ঠুভাগে প্রয়োগ করতে পারে সে বিষয়ে শিক্ষক বিশেষ লক্ষ্য রাখবেন। ছাত্রের চারদিকের জগতের যে পরিমাণমূলক দিক আছে, সেদিকে তার আগ্রহ সৃষ্টি করতে

হবে। কিভাবে অঙ্ককে কার্যকরী ভাবে প্রয়োগ করা যেতে পারে, সেই রকম কয়েকটি কৌশল তাকে শিক্ষা দিতে হবে। ছাত্র যাতে ভবিষ্যতে গণিত সম্বন্ধে আরো বেশী করে জানতে চায় তাকে সেইরকম ভাবে তৈরী করতে হবে। মনে রাখতে হবে যে, বিদ্যালয়ে অঙ্ক শিক্ষার উদ্দেশ্য কেবলমাত্র নিছক জ্ঞান আহরণ করা বা কতকগুলি বিশেষ নিয়ম আয়ত্ত করা বা মনের শৃঙ্খলার সাহায্য করা নয়, আসল উদ্দেশ্য হচ্ছে শিক্ষার্থীর মনে অঙ্ক সম্বন্ধে প্রকৃত আগ্রহের সৃষ্টি করা এবং অঙ্ক সম্বন্ধে আরো বেশী করে জানবার জন্য ছাত্রের ঔৎসুক্য বৃদ্ধি করা।

অঙ্ক শিক্ষার বিভিন্ন পর্যায় :—জ্ঞান অবিচ্ছিন্ন। বিদ্যালয়ে আসার অনেক আগে থেকেই শিশু অঙ্ক সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করে থাকে। কম-বেশী, বড়-ছোট, ভারী-হালকা এ সমস্ত ধারণা সে নিজের অভিজ্ঞতা থেকেই অর্জন করে থাকে। এর জন্য তাকে মা-বাবা বা শিক্ষক-শিক্ষয়িত্রীর উপর নির্ভর করতে হয় না। কাজেই দেখা যাচ্ছে—জীবন-ভিত্তিক বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে 'অঙ্ক শিক্ষা' দেওয়াটাই হচ্ছে সহজ ও স্বাভাবিক উপায়।

অঙ্কের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় অঙ্কের সৃষ্টি হয়েছে মানবসমাজের বিভিন্ন প্রয়োজনের চাহিদা মেটাতে। সভ্যতার আদি অবস্থাতেও মানুষকে কতকগুলি বিশেষ উদ্দেশ্য সাধন করতে হ'ত। তার জন্য তারা দাগ কেটে হিসাব রাখতো, নুড়ির সাহায্যে হিসাব মিলাতো, তুলনা করত, গণনা করত, একই প্রকার জিনিসকে দলভুক্ত করতে পারতো। এ সমস্ত দেখে আমরা বলতে পারি সভ্যতার আদি অবস্থাতে মানুষ যে কেবল অঙ্ক আবিষ্কারই করেছে তা নয়, তারা অঙ্কের ভিতর দিয়ে জীবনযাপন করে গেছে। অঙ্ক ও জীবন এই দু'টিকে তারা সার্থকভাবে যুক্ত করতে পেরেছিল। অঙ্ককে তারা নিজেদের সেবায় ব্যবহার করেছিল। যখন মানুষের জিনিসের পরিমাণ বুঝবার জন্য এককের প্রয়োজন হল তখন সে সুবিধামত একটি একক খুঁজে নিল। এইভাবে সে একখণ্ড পাথর, এক কলস জল বা নিজের হাতকে একক হিসাবে ব্যবহার করতে শিখল। আবার কোন জিনিসের অস্তিত্বের অভাবকে 'শূন্য' দিয়ে প্রকাশ করার কৌশলটিও আবিষ্কার করল। এই আবিষ্কারগুলি কিন্তু আকস্মিক নয়। এর উদ্ভব ও বিকাশে যথেষ্ট সময় লেগেছে।

সমাজ তথা সামাজিক প্রতিষ্ঠানগুলির উপরও অঙ্কের প্রভাব অপরিসীম। শোনা যায়, জ্যোতির্বিদ্যার চর্চা প্রথম সুরু হয় ব্যাবিলন দেশে। জরিপের কাজ আরম্ভ হয় মিশর দেশে নীল নদের তীরে। অঙ্ক সম্বন্ধে ব্যাপক চর্চা করা হ'ত ধর্মীয় প্রতিষ্ঠান-গুলিতে এবং ধর্মযাজকরাই ছিলেন এ ব্যাপারে পথপ্রদর্শক। এঁদের গবেষণার ফলেই নানাপ্রকার সংখ্যার সৃষ্টি হয়েছে। এই সমস্ত সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন জাতীয় হিসাব লিপিবদ্ধ করা সম্ভব। পরবর্তীকালে এই সমস্ত সংখ্যার সাহায্যে পাঁজিকা সৃষ্টি করা, বিভিন্ন জাতীয় মুদ্রার প্রচলন করা, ব্যবসা-বাণিজ্যের উন্নতি করা, বিভিন্ন প্রকার কর ধার্য করা প্রভৃতি সম্ভব হয়েছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, সমাজের উন্নতি বিধানে গণিতের ভূমিকা বেশ গুরুত্বপূর্ণ। বর্তমানে অটোমেশনের যুগে এই গুরুত্ব আরো

বৃদ্ধি পেয়েছে। অঙ্ক যেমন সমাজের উপর প্রভাব বিস্তার করে, সমাজও তেমনি অঙ্কের উপর তার নিজস্ব প্রভাব বিস্তার করে থাকে। অঙ্ক বলতে আমরা দু'রকম জিনিস বুঝে থাকি। সাধারণভাবে অঙ্ক বলতে কতকগুলি নিয়মের সমষ্টিকে বুঝায়। অঙ্কের আর একটি অর্থ হল—কতকগুলি পদ, প্রতিজ্ঞা, যুক্তি ইত্যাদির সমন্বয়ে সুসংগঠিত একটি জিনিস। সমাজের দৃষ্টিভঙ্গীর পার্থক্য অনুযায়ী অঙ্ক সম্বন্ধে ধারণাও পৃথক পৃথক হয়। ব্যবসায়িক ক্ষেত্রে অঙ্ক বলতে নিয়মের সমষ্টিকেই বুঝায়। কিন্তু সমাজের সকলেই অঙ্কের এই অর্থটি গ্রহণ করতেন না। প্রাচীন যুগে গ্রীক বা রোমান সমাজে এক সময় শারীরিক পরিশ্রমকে হীন চক্ষে দেখা হ'ত। তখন সমাজে দার্শনিকদের প্রভাব ছিল অত্যন্ত বেশী। তাঁরা সংখ্যা সম্বন্ধে গবেষণা করে এর রহস্য উদ্ঘাটিত করার চেষ্টা করেন। এরা অবশ্য সংখ্যার লক্ষ্য কেবলমাত্র সমাজ সেবা, তা স্বীকার করতেন না। সংখ্যার আরো উচ্চতর লক্ষ্যের কথা তারা চিন্তা করতেন। শূন্য কি ? এর অর্থ কি ? শূন্য একটি সংখ্যা কি না ? এ সমস্ত প্রশ্নের সঠিক উত্তর নির্ণয় করতে পেরেছেন হিন্দু দার্শনিকেরা। গ্রীকরা অবশ্য চেষ্টা করেছিলেন, কিন্তু পারেননি। ধর্ম ও দর্শন—এই দুই শাস্ত্রের সহায়তায় হিন্দু দার্শনিকেরা 'শূন্য' সম্বন্ধে পৃথিবীতে যে ধারণা রেখে গেলেন, তার জন্য তাঁরা চিরস্মরণীয় হয়ে থাকবেন। তাহলে দেখা যাচ্ছে—অঙ্ক যেমন সমাজের উন্নতিকল্পে সাহায্য করেছে, সমাজও তেমনি বিভিন্ন যুগে অঙ্ককে উত্তরোত্তর উন্নতির পথে এগিয়ে নিয়ে গেছে। সমাজ ও অঙ্ক—পরস্পর পরস্পরের সঙ্গে জড়িত। সমাজের কর্মপ্রবাহের সঙ্গে অঙ্কের চিন্তাধারার একটা সাদৃশ্য আছে। ছাত্র যেন বুঝতে পারে অঙ্কশিক্ষা জীবন থেকে বিচ্ছিন্ন কিছু নয়।

শ্রেণীতে অঙ্কশিক্ষা কার্যকরী করতে হলে তিনটি প্রধান বিষয়ের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। সেগুলি হল—(১) শিক্ষার্থীর আগ্রহ বা প্রেষণা, (২) শিক্ষার্থীর ক্ষমতা এবং (৩) শিক্ষার্থীর চাহিদা। প্রয়োজনবোধে শিক্ষার্থীর আগ্রহ স্থির থাকে না; বিভিন্ন সময়ে তার আগ্রহের বিষয়বস্তুও ভিন্ন ভিন্ন হয়। বিদ্যালয়ের প্রাথমিক স্তরের ছেলেমেয়েদের স্বাভাবিক আগ্রহ দেখা যায় কাজে। তারা কাজ করতে ভালোবাসে, কাজের মধ্যে আনন্দ পায়। সেইজন্য এই স্তরে কাজের ভিতর দিয়ে শিক্ষা দিলে সে অঙ্কে স্বভাবতই আগ্রহ বোধ করবে। শিক্ষক কেবল ছাত্রকে নূতন কর্মক্ষেত্রের ইঙ্গিত দেবেন, যার মাধ্যমে সে অঙ্কের জ্ঞান অর্জন করতে পারবে। মনোযোগ দিয়ে কাজ করলে সে কাজের উদ্দেশ্য, প্রয়োজনীয়তা ও ব্যবহারিক মূল্যটিও বুঝতে পারবে। অঙ্ক তখন আর তার নিকট একটি নীরস বিষয় বলে মনে হবে না। সে নিজে পরীক্ষা করে তার ব্যক্তিগত অভিজ্ঞতা থেকে জ্ঞান সঞ্চয় করছে বলে ঐ জ্ঞান বেশ পাকা হয়ে উঠবে। আগেই বলেছি, শিক্ষার্থীর চারদিকে সুদূরপ্রসারিত বিচিত্র কর্মপ্রবাহ রয়েছে, সে তাতে সক্রিয় অংশ গ্রহণ করবে। বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই শিক্ষার্থী জ্ঞান লাভ করবে। শিক্ষকের ভূমিকা হবে বন্ধু, দার্শনিক এবং পথপ্রদর্শকের। শিশু যত বড় হবে ততই তার আগ্রহের বিষয়বস্তুও পৃথক হবে। কর্মভিত্তিক জ্ঞানলাভ থেকে তার মন ধীরে ধীরে উচ্চ চিন্তাভিত্তিক জ্ঞান লাভের জন্য উন্মুখ হবে। সুশিক্ষক

ঐ সুযোগের পুরোপুরি সদ্ব্যবহার করবেন। এইভাবে সরল থেকে জটিল, মূর্ত থেকে অমূর্ত জ্ঞানের পথে এগিয়ে যেতে হবে। আগ্রহ আবার অনেক ক্ষেত্রেই ক্ষমতার উপর নির্ভরশীল। শিক্ষার্থীরা নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী এগিয়ে চলে। সকলেই যে সমান গতিতে এগিয়ে যাবে, একইভাবে নূতন জ্ঞান অর্জন করবে তা আশা করা ভুল। প্রত্যেক শিক্ষার্থী যাতে নিজ নিজ ক্ষমতা অনুযায়ী এগিয়ে যেতে পারে, সে বিষয়ে লক্ষ্য রাখতে হবে এবং শিক্ষার্থীকে তার সুযোগও দিতে হবে। এরপর আসে শিক্ষার্থীর চাহিদা বা প্রয়োজনবোধের কথা। এই চাহিদা অনেকাংশে বাস্তব জীবনের অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করেই স্থিরীকৃত হয়। সে নিজের প্রয়োজনে গণনা করতে চায়, হিসাব করতে চায়, তুলনা করতে চায়। অঙ্ক শেখার তাগিদ সে নিজের অন্তর থেকেই অনুভব করে। ঠিক তখনই অঙ্ক শিক্ষা দিতে সুরু করলে সুফল পাওয়া যায়। যতক্ষণ না শিশু অঙ্ক শিক্ষার প্রয়োজনীয়তা বুঝতে পারছে ততক্ষণ তার অঙ্কের জ্ঞান সম্পূর্ণ হবে না। অঙ্কের শিক্ষাদান পদ্ধতিও বিভিন্ন স্তর অনুযায়ী বিভিন্ন হওয়া বাঞ্ছনীয়। শিক্ষককে মনে রাখতে হবে—শৈশবকাল হল কাজ করার সময়, কৈশোর হল অনুসন্ধিৎসার সময় এবং পরিণত বয়স হল অঙ্কের নীতিগুলি প্রয়োগ করার সময় (সৃষ্টিমূলক)। গণিতের পাঠক্রমও বিভিন্ন স্তর অনুযায়ী বিভিন্ন হওয়া বাঞ্ছনীয়। একটি কথা এই প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে যে, প্রাথমিক অবস্থাতে শিশুকে যে শিক্ষা দেওয়া হয় তা চিরস্থায়ী হয়ে থাকে। এই সময় তাকে ত্রুটিপূর্ণ তথ্য শিক্ষা দিলে পরবর্তীকালে সে ঐ ত্রুটিপূর্ণ তথ্যকেই সত্য বলে ধরে নেয়। তাছাড়া কোন্‌টা ঠিক আর কোন্‌টা ভুল তা বিচার করার মতো ক্ষমতাও তখন তার থাকে না। কাজেই প্রাথমিক স্তরে যাতে নির্ভুল ভাবে পাঠদান করা হয় সে বিষয়ে বিশেষ যত্ন নিতে হবে।

অঙ্কে কতকগুলি বিশেষ ধারণা বা একক সম্বন্ধে শিক্ষাদান :—অঙ্কে কতকগুলি বিশেষ ধারণা সম্বন্ধে প্রথমেই ছাত্রদের শিক্ষা দিতে হয়। এ ধারণাগুলিকে অঙ্কশিক্ষার 'প্রবেশ দ্বার' বলা যেতে পারে। অঙ্কের মূলে রয়েছে সংখ্যা (Number)। অঙ্ক শিখতে গেলে প্রথমেই ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে একটা জ্ঞান অর্জন করতে হয়। সংখ্যা কতকগুলি অর্থহীন শব্দমাত্র নয়। এর পেছনে একটা জীবন্ত সত্য আছে। শিক্ষার্থীকে এই সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা জন্মাবার শিক্ষা দিতে হবে। অঙ্কের কোন বিষয়ের ধারণা দিতে হলে বা কোন নূতন নিয়ম শেখাতে হলে চারটি বিভিন্ন স্তরের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হতে হয়। সেই স্তর চারিটি হল :—(১) দৈনন্দিন জীবনের বাস্তব অভিজ্ঞতা ও সেই সম্বন্ধে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে, (২) মূর্ত জিনিস ব্যবহার করে, (৩) অমূর্ত সংখ্যার চর্চার মাধ্যমে এবং (৪) অঙ্কের নিয়ম প্রয়োগ করে। যেহেতু অঙ্ক শিক্ষার প্রথম স্তরই হল সংখ্যাজ্ঞান (Number Concept), সেইজন্য কি ভাবে ও কোন্ কোন্ কাজের মাধ্যমে ছাত্রদের মধ্যে সংখ্যাজ্ঞান জন্মাতে পারে সে সম্বন্ধে প্রথমেই আলোচনা করা হল।

সংখ্যাজ্ঞান :—সংখ্যাজ্ঞান হল গণিতে সবচেয়ে প্রয়োজনীয় জিনিস। সংখ্যাজ্ঞান শিক্ষা দিতে হলে মূর্ত জিনিসের সহায়তায় এবং 'বাস্তব ও উদ্দেশ্যমূলক অভিজ্ঞতার

মাধ্যমে অগ্রসর হতে হবে। শিশুরা গণনা করতে শিখবে, মাপ করতে শিখবে, পরিমাণ করতে শিখবে, আর ঐ সবের মাধ্যমে সে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবে। মুখস্থ বিদ্যার সাহায্যে সংখ্যাজ্ঞান সম্ভব হয় না।

সংখ্যা সম্বন্ধে শিশুদের জ্ঞান সুস্পষ্ট করতে হলে তাদের কয়েকটি স্তরের ভিতর দিয়ে নিয়ে যেতে হবে। সেগুলি হল :—

(১) **বস্তু-নির্ভর স্তর** (Object Stage) : এই স্তরে শিশু বাস্তব কোন জিনিস গণনা করবে বা মাপ করবে। মার্বেল, মুদ্রা, তকলী প্রভৃতি গণনা করা এই স্তরের অন্তর্ভুক্ত।

(২) **চিত্র-নির্ভর স্তর** (Picture Stage) : ছাত্র যখন বাস্তব জিনিস নিয়ে গণনা করতে শিখে যায়, তখন বাস্তব জিনিসের সাহায্য ছাড়া তাকে গণনা করতে শিক্ষা দেওয়া হয়। ছবির মাধ্যমে প্রকাশিত সংখ্যার তালিকা বা সংখ্যা সম্বন্ধীয় পুস্তকের সাহায্যে তাকে শিক্ষা দেওয়া হয়। ছবিতে কটা জিনিস আছে? কত রকমের জিনিস আছে? এই সমস্ত শিক্ষার মাধ্যমে সে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে।

(৩) **অর্ধ-মূর্ত স্তর** (Semi-Concrete Stage) : এই স্তরে চিত্র-নির্ভর স্তরের মতো প্রকৃত চিত্র থাকে না। সংখ্যাগুলি চিত্রের বদলে বিন্দু, রেখা, বৃত্ত প্রভৃতির মাধ্যমে প্রকাশিত হয়। ঐ সমস্ত অর্ধ-মূর্ত জিনিস গণনার মাধামে ছাত্র সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করতে পারে।

(৪) **অমূর্ত-প্রতীক স্তর** (Abstract Symbol Stage) : এই স্তরে ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে অমূর্ত জ্ঞান অর্জিত হয় বিভিন্ন প্রতীকের মাধ্যমে। যখন সে "পাঁচ" শব্দটি ব্যবহার করবে তখন "পাঁচ" সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণাও তাকে অর্জন করে নিতে হবে। পাঁচ একটি প্রতীক মাত্র। এই প্রতীককে মূল ধারণার সঙ্গে যুক্ত করে নিতে হবে।

সংখ্যা বলতে কি বুঝায়, সে বিষয়ে বহু বিভিন্ন মতামত আছে। কেউ বলেন সংখ্যা বলতে জিনিস বুঝায় (কয়টি ইত্যাদি); আবার কেউ বলেন সংখ্যা হল জিনিসের গুণ (quality) যা জিনিসটি হতে পৃথক অথচ জিনিসের মধ্যেই প্রকাশিত; আবার কেউ বলেন সংখ্যা হল একটি মানসিক প্রক্রিয়া (Mclellan and Dewey); অন্য কেউ কেউ বলেন সংখ্যা হল একটা প্রতীক ("a locution and a Sign"—Laisant—Lemoine)। যাই হোক, সংখ্যা যে কোন মূর্ত জিনিসের পরিমাণগত ও গুণগত প্রতীক, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই।

শিশুদের সংখ্যাগুলি লিখতে হবে ও পড়তে হবে। এর জন্য তাদের নিয়মিত ও ক্রমবর্ধমান চর্চার প্রয়োজন। লিখবার ও পড়বার জন্য যে সংখ্যাগুলি নেওয়া হবে, সেগুলি যেন খুব বড় না হয়, কারণ সে ক্ষেত্রে ঐ সমস্ত সংখ্যা তাদের বোধগম্য না হতেও পারে। এই প্রসঙ্গে একটি নীতির কথা মনে রাখতে হবে। সেটি হল—Educate the Children with numbers in Children's Size.

বিভিন্ন কাজের ভিতর দিয়ে ছাত্রদের সংখ্যাজ্ঞান হতে পারে। কতকগুলি কাজের উল্লেখ করা হল—বইয়ের পাতা গোনা, স্কুলের ঘন্টার শব্দ গোনা বা ঘড়ির আওয়াজ গোনা, শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের গণনা করে উপস্থিত অনুপস্থিতের সংখ্যা নির্ণয় করা, টাকা-পয়সা গণনা করা, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি নির্ণয় করা, গল্প ও ছড়া (হারাধনের দশটি ছেলে ইত্যাদি জাতীয়), নানারকম খেলা, যেমন—দড়ি লাফানো, বল লাফানো প্রভৃতি।

ছাত্রদের অভিজ্ঞতাকে আমরা দু'ভাগে ভাগ করিতে পারি। এক হচ্ছে জীবনের সত্য অভিজ্ঞতা যা তারা বাস্তব জীবনে অর্জন করে বিভিন্ন কাজের মাধ্যমে। আর এক হচ্ছে সত্য অভিজ্ঞতা নকল করে তার অনুরূপ অভিজ্ঞতা। এগুলি সাধারণতঃ কল্পনামূলক খেলার (Make-believe play) মাধ্যমে অর্জিত হয়। বিদ্যালয়ে দোকান-দোকান খেলা, বাস-বাস খেলা, পোস্ট অফিস করা, মুদির দোকান ইত্যাদি খেলাগুলি এই পর্যায়ের। সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হলে সত্যকারের অভিজ্ঞতা এবং নকল অভিজ্ঞতা দু'রকম অভিজ্ঞতারই আশ্রয় নিতে হবে। শিশুরা মূর্ত জিনিস নিয়ে খেলার মাধ্যমেই হোক্ আর অন্য কোন ভাবেই হোক্ সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করার পর অমূর্ত সংখ্যা লেখা ও পড়ার ব্যবস্থা করতে হবে। সংখ্যাটি লেখা ও সেই সঙ্গে ছবি যদি এক সময়ে উপস্থাপিত করা হয় তাহলে ছাত্রদের নিকট আর সংখ্যাটি অর্থহীন বলে মনে হবে না। সে এর ভিতরে কি সত্য নিহিত আছে তা বুঝতে পারবে।

যেমন : ∘ = ১ | ∘∘ = ২ | ∘ ∘ ∘ = ৩ | ∘ ∘ ∘ ∘ = ৪ ইত্যাদি।

প্রথম অবস্থাতে শিক্ষক বোর্ডে সংখ্যাটি লিখে দেবেন এবং ছাত্রদের ছবি আঁকতে বলবেন। আঙ্গুল গুণে সংখ্যা নির্ণয় করার পদ্ধতিটিও সুপ্রাচীন। এ অভ্যাসটিও ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে পারা যায়। তবে মনে রাখতে হবে সংখ্যা নির্ণয় করার একমাত্র উপায় যেন আঙ্গুল গোনা না হয়। আঙ্গুল গোনা প্রাথমিক স্তরে কোন উপায়ের সহায়ক হবে। পরে যেন আঙ্গুল না গুণেও ছাত্ররা সংখ্যা নির্ণয় করতে পারে।

সংখ্যার কতকগুলি অর্থ আছে। যেমন :—

ক্রমিক অর্থ : যথা : এক, তারপর দুই, তারপর তিন, চার প্রভৃতি।

দলগত অর্থ : যথা : জোড়া হিসাবে, ওজন হিসাবে, চার চারটি করে।

অনুপাত অর্থ : যথা : ৫ = ১০ − ৫ = ৪ + ১ = ৩ + ২ = ১০ এর ½ ইত্যাদি।

বিভিন্ন প্যাটার্নের সাহায্যেও ছাত্রদের সংখ্যা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। প্রাচীন কালে মিশর, গ্রীস প্রভৃতি দেশে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে গণনার কাজ চলতো।

গণনার ইতিহাস :—গণনার ইতিহাস বা সংখ্যার উদ্ভব একদিনে হয়নি। এর জন্য অনেক সময় লেগেছে। এই গণনার ইতিহাস ছাত্রদের নিকট ব্যাখ্যা করলে

তারা যেমন আনন্দ পাবে, তেমনি উৎসাহিতও হবে। আগের দিনে মানুষ তার ভেড়া বা ছাগলের সংখ্যা ঠিক করতো সমান সংখ্যক নুড়ি দিয়ে। এক একটি ভেড়ার জন্য এক একটি নুড়ি (এর থেকেই Calculus কথাটির উদ্ভব হয়েছে)। পরে পাঁচটি ভেড়ার জন্য একটি নুড়ি—এইভাবে সে তার হিসাব মিলিয়ে নিত। পরে যখন সে কৃষিকার্য ও পশুপালন শুরু করল, তখন বীজ থেকে গাছ এবং গাছ থেকে ফসল হওয়া ও পালিত জন্তুর বাচ্চা প্রসব করার সময় লক্ষ্য করে বৎসর ইত্যাদি নির্ণয় করতে শিখলো। এক পূর্ণিমা থেকে আর এক পূর্ণিমার ব্যবধান, পূর্ণিমার চাঁদ কমতে কমতে একবারে অদৃশ্য হওয়া, এসমস্ত দেখে মাস ও পক্ষের হিসাব ঠিক করা হল। নদীর জোয়ার-ভাঁটা, সূর্যোদয়, সূর্যাস্ত প্রভৃতি দেখে সে সময়ের সূক্ষ্ম হিসাব করতে শিখলো। এইভাবে বিভিন্ন প্রাকৃতিক ঘটনার সাহায্যে সময়, সপ্তাহ, পক্ষ, মাস ও বৎসর ইত্যাদি সম্বন্ধে সে জ্ঞান অর্জন করল। এই হল সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান লাভের প্রথম স্তর। সংখ্যা-জ্ঞানের পর সংখ্যার মান নির্ণয় করা আর একটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় জিনিস। মান নির্ণয় করার অর্থ হল সংখ্যাটির স্থানাঙ্ক অর্থাৎ একক, দশক, শতক ইত্যাদি স্থান নির্ণয় করা। এই স্থানীয় মান কিন্তু হিন্দুরাই প্রথম আবিষ্কার করেন। আবার 'শূন্যের' আবিষ্কারও হিন্দুদের। প্রথমে বোর্ডে ছক কেটে ছোট খোপ তৈরী করে নেওয়া হ'ত। তারপর খোপের ভিতর বাঁশের ছড়ি রেখে তাঁরা গুণতেন। যেমন—

			////	///	//	/
		//		///		//

স শ দ এ

প্রথম খোপে হাজারের ঘরে 4টি, শতের ঘরে 3টি, দশের ঘরে 2টি ও এককের ঘরে 1টি দাগ (বাঁশের ছড়ি)। অতএব সংখ্যাটি হল 4321। কোন ঘরে ছড়ি না থাকলে বোঝা যেত তা হচ্ছে '0'। দ্বিতীয় খোপের সংখ্যাটি হল 20302। গণনা করার জন্য ছড়ি বা দাগের ব্যবহারের কথা অন্যান্য দেশেও (যেমন জাপান, কোরিয়া ইত্যাদি) শোনা যায়। যে ভাবে বাঁশের ছড়ি দিয়ে মানুষ একক, দশক ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা লাভ করেছে, ঠিক সেইভাবে ছোট ছোট কাঠি নিয়ে একটি কাঠিকে একক, দশটি কাঠির বাণ্ডিলকে দশক, আর দশটি দশ কাঠির বাণ্ডিলকে শতক বলে ঠিক করে নিয়ে শিশুদের একক, দশক সম্বন্ধে জ্ঞান দেওয়া সম্ভব। এই জ্ঞান আরো

পাকা করবার জন্য যখন যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ ইত্যাদি শেখানো হবে তখন আবার একক, দশক প্রভৃতির বৈশিষ্ট্য ও পার্থক্যগুলি আলোচনা করে ভালো করে বুঝিয়ে দিতে হবে।

যোগ (Addition) ঃ—সংখ্যাজ্ঞানের পর ছাত্রদের যোগ করার পদ্ধতি শেখানো হয়। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে যেন শেখার পর্যায়ে ছাত্র গণনা করতেও শিখে থাকে। যোগ করার প্রয়োজনীয়তা ছাত্র বুঝতে পারলে যোগের মূল নীতি-গুলি কয়েকটি ভাগে ভাগ করে তার সামনে উপস্থাপিত করা উচিত। মূল নীতিগুলির ভাগ এইরূপ হবে :—

১। যোগ করার সংখ্যাগুলির সমন্বয় দু'ভাবে করা যেতে পারে। প্রথমটি হল—যে সমস্ত সংখ্যার যোগফল 10 বা তার কম, সেইগুলি নিয়ে একটি ভাগ; অপরটি হল—10-এর বেশী যোগফল বিশিষ্ট সংখ্যাগুলি নিয়ে একটি ভাগ।

২। একটি নিয়ম শেখাবার সময় স্বাভাবিক ভাবে যোগ করে তারপর বিপরীত নিয়মে যোগ করে যোগফলের অপরিবর্তনীয় প্রকৃতিটিও প্রমাণ করে দেখাতে হবে। যেমন—$5+4=9=4+5$। তাছাড়া পাশাপাশি ও উপর-নীচ, দু'ভাবেই যোগ করা শেখাতে হবে।

যোগ করার নিয়ম—প্রথম স্তরে ছাত্রদের Abacus বা বলফ্রেমের সাহায্যে যোগ শিক্ষা দেওয়া হয়। তারপর ছোট ছোট যোগ (যাদের যোগফল 10 থেকে কম) করতে দেওয়া হয়। তারপর সহজ দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার যোগ (যেমন $11+22$, $33+42$ ইত্যাদি)—এইভাবে ক্রমশঃ কঠিন যোগ তাকে করতে দেওয়া হয়। যোগ করার সময় সচরাচর এই নিয়ম পালন করা হয় :—

```
 47
 36
 84
----
167
```

7 আর 6-এ তেরো আর 4-এ সতেরো, সতেরোর 7 নামল, হাতে রইল 1; 1 আর 4-এ পাঁচ, আর 3-এ আট, আর 8-এ ষোল। কিন্তু এখানে এককের ঘরে বলা হচ্ছে 7 আর 6-এ তেরো, আবার দশকের ঘরেও কোন স্থান নির্দেশ না করেই বলা হচ্ছে 4 আর 3-এ সাত। এ রকম বলা খুব ভুল, কারণ এতে ছাত্র একক' দশক ও শতকের মধ্যে পার্থক্য বুঝতে পারে না। এইভাবে না করে যোগ নীচের নিয়মে করা উচিত :—

```
 47
 36́
 8́4
----
167
```

7 আর 6-এ তেরো, অর্থাৎ একদশ আর তিন। এক দশের জন্য 6-এর উপর একটি দাগ দেওয়া হল। এরপর এককের যোগ। তিন আর চারে সাত, সেই সাতটি নীচে নামল। এরপর দশকের যোগ। আগেকার একদশ আর চার দশে পাচ দশ, আর তিন দশে আট দশ, আর আট দশে ষোল দশক। এর মধ্যে দশ দশকে এক শতক। তা বোঝবার জন্য 8-এর মাথায় একটি দাগ দেওয়া হল। তাহলে ষোল দশকের মধ্যে নামছে মাত্র বাকী ছয় দশক। এক শতকটি শতকের ঘরে গেল। সেখানে

অন্য কোন শতক না থাকার জন্য এক শতকটি নামলো। তাহলে যোগফল হল— এক শতক, ছয় দশক ও সাত একক অর্থাৎ 167। এইভাবে যোগ করলে শিশুদের প্রত্যেকটি স্থান সম্বন্ধে ধারণাটি স্পষ্ট হবে।

ক্রমশঃ ছাত্রদিগকে বড় বড় যোগ করার অভ্যাস শেখাতে হবে। একেবারে বড় বড় যোগ করতে দিলে ছাত্রদের আগ্রহ বিনষ্ট হতে পারে। মনে রাখতে হবে, নির্ভুলভাবে যোগ করার ক্ষমতা—কথাটির মধ্যেই নিহিত আছে। যোগ অর্থাৎ অখণ্ড একাগ্রতা—এইটিই হল যোগের মূলকথা। একটু বড় হয়ে যখন তারা বড় বড় যোগ করতে শিখবে তখন কিভাবে সেই যোগ অঙ্ক মিলিয়ে নিতে হয় তার নিয়মটিও তাদের শিখিয়ে দিতে হবে। নিয়মটি হল নিম্নরূপ, উদাহরণ :—

$$\begin{array}{rll} 4376 & 4+3+7+6=20,\ 2+0=2 \cdots \cdots & \text{(i)} \\ 5421 & 5+4+2+1=12,\ 1+2=3 \cdots \cdots & \text{(ii)} \\ 7895 & 7+8+9+5=29,\ 2+9=11, 1+1=2 \cdots & \text{(iii)} \\ 6218 & 6+2+1+8=17,\ 1+7=8 \cdots \cdots & \text{(iv)} \\ \hline 23910 & 2+3+9+1+0=15,\ 1+5=6 \cdots & \text{(v)} \end{array}$$

$$\text{(i)}+\text{(ii)}+\text{(iii)}+\text{(iv)}=2+3+2+8=15,\ 1+5=6=\text{(v)}$$

যোগ অঙ্কে বিশেষ পারদর্শিতা অর্জন করতে হলে চর্চার প্রয়োজন। নিয়মিত চর্চার ফলেই ছাত্ররা যোগ অঙ্কে পারদর্শী হতে পারবে। যোগের বিভিন্ন নিয়মের চর্চার পর বাস্তব জীবনের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতাতে সে যে সমস্ত সমস্যার সম্মুখীন হয়, তার মাধ্যমে যোগ করার অভ্যাস অর্জন করবে।

বিয়োগ (Subtraction) :—বিয়োগ হল যোগের ঠিক বিপরীত। যোগ অঙ্কে সংখ্যাগুলি সংযুক্ত করা হয় ; বিয়োগ অঙ্কে সংখ্যাগুলিকে বিযুক্ত করা হয়, যোগের মতো বিয়োগও প্রথমে দৈনন্দিন কাজের ভিতর দিয়ে শেখানো হবে। মূর্ত সংখ্যার সাহায্যে বিয়োগ করতে শেখার পর ছাত্র অমূর্ত সংখ্যার সাহায্যে বিয়োগ করতে শিখবে। বিয়োগ করারও কয়েকটি নিয়ম আছে। নিয়মগুলিকে সাধারণতঃ তিনভাবে ভাগ করা হয়। যথা :—

(১) **ধার করার নিয়ম**—$723=700+20+3=600+110+13$

$$\begin{array}{r} 457=400+50+7=400+\ 50+\ 7 \\ \hline 200+60+6 \\ =266 \end{array}$$

3 থেকে 7 বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 2 দশক থেকে 1 দশক ধার নিয়ে বা ভেঙ্গে নিয়ে 3-এর সঙ্গে যোগ 13 করা হল। 13 থেকে 7 বাদ দিলে হল 6। 2 দশক থেকে 1 দশক নিয়ে নেওয়া হয়েছে। আছে আর 1 দশক, 1 দশক থেকে 5 দশক বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 7 শতক থেকে 1 শতক ভেঙ্গে নিয়ে এসে 1 দশককে 11 দশক করা হল। 11 দশক থেকে 5 দশক বাদ দিলে থাকে 6 দশক। 7 শতক

থেকে 1 শতক বের হয়ে গেছে। সুতরাং আছে আর 6 শতক। 6 শতক থেকে 4 শতক গেলে থাকে 2 শতক। তাহলে বিয়োগফল হল 2 শতক 6 দশক 6 একক অর্থাৎ 266।

(২) **সমান যোগের নিয়ম**—এই নিয়মে বিয়োজন এবং বিয়োজ্য উভয়েই সমান সমান যোগ করে বিয়োগ করা হয়।

$$723 + 700 + 20 + 3 = 700 + 120 + 13 \quad \text{বিয়োজন}$$
$$457 = 400 + 50 + 7 = 500 + 60 + 7 \cdots \text{বিয়োজ্য}$$
$$200 + 60 + 6 = 266$$

3-এর থেকে 7 বাদ দেওয়া যায় না। এইজন্য 3-এর সঙ্গে 10 যোগ করা হল যোগফল হল 13, 13 থেকে 7 গেলে থাকে 6, বিয়োজনের সঙ্গে 10 যোগ করা হয়েছে বলে বিয়োজ্যের সঙ্গেও 10 যোগ করতে হবে। এইজন্য দশকের ঘরে অর্থাৎ 5 এর সঙ্গে 1 দশক যোগ করে 6 দশক করা হল। বিয়োজনের 2 দশক থেকে বিয়োজ্যের 6 দশক বাদ দেওয়া যায় না বলে বিয়োজনে দশকের ঘরে 1 শতক বা 10 দশক যোগ করা হল। যোগফল হল 12 দশক। 12 দশক থেকে 6 দশক বাদ দিলে বিয়োগফল হয় 6 দশক। এবার বিয়োজ্যও দশ দশক যোগ করাতে 4 শতকটি হয়ে গেলে 5 শতক। বিয়োজনের 7 শতক থেকে এই 5 শতক বাদ দিলে বিয়োগফল হল 2 শতক। অর্থাৎ মোট বিয়োগফল দাঁড়াল 2 শতক 6 দশক 6 একক বা 266।

(৩) **দোকানদারের নিয়ম**—$723 = 700 + 20 + 3$

$$457 = 400 + 50 + 7$$
$$200 + 60 + 6 = 266$$

এই নিয়মকে যোগের সাহায্যে বিয়োগ করার নিয়মও বলে। সাধারণতঃ দোকানদারেরা এই নিয়মটি বেশী ব্যবহার করে বলেই নিয়মটির এই রকম নামকরণ করা হয়েছে। এখানে 3 থেকে 7 গেলে কত থাকে, এ ভাবে হিসেব না করে 7-এর সঙ্গে কত যোগ করলে 3 (অর্থাৎ 13) হবে—তা নির্ণয় করা হয়। দোকানদারকে একটি টাকা দিয়ে হয়তো 52 পয়সার জিনিস কেনা হয়েছে। তখন দোকানদার 1 টাকা থেকে 52 পয়সা বাদ না দিয়ে 52 পয়সার সঙ্গে আর কত পয়সা যোগ করলে 1 টাকা হবে—তা হিসাব করে।

বিয়োগকরণের বিভিন্ন পদ্ধতির উপর অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষা করা হয়েছে। ইংল্যাণ্ড, স্কটল্যাণ্ড প্রভৃতি দেশে যে সমস্ত পরীক্ষা হয়েছে, তার থেকে এই সিদ্ধান্তেই আসা গেছে যে সমান যোগের পদ্ধতিই সবচেয়ে বেশী কার্যকরী পদ্ধতি। এতে ভুল হবার সম্ভাবনা অনেক কম। ধার করার পদ্ধতিটি খুব খারাপ নয়। কিন্তু এই পদ্ধতিতে অনেকের আপত্তি এই কারণের জন্য যে কোমলমতি শিশুদের ধার বা ধার-শোধ সম্বন্ধে কোন ধারণা না জন্মানোই ভালো। তবে ধার করা না বলে ভেঙ্গে নেওয়া হচ্ছে বললে তাদের মনে খারাপ ধারণা জন্মাবার আশা কম। সেক্ষেত্রে ভেঙ্গে নেওয়ার নিয়মটি মেনে চলা যেতে পারে এবং তাতেও ভুল হবার সম্ভাবনা অনেক কম। প্রকৃত প্রস্তাবে ভেঙ্গে নেওয়ার নিয়মটি সমান যোগের নিয়ম অপেক্ষাও সহজবোধ্য।

বিয়োগ করার সময় মনে রাখতে হবে—

(১) শিশুকে প্রথমে যে উদাহরণগুলি দেওয়া হবে—তা যেন ধার করার নিয়মে করতে হয় এবং তাতে যেন মাত্র দু'টি অঙ্ক থাকে।

(২) বিয়োগ সম্বন্ধে ধারণা স্পষ্ট হলে—তবেই ধার করার নিয়ম শেখানো যেতে পারে।

বিয়োগের নিয়ম বুঝলে তারপর বড় বড় বিয়োগ দিতে হবে এবং বিয়োগফল ঠিক হয়েছে কিনা—তা পরীক্ষা করার নিয়মটিও শিখিয়ে দিতে হবে। যথা :—

$$\begin{array}{l}
4568 \quad 4+5+6+8=23 \quad 2+3=5 \cdots\cdots \quad (i)\\
\underline{2782} \quad 2+7+8+2=19 \quad 1+9=10 \quad 1+0=1\cdots\cdots \quad (ii)\\
1786 \quad 1+7+8+6=22 \quad 2+2=4\cdots \quad (iii)
\end{array}$$

$$(i)-(ii)=5-1=4=(iii)$$

গুণ (Multiplication) :—গুণকে আমরা পৌনঃপৌনিক যোগ (Repeated addition) বলতে পারি। 2-কে 4 দ্বারা গুণ করার অর্থ হল 2 কে পরপর 4 বার যোগ করা। তবে বার বার যোগ করতে হলে সময়ও যেমন বেশী লাগে, পরিশ্রমও তেমনি অনেক বেশী হয়। এইজন্য সময় ও পরিশ্রম বাঁচানোর উদ্দেশ্যেই গুণ ব্যবহার করা হয়। গুণের সুবিধার জন্য অনেক সময় নামতা (Multiplication Table) মুখস্থ রাখতে হয়। গুণ সচরাচর × আকারের ক্রশ-চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কিন্তু যোগ চিহ্নে ক্রশটি সোজা থাকে। অনেকে বলেন, যোগ ও গুণের চিহ্ন খৃষ্টান ধর্মমতের ও ধর্ম-চিহ্নের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত।

গুণ করার পদ্ধতি—গুণ করার পদ্ধতিগুলিকে সচরাচর দু'ভাগে ভাগ করা হয়। পুরাতন পদ্ধতি ও আধুনিক পদ্ধতি।

পুরাতন পদ্ধতি—ধরা যাক, 574-কে 328 দ্বারা গুণ করতে হবে। 574-কে 328 বার যোগ করলেই গুণফল পাওয়া যাবে। এখন একেবারে 328 দ্বারা গুণ না করে 574-কে 8, 20 ও 300 দ্বারা পর পর গুণ করে গুণফলগুলি যোগ করলে সঠিক গুণফল পাওয়া যাবে। ছাত্ররা অভিজ্ঞতা থেকে শিখেছে যে কোন সংখ্যাকে দশবার যোগ করলে বা দশ দ্বারা গুণ করলে সংখ্যাটির ডানদিকে শূন্য (0) বসে। আবার একশতবার যোগ করলে বা একশ দ্বারা গুণ করলে দু'টি শূন্য বসে। কাজেই 20 দ্বারা গুণ করার অর্থ হল 2 দ্বারা গুণ করে ডানদিকে একটি শূন্য বসানো এবং 300 দ্বারা গুণ করার অর্থ হল 3 দ্বারা গুণ করে ডানদিকে দু'টি শূন্য বসানো

$$\begin{array}{l}
574\times 8 \;=\; 4592=(ii)\\
574\times 20 \;=\; 11480=(ii)\\
574\times 300=\underline{172200}=(iii)\\
\qquad\quad 188272
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
574\\
\underline{328}\\
4592\\
1148\;\\
\underline{1722\;\;}\\
188272
\end{array}$$

অবশ্য সমাধানটি থেকে দেখা যাচ্ছে (ii) ও (iii) স্তরে ডানদিকে শূন্য না বসালেও কোন ক্ষতি হয় না। কিন্তু যেহেতু এই স্তর দু'টি যথাক্রমে দশক ও শতক স্তরের গুণফল, সেইজন্য শূন্য রাখাই বাঞ্ছনীয়। এই পদ্ধতিতে প্রথমে গুণ করা হয় এককের ঘর দিয়ে, তারপর দশকের ঘর এবং তারপর শতকের ঘর দিয়ে। আবার এই পদ্ধতিতে গুণফল লেখা হয় ডানদিক থেকে বামদিকে।

আধুনিক পদ্ধতি -এই পদ্ধতিকে বাম দিক থেকে ডানদিকের পদ্ধতিও (Left-to-right) বলা হয়। বলতে গেলে পদ্ধতিটি পুরাতন পদ্ধতির ঠিক বিপরীত। এতে প্রথমে শতকের ঘর দিয়ে গুণ আরম্ভ করা হয়, তারপর দশকের ঘর এবং সবশেষে এককের ঘর দিয়ে। গুণফলও লেখা হয় বামদিক থেকে ডানদিকে।

উদাহরণ :— 3568
245

713600……200 দ্বারা প্রথম আংশিক গুণ
142720…… 40 দ্বারা দ্বিতীয় " "
17840…… 5 দ্বারা তৃতীয় " "

874160…… 245 দ্বারা সম্পূর্ণ গুণ "

এই পদ্ধতির সুবিধা হচ্ছে গুণ আরম্ভ করার সময় যখন মস্তিষ্ক সুস্থ ও সতেজ থাকে, তখন বড় গুণ (শতক বা তার উপরের ঘর থেকে) থেকেই শুরু করা হচ্ছে। কাজেই ভুল হবার সম্ভাবনা অনেক কম হবে। যত মস্তিষ্ক ক্লান্ত হবে—গুণের স্তরও তত কম বা ছোট হবে। অবশ্য এ পদ্ধতিতে অভ্যস্ত হয়ে গেলে ডান দিকের শূন্যগুলি বাদ দেওয়া যেতে পারে।

মনে মনে যোগ করে গুণ করার অভ্যাসটিও মানসিক চর্চার ফলে আয়ত্ত করা যায়। এর জন্যই আগেকার দিনে বিদ্যালয়গুলিতে মানসাঙ্কের প্রচলন ছিল। প্রথম অবস্থাতে শিশুরা গুণ শিখবে যোগের মাধ্যমে। রোমানরা Abacus বা বলফ্রেম ব্যবহার করতেন। তবে প্রাথমিক অবস্থাতে বিভিন্ন খেলা ও কাজের ভিতর দিয়ে গুণ শেখানো উচিত। নামতাও ছাত্ররা তৈরী করবে নিজেরাই—একটি সংখ্যা বার বার যোগ করে। যেমন :—

3 দুইবার যোগ করে হয় 6 $\therefore 3\times2=6$
3 তিনবার " " " 9 $\therefore 3\times3=9$
3 চারবার " " " 12 $\therefore 3\times4=12$ ইত্যাদি। এইভাবে দশ ঘর পর্যন্ত নামতা তারা নিজেরাই তৈরী করবে। নামতার তালিকা প্রস্তুত করার সময় তারা বিভিন্ন জিনিসের সাহায্য নিতে পারে যেমন—কাঠি, ছড়ি, পুঁতি, বলফ্রেম ইত্যাদি। তালিকা প্রস্তুত হয়ে গেলে তার চর্চার অভাবে তারা ভুলে যেতে পারে। বার বার চর্চা করার ফলে একটা বন্ধন (bond) সৃষ্ট হবে। এই বন্ধনটি দৃঢ় করতে হবে যাতে প্রয়োজন হলেই ছাত্র অত্যন্ত সহজে এবং দ্রুত তা মনে করতে পারে। দু'টি

রাশির গুণফল যে সব সময় সমান (স্থান পরিবর্তন করা সত্ত্বেও, যেমন 9×5=45=5×9 ইত্যাদি) এ ধারণাটি ছাত্রদের মনে সৃষ্টি করে দিতে হবে।

গুণফল নির্ণয় করার সময় কতকগুলি জিনিসের প্রতি লক্ষ্য রাখতে হবে। একটু বড় গুণ হলেই এককের ঘরের গুণফল থেকে "সংখ্যা" বা রাশি দশকের ঘর, আবার দশকের ঘর থেকে শতকের ঘরে নিয়ে যাওয়া হয় (যোগে যেটাকে 'হাতে থাকা' বলে)। প্রথম অবস্থায় গুণে এই 'হাতে থাকা' পর্যায়টি যেন না থাকে। এক অঙ্ক বিশিষ্ট রাশি দিয়ে গুণ শুরু করলেই ভালো হয়। যেমন—3×3, 4×2 ইত্যাদি। এই ভাবে গুণ করতে অভ্যস্ত হলে তারপর বড় গুণ, যেমন—5×6, 15×8 ইত্যাদি দেওয়া চলতে পারে। সবশেষে বড় গুণ করতে দিতে হবে। গুণককে ভেঙে নেওয়ার কৌশলটিও ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে হবে, যেমন—123=100+20+3 ইত্যাদি। সবচেয়ে বড় কথা হল, দৈনন্দিন জীবনের সমস্যামূলক প্রশ্নের মাধ্যমে গুণের চর্চা করা হবে।

ভাগ (Division):—ভাগ প্রক্রিয়াটি গুণ প্রক্রিয়ার বিপরীত। গুণকে যেমন পৌনঃপৌনিক যোগ বলা হয়, ভাগকে তেমনি পৌনঃপৌনিক বিয়োগ বলা যেতে পারে। প্রথম অবস্থাতে বিভিন্ন কাজ ও খেলার মাধ্যমে ছাত্ররা ভাগ সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবে। বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই ছাত্ররা ভাগের অর্থ বুঝবে। নানারকম মূর্ত জিনিসের সাহায্যেও তারা ভাগ সম্বন্ধে জ্ঞান আহরণ করতে পারে। ভাগের অর্থ বুঝলে তারপর তারা ভাগের পদ্ধতিগুলি শিক্ষা করবে। এই পদ্ধতিগুলি যান্ত্রিক ভাবে তারা যেন না শেখে। প্রতিটি স্তরের 'কি' ও 'কেন'গুলি যেন তারা ভালোভাবে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে। ভাগের প্রথম অবস্থাতে ছোট সংখ্যা নিয়ে শুরু করে ভাগ যে পৌনঃপৌনিক বিয়োগ তা ভালোভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—একটি শ্রেণীতে 16 জন ছাত্র আছে। 4 জন ছাত্র নিয়ে একটি দল গঠন করলে কয়টি দল হবে ?

```
16 জন ছাত্র
 4        এক দল  ┐
──                │
12                │
 4        এক দল  │
──                │
 8                ├ 4 দল।
 4        এক দল  │
──                │
 4                │
 4        এক দল  │
──                │
 0                ┘
```

এইভাবে তারা শিখল যে 4 জন করে দল হল 4টি ; অর্থাৎ 4 দিয়ে 16-কে ভাগ করলে ভাগফল হয় 4। এরপর ছাত্রদিগকে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষ সম্বন্ধে ধারণা দিতে হবে। গুণের নামতা তৈরী করার সময় ছাত্ররা ছোট ছোট ভাগ করার মতো ক্ষমতা অর্জন করে থাকে। কঠিন কঠিন ভাগ তাদের স্তরে স্তরে শেখাতে

হবে। একেবারে কঠিন ভাগ দিলে চলবে না। গুণের মতো ভাগ অঙ্কেও শতক, দশক প্রভৃতি ঘরগুলি ভেঙ্গে নিতে হয়। যেমন, যদি 8422-কে 22 দিয়ে ভাগ করতে হয়, তবে প্রথম সহস্রের স্থানের 8-কে 22 দিয়ে ভাগ করতে হবে। কিন্তু তা ভাগ করা যায় না বলে 8 হাজারকে 80 শতে পরিবর্তিত করে ভাগ করা হয়। নামতা ব্যবহার না করেও ভাজকের প্রথম অঙ্ক ও ভাজ্যের প্রথম দুটি অঙ্কের সাহায্যে ভাগফলের প্রথম অঙ্কটি কত হতে পারে তার একটা আভাস পাওয়া যেতে পারে।

ভাগ করার পদ্ধতি :—ভাগ সচরাচর দু'ভাবে করা যায়। একটি হচ্ছে প্রচলিত সাধারণ নিয়ম, আর অপরটি হল উৎপাদকের সাহায্যে।

প্রচলিত সাধারণ নিয়ম ঃ—5425-কে 65 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

```
65)5425(83
   520
    225
    195
     30
```

এখানে ভাজক = 65, ভাজ্য = 5425। ভাজকের প্রথম অঙ্ক অর্থাৎ 6, ভাজ্যের প্রথম দু'টি অঙ্ক অর্থাৎ 5 '-র মধ্যে কতবার যায় তা দেখতে হবে। 54-র ভিতর 6 যায় 9 বার। কাজেই 542 এর ভিতর 65 যাবে 9 বার নয়তো 8 বার। গুণ করে দেখা যায় $65\times9=585$ (542 থেকে বেশী) এবং $65\times8=520$ (542 থেকে কম), অতএব 8 বার যাবে। বর্তমানে ভাগফলটি ভাজ্যের ডানদিকে বা ভাজকের বিপরীত দিকে না লিখে ভাজ্যের মাথার উপর লেখা হয়। এতে এক পলক দেখে ভাগফল সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক ধারণা জন্মাতে পারে। যেমন, উপরের ভাগে অনুমান করা যায় যে ভাগফল 80-র কাছাকাছি হবে। এ ছাড়া অবশ্য আর একটা কারণ আছে। ভাজ্যের প্রত্যেক সংখ্যার উপর একটি করে সংখ্যা থাকা দরকার, তাহলে ভাজ্য কখন শেষ হচ্ছে তা সহজে বোঝা যাবে এবং ভাজ্যে শূন্য '0' থাকলে তার জন্য ভাগফলে শূন্য বসাতে আর ভুল হয় না।

উৎপাদকের সাহায্যে ভাগ করার নিয়ম ঃ—উৎপাদকের সাহায্যেও বেশ সহজ ভাবেই ভাগ করা সম্ভব। তবে একেবারে নীচু শ্রেণীতে এ পদ্ধতি অনুসরণ করা যুক্তিযুক্ত নয়, কারণ এতে অবশিষ্ট অর্থাৎ ভাগশেষ নির্ণয় করা একটু জটিল ব্যাপার। উঁচু শ্রেণীর ছাত্রদের নিকট পদ্ধতিটি সহজ বলে মনে হবে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

$2589\div42$। $42=2\times3\times7$। সুতরাং ভাগটি এইভাবে করা যায়—

```
2 | 2589        1 অবশিষ্ট
3 | 1294        1 অবশিষ্ট ( প্রতিদলে 2 )
7 |  431        4 অবশিষ্ট ( প্রতিদলে 6 )
      61
```

কাজেই অবশিষ্ট $=4\times6+1\times2+1$

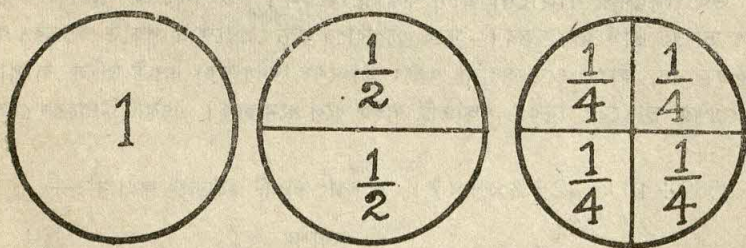
$=24+2+1$

$=27$

এই অবশিষ্ট নির্ণয় করার পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত জটিল। প্রচলিত পদ্ধতিটি বেশ ভালোভাবে আয়ত্ত হলে তবেই উৎপাদক পদ্ধতিটি শেখানো যেতে পারে। সবশেষে অঙ্ক মিলিয়ে দেখার কৌশলটি ছাত্রদের শিখিয়ে দিতে হবে। মনে রাখতে হবে :—

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

ভগ্নাংশ (Fractions) :—ভগ্নাংশের ধারণাটি অনেক প্রাচীন কাল থেকেই চলে আসছে। যতদূর জানা গেছে তাতে মনে হয় ব্যাবিলন ও মিশর দেশে ভগ্নাংশের ব্যবহার প্রথমে শুরু হয়। বর্তমানের পদ্ধতির সঙ্গে অবশ্য তার বিশেষ মিল নেই। বর্তমানে আমরা যে পদ্ধতিতে ভগ্নাংশ লিখে থাকি সে পদ্ধতি আবিষ্কার করেন ভারতীয় গণিতবিদরা। ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্কর—এঁরা এই ব্যাপারে পথিকৃৎ বলে মনে হয়। ভগ্নাংশ কথাটির মধ্যেই এর অর্থ ও স্বরূপ লুক্কায়িত আছে। ভগ্নাংশের অর্থ হল ভগ্ন অংশ। কাজেই কোন রাশির বা জিনিসের ভগ্নাংশের অর্থের সঙ্গে ছাত্রদের আগে পরিচিত করে দিতে হবে। অবশ্য স্কুলে আসার আগে বা ভগ্নাংশ সম্বন্ধে গণিতে জ্ঞান অর্জন করার আগেই সে ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করে থাকে। সে জানে আধখানা বিস্কুট বা আধখানা রসগোল্লা একখানার থেকে কম। তবে বিভিন্ন ভগ্নাংশের মধ্যে তুলনামূলক সম্বন্ধ নির্ণয় করা তখনো তার পক্ষে সম্ভব হয় না।

ছাত্রদের ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হলে কয়েকটি বিভিন্ন স্তরের মাধ্যমে অগ্রসর হতে হয়। প্রথম স্তরটি মূর্ত জিনিসের সাহায্যে শিক্ষা দেওয়ার স্তর। আপেল কেটে বিস্কুট ভেঙ্গে ইত্যাদি কাজের সাহায্যে ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। তারপর স্কেলের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। স্কেলে এককগুলি বিভিন্ন ভাবে ভাগ করা হয় বলে ছাত্র বিভিন্ন জাতীয় ভগ্নাংশের ধারণা অর্জন করতে পারবে। এ ছাড়া টাকা-পয়সার সাহায্যে বা ঘণ্টা-মিনিটের সাহায্যেও ভগ্নাংশ শিক্ষা দেওয়া যায়। ছবির ভিতর দিয়েও ভগ্নাংশের ধারণা দেওয়া যেতে পারে। যেমন : –

একটি জিনিসের অংশ হিসাবে ভগ্নাংশ যেমন প্রকাশ করা যায় একদল জিনিসের অংশ হিসাবেও তেমনি ভগ্নাংশ প্রকাশ করা যায়। যেমন 1টির অর্ধেক হল $\frac{1}{2}$, চারভাগের এক ভাগ হল $\frac{1}{4}$; আবার 16টি জিনিসের $\frac{1}{4}$ হল 4টি, $\frac{1}{8}$ হল 2টি ইত্যাদি। আবার ভগ্নাংশকে একটি সংখ্যার সম্বন্ধ হিসাবেও প্রকাশ করা যায়। যেমন—
$4 \div 8 = 4 : 8 = 2 : 4 = 1 : 2 = \frac{1}{2}$) অর্থাৎ 4-এর সঙ্গে 8-এর যে সম্বন্ধ, 2-এর

সঙ্গে 4-এর সেই সম্বন্ধ, এবং 1-এর সঙ্গে 2-এর সেই সম্বন্ধ, অর্থাৎ $\frac{1}{2}$। আবার পূর্ণ রাশির যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ করা চলে, ভগ্নাংশেরও তেমনি যোগ বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ করা চলে।

ছাত্র প্রথমে সহজ ভগ্নাংশগুলি সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করে থাকে। $\frac{1}{2}$ বা $\frac{1}{3}$ বললে সে বুঝতে পারে কোন জিনিসকে সমান 2 ভাগ বা 3 ভাগ করে তার একভাগ নেওয়া। কিন্তু $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ ইত্যাদি জাতীয় ভগ্নাংশগুলি সে সহজে বুঝতে পারে না। তখন কিন্তু বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে (যেমন একটি কাঠিকে সমান পাঁচভাবে কেটে দু'ভাগ নেওয়া) শিক্ষা দিলে ফল ভালো হয়। কাগজ ভাঁজ করার দ্বারাও ভগ্নাংশ শিক্ষা দেওয়া যায়।

ভগ্নাংশ শিক্ষা দিতে গিয়ে শিক্ষককে কয়েকটি অসুবিধার মধ্যে পড়তে হয়। সেগুলির কথা নীচে আলোচনা করা গেল।

(ক) ভগ্নাংশের রাশিগুলি দেখেই ছাত্ররা ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটি প্রাথমিক ধারণা করে নেয়। $\frac{1}{7}$ ও $\frac{1}{3}$ এই দু'টি ভগ্নাংশের মধ্যে সে $\frac{1}{3}$-কেই বড় বলে মনে করে, কারণ এতে একটি বড় সংখ্যা আছে। এই অসুবিধা দূর করার জন্য ছাত্রদের মনে 'হর' ও 'লব' সম্বন্ধে পরিষ্কার ধারণা গড়ে তুলতে হবে।

(খ) ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগে ছাত্ররা মারাত্মক ভুল করে। তারা জানে গুণ করলে সংখ্যাগুলি বাড়ে আর ভাগ করলে কমে। কিন্তু ভগ্নাংশে এর ঠিক বিপরীত হয়। এটা তারা সহজে মানতে চায় না। এই স্তরে তাদের 'ভগ্নাংশের ভগ্নাংশ' (fraction of fractions) সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। অবশ্য চিত্রের সাহায্যেও ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ শিক্ষা দেওয়া দেতে পারে।

(গ) ছাত্ররা ভগ্নাংশ নির্ণয় করার সময় মৌলিক এককটির কথা সময় সময় ভুলে যায়। যদি বলা হয়, কোন জিনিসকে সমান তিন ভাগে ভাগ করে তারপর এক একটি ভাগকে আবার সমান চার ভাগ করলে, এক-একটি ভাগ কত হবে? তারা চট করে উত্তর দেবে—$\frac{3}{4}$, কারণ চার ভাগে ভাগ করা মানেই তো এক-চতুর্থাংশ নেওয়া। এরূপ ক্ষেত্রেও যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন করতে হবে।

(ঘ) ভগ্নাংশের যোগ-বিয়োগ শিক্ষা দেবার পর গুণ ও ভাগের শিক্ষা দিতে হবে। ভগ্নাংশের চিহ্নগুলি বিশেষ করে 'এর' (of) সম্বন্ধে ধারণা দিতে হবে। মনে রাখতে হবে যেখানেই সুযোগ পাওয়া যাবে সেইখানেই বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ভগ্নাংশ শিক্ষা দিতে হবে।

দশমিক ভগ্নাংশ (Decimal fractions) :—বর্তমানে আমাদের দেশে যে মুদ্রা-হার প্রচলিত আছে, তার সাহায্যে ছাত্রদের দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যায়। এ ছাড়া স্কেল, থার্মোমিটার প্রভৃতির সাহায্যেও দশমিক ভগ্নাংশ শেখানো সম্ভব।

দশমিক ভগ্নাংশ হল দশমিক প্রথা অনুসারে সংখ্যার প্রসার। তবে এই পর্যায়ের

সংখ্যাগুলি সব সময় 1-এর থেকে ছোট হবে। 'হর' হবে দশ বা দশের কোন গুণতক। যেমন $\frac{3}{10}$ = ·3, $\frac{17}{100}$ = ·17, $\frac{7}{1000}$ = ·007 ইত্যাদি।

দশমিক প্রথাকে আরবদেশীয় প্রথা বলা হয়। এই প্রথাটির স্থবিধা হল এই যে কোন সংখ্যার কোন একটি অঙ্কের মান নির্ণয় করা যায় সেই অঙ্কটির অবস্থিতি দেখে। যেমন—একটি সংখ্যা হল 539। এখানে 5 আছে শতকের ঘরে এবং তার অর্থ হল 500 ; 3 দশকের ঘরে, তার অর্থ হল 30 ; 9 এককের ঘরে, তার অর্থ 9।

স্থতরাং 500+30+9
=539।

একে স্থানাংক নির্ণয় বলে। পরবর্তী কালে বিজ্ঞানের অগ্রগতির সঙ্গে সঙ্গে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র মাপের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিল। তখন দশ ভাগের এক ভাগ, শতভাগ, হাজার ভাগ ইত্যাদি ভাগ করে এই ক্ষুদ্র অংশগুলি কি ভাবে অঙ্কে প্রকাশ করা যায় সে বিষয়ে গবেষণা চলতে থাকল। গণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় আনুমানিক ষোড়শ শতাব্দীতে দশমিক সংখ্যার প্রসার ঘটে। ১৫৮৫ খ্রীষ্টাব্দে **স্টেভিনাস** নামে একজন ওলন্দাজ একটি পুস্তক প্রকাশ করেন। তাতে তিনি দশাংশ, শতাংশ, সহস্রাংশ প্রভৃতিকে প্রথম, দ্বিতীয় তৃতীয় ইত্যাদি বলে অভিহিত করেছেন। তাঁর লেখা দশমিক ভগ্নাংশের আকৃতি ছিল এইরূপ :—

(0) (1) (2) (3) (4)
45 6 7 0 8

(0) হল এককের ঘরে। (1) হল দশ ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ দশাংশ। (2) হল 100 ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ শতাংশ। (3) হল 1000 ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ সহস্রাংশ। তিনি অবশ্য পরে দশমিক সংখ্যা লেখার জন্য একটি পদ্ধতি আবিষ্কার করেন। যেমন—

| || ||| ||||
45 6 7 0 8

অর্থাৎ আগেকার (1) (2) (3) (4) ইত্যাদি সংখ্যার বদলে একটি, দু'টি তিনটি বা চারটি দাগ দেওয়া হত। পরে পরিশ্রম ও সময় বাঁচাবার জন্য কেবলমাত্র এককের ঘরের পরে একটি চিহ্ন দেওয়া হ'ত এবং পরবর্তী ঘরগুলিতে কোন দাগ না থাকলেও সেই ঘরের সংখ্যাগুলিকে তার আগের ঘরের দশমাংশ বলে ধরে নিতে হ'ত। তখন লেখার পদ্ধতি হল :—45 | 6708

কিন্তু এতেও একটা অস্থবিধা দেখা গেল। দাগটি একটু ছোট হয়ে গেলেই ইংরেজী 1 সংখ্যাটির মতো মনে হ'ত। তখন স্থির হল দাগের পরিবর্তে ছোট্ট একটি বিন্দু ব্যবহার করা হবে। খুব সম্ভব **নেপিয়ার** এই বিন্দু ব্যবহার করেন। অষ্টাদশ শতাব্দীতে এই বিন্দুর বহুল প্রচলন শুরু হয়। এই বিন্দুটিই পূর্ণসংখ্যা ও ভগ্নাংশের ব্যবধানটি দেখিয়ে থাকে। যেমন—

23·4678—এখানে 23 হল পূর্ণসংখ্যা, আর 4678 হল ভগ্নাংশ।

সেই রকম 3333 এই সংখ্যাটির এককের ঘরের 3 দশকের ঘরের 3-এর $\frac{1}{10}$; আবার দশকের ঘরের 3, শতকের ঘরের 3-এর $\frac{1}{10}$; শতকের ঘরের 3, সহস্রের ঘরের 3-এর $\frac{1}{10}$। এটি এইভাবে প্রকাশ করা যায় :—

স.	শ.	দ.	এ.
3	3	3	3

এইখানে শিক্ষক ছাত্রদের কোন সংখ্যাকে বামদিকে সরালে তার মান দশগুণ বেড়ে যায়, এই তথ্যটি বুঝিয়ে দিতে পারেন। তাহলে দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হলে কয়েকটি স্তরে অগ্রসর হতে হবে। এর প্রথম স্তরটি হল দশমিক ভগ্নাংশের অর্থ নির্ণয় করা। এই স্তরের কথা আমরা আগেই আলোচনা করেছি। দ্বিতীয় স্তরটি হল দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে ও সাধারণ ভগ্নাংশকে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা। ·3-এর অর্থ যে $\frac{3}{10}$, তা তারা শিখেছে। কিন্তু $\cdot37=\frac{37}{100}$, তা তারা সহজে বুঝতে পারে না। তখন তাদের বুঝিয়ে দিতে হবে $\cdot37=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}=\frac{30+7}{100}=\frac{37}{100}$। তেমনি $\cdot285=\frac{285}{1000}$ ইত্যাদি ; এরপর আসে দশমিক সংখ্যার শেষে এবং দশমিক বিন্দুর পরে বা মাঝে '0' (শূন্য)-র কথা। দশমিক সংখ্যার শেষের '0'-র কোন মূল্য নেই। অথচ দশমিক বিন্দুর পর বা মাঝে কোন '0' থাকলে তার মূল্য আছে। যেমন :—

$\cdot740=\frac{7}{10}+\frac{4}{100}+\frac{0}{1000}=\frac{700+40+0}{1000}=\frac{74\not{0}}{100\not{0}}=\cdot74$। তেমনি—

$\cdot7900=\cdot79$; অথচ

$\cdot074=\frac{0}{10}+\frac{7}{100}+\frac{4}{1000}=\frac{0+70+4}{1000}=\frac{74}{1000}$, সুতরাং '0'-র মূল্য আছে

কিংবা

$\cdot704=\frac{7}{10}+\frac{0}{100}+\frac{4}{1000}=\frac{700+0+4}{1000}$, এখানেও '0'-র মূল্য আছে।

এর পরের স্তরে আসে দশমিকের যোগ ও বিয়োগ। এতে কোন ঝামেলা নেই, কেবল লক্ষ্য রাখতে হবে যেন নীচে নীচে অঙ্কগুলি বসাবার সময় দশমিক বিন্দু এক লাইনে থাকে। এরকম করলে একক, দশক, শতক বা দশমাংশ, শতাংশ প্রভৃতি এক লাইনে থাকবে ও যোগ করার সুবিধা হবে। এই স্তরের পর স্তর হল দশমিকের ভাগ ও গুণের স্তর। দশমিকের গুণ করার অনেক নিয়ম আছে। লক্ষ্য রাখতে হবে, কোন নিয়মটি ছাত্ররা সহজে হৃদয়ঙ্গম করতে পারে। বিভিন্ন নিয়মের মধ্যে কয়েকটির উল্লেখ করা হল :—

(১) যে দু'টি সংখ্যার গুণফল নির্ণয় করতে হবে তাদের দশমিক বিন্দু গ্রাহ্য না করে সাধারণ ভাবে গুণ করে যেতে হবে। পরে যে রাশি দু'টি প্রথমে নেওয়া হয়েছিল—সেই দুই রাশিতে দশমিক বিন্দুর পর যে কয়টি অঙ্ক আছে সেই অঙ্ক কয়টির সংখ্যা, নির্ণয় করতে হবে। এইবার গুণফলের ডানদিক থেকে গুণে সেই কয়টি অঙ্ক

বাদ দিয়ে তাদের বাম দিকে দশমিক বিন্দু বসাতে হবে। এই পদ্ধতিটি সহজ—তবে যান্ত্রিক।

(২) আর একটি পদ্ধতিতে দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করে ঐ ভগ্নাংশগুলির গুণ করতে হয়। পরে ঐ গুণফলকে আবার দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করা হয়।

(৩) আর একটি পদ্ধতি হল গুণক ও গুণ্যকে একরকম মানের আকারে পরিবর্তিত করা। সেই মান হল যে গুণক রাশি 1 ও 10-এর ভিতর থাকবে। গুণক রাশিকে এই আকারে আনতে হলে যত দিয়ে গুণ বা ভাগ করতে হবে গুণ্যকেও ঠিক সেই রাশি দিয়ে ভাগ বা গুণ করতে হবে।

এ ছাড়া আরো অনেক নিয়মে দশমিকের গুণ করা যেতে পারে। যে নিয়মটি সহজবোধ্য, সেই নিয়মটি অনুসরণ করাই শ্রেয়ঃ।

দশমিকের ভাগ করার প্রক্রিয়া ঠিক গুণেরই বিপরীত। সুতরাং গুণের সময় যে ভাবে দশমিক বিন্দু বসানো হয়, ভাগের সময় ঠিক সেই ভাবেই বসানো যেতে পারে। ভাজ্য ও ভাজককে সাধারণ সংখ্যা মনে করে সাধারণ ভাবে ভাগ করে যেতে হয়। তারপর ভাজ্যে দশমিকের পরে যে কয়টি সংখ্যা আছে, তা নির্ণয় ক'রে তার থেকে ভাজকে দশমিকের পরে যে কয়টি সংখ্যা আছে, তা বাদ দিয়ে ভাগফলে ডানদিক থেকে গুণে সেই কয়টি সংখ্যার পরে দশমিক বসাতে হবে। এ ছাড়া ভাজককে পূর্ণ সংখ্যায় পরিবর্তিত করেও ভাগ করা যেতে পারে। আর একটি নিয়ম হচ্ছে ভাজককে একটি মানে পরিবর্তিত করা (Standard form)। আরো অনেক উপায়ে দশমিকের ভাগ করা সম্ভব। কিন্তু সবচেয়ে সহজবোধ্য পদ্ধতি হল—ভাজককে পূর্ণসংখ্যা করে নিয়ে ভাগ করার পদ্ধতি।

দশমিকের যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ শেখার পর ছাত্রকে দশমিকের ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. শেখানো যেতে পারে। ছক কাগজের (Graph Paper) সাহায্যেও দশমিকের ভগ্নাংশের ধারণা দেওয়া যেতে পারে।

পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ (Recurring decimal fraction) : এই জাতীয় ভগ্নাংশ নির্ণয় করা অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং ছাত্রদিগকে এই জাতীয় ভগ্নাংশ খুব বেশী ব্যবহার করতেও হয় না। কিন্তু তা হলেও এর সম্বন্ধে একটা মোটামুটি ধারণা প্রত্যেকেরই থাকা উচিত। এই ভগ্নাংশকে আবার আবৃত্ত ভগ্নাংশও বলে।

$\frac{1}{3}$-কে যদি দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে হয়, তবে দেখা যাবে যে ভাগ যতই প্রসারিত করা হোক না কেন, ভাগের কাজটি কখনও শেষ হবে না। আবার ভাগফলে দেখা যাবে যে দশমিক অংশের পর কেবলই 3 হচ্ছে অর্থাৎ 3টি পুনঃপুনঃ আবৃত্ত হচ্ছে। দশমিক ভগ্নাংশের যে অংশ পুনঃপুনঃ আবৃত্ত হয়, তাকে বলে **আবৃত্তাংশ** আর যে অংশের পুনঃপুনঃ আবৃত্তি হয় না তাকে বলে **অদবস্থ অংশ** বা **অনাবৃত্ত অংশ**। আবৃত্ত দশমিক আবার বিশুদ্ধ আবৃত্ত ($\cdot\dot{7}$, $\dot{2}\dot{7}$) ও মিশ্র আবৃত্ত

হ'তে পারে ($\cdot 3\dot{0}\dot{8}$, $4\cdot 5\dot{4}0\dot{8}$ ইত্যাদি)। সংক্ষেপে আবৃত্ত দশমিক লেখবার জন্য আবৃত্তি অঙ্কের মাথার উপর একটি বিন্দু (˙) বসানো হয়। কিন্তু যদি আবৃত্ত অংশে একাধিক অঙ্ক থাকে, তবে তার প্রথম ও শেষ অঙ্কের মাথায় ঐ রকম বিন্দু বসানো হয়।

সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করার জন্য যখন ভাগ করা হয় তখন, যখনই কোন ভাগশেষ আগের কোন ভাগশেষের সমান হয়, তখনই ভাগের কাজ বন্ধ করতে হয়। আগের সেই ভাগশেষটির পর ভাগফলে যে অঙ্ক থাকে, তার উপর এবং ভাগফলের শেষ অঙ্কটির উপর বিন্দু বসালে দশমিক ভগ্নাংশটি পাওয়া যাবে।

আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করতে হলে একটি নিয়ম মেনে চলতে হয়। ছাত্ররা কেবল নিয়মটি মুখস্থ করে থাকে যে, দশমিকের ঘরে যে কয়টি ঘরের উপর আবৃত্ত চিহ্ন আছে ভগ্নাংশের হরে সেই কয়টি 9 বসাতে হয় এবং যাদের উপর চিহ্ন নেই তার জন্য 0 বসাতে হয় এবং সেই সংখ্যাটি সমস্ত সংখ্যা থেকে বাদ দিতে হয়। কিন্তু এই নিয়মটি শেখাবার আগে কয়েকটি উদাহরণ দিতে হবে, যার সাহায্যে এই নিয়মটি গড়ে তোলা যেতে পারে। প্রথমে বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিকের উদাহরণ দেওয়া যাক।

ধরা যাক $\cdot\dot{5}$-কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করতে হবে।

এখন $\cdot\dot{5} = \cdot 5\,5\,5\,5\,5\cdots\cdots$

অতএব 10 গুণ $\cdot\dot{5} = 10\times\cdot\dot{5} = 5\cdot 5\,5\,5\,5\,5\cdots\cdots$ } বিয়োগ কর

এবং 1 গুণ $\dot{5} = 1\times\cdot\dot{5} = \cdot 5\,5\,5\,5\,5\cdots\cdots$

(10 − 1) বা 9 গুণ $\cdot\dot{5} = 5\cdot 0000 = 5$

$\therefore$ 1 গুণ $\cdot\dot{5} = \frac{5}{9}$

আবার যদি $\cdot\dot{2}\dot{3}$-কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করতে হয়, তবে

$\cdot\dot{2}\dot{3} = \cdot 23\ 23\ 23\cdots\cdots$

100 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = 23\cdot 23\ 23\cdots\cdots$

1 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = \cdot 23\ 23\cdots\cdots$

$\because$ 99 গুণ $\cdot\dot{2}\dot{3} = 23\cdot 0000 = 23$

$\therefore \cdot\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$

[দশমিকের পর যে কয়টি অঙ্ক থাকবে, দশমিক ভগ্নাংশকে প্রথমে 1-এর পর সেই কয়টি শূন্য দিয়ে গুণ করতে হবে।]

তাহলে এর থেকে যে নিয়মটি পাওয়া গেল তা হল—যে আবৃত্ত দশমিকে তদবস্থ অংশ নেই, তাকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করতে হলে দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিকসূচক বিন্দু পরিত্যাগ করে যে সংখ্যা হয়, তাকে লব রূপে বসাতে হয় এবং আবৃত্ত অংশে যে কয়টি অঙ্ক থাকে, ততগুলি 9-কে হর রূপে বসাতে হয়। এর

ফলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায়, তাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করলেই নির্ণেয় ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে।

মিশ্র পৌনঃপুনিক দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন :—

$7 \cdot 1\dot{2}\dot{8}$-কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করতে হবে।

$$7 \cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7 \cdot 128\ 28\ 28 \cdots\cdots$$

$$1000 \text{ গুণ } 7 \cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7128 \cdot 28\ 28$$

$$10 \text{ গুণ } 7 \cdot 1\dot{2}\dot{8} = 71 \cdot 28\ 28 \cdots\cdots$$

$\because$ 990 গুণ $7 \cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7057$ (বিয়োগ করে)

$$\therefore\ 7 \cdot 1\dot{2}\dot{8} = \frac{7057}{990} = 7\frac{127}{990}.$$

[এখানে প্রথমে 7-কে বাদ দিয়ে $\cdot 1\dot{2}\dot{8}$-কে ভগ্নাংশে পরিণত করে সেই ভগ্নাংশের সঙ্গে 7 পূর্ণসংখ্যা যোগ করে নির্ণেয় ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।]

এর থেকে যে নিয়মটি পাওয়া গেল তা হল—দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিকসূচক বিন্দু বাদ দিয়ে যে সংখ্যা হয়, তার থেকে আবৃত্ত অংশের পূর্ব পর্যন্ত সমস্ত অংশটুকু নিয়ে যে সংখ্যা তা বিয়োগ করতে হবে। এই বিয়োগফলটি হবে নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব। আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে ততগুলি 9 এবং সেগুলির ডানদিকে তদবস্থ অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে, ততগুলি শূন্য বসিয়ে যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে সেটি হবে ভগ্নাংশের হর। বার বার চর্চার ফলে ছাত্ররা এই জাতীয় ভগ্নাংশ সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা অর্জন করতে পারবে।

বর্গমূল (Square root) :—কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারাই গুণ করলে যে গুণফলটি পাওয়া যায়, তাকে প্রথম সংখ্যাটির দ্বিঘাত বা বর্গ (Square) বলে। আর প্রথম সংখ্যাটিকে ঐ গুণফলের বর্গমূল (Square root) বলে। যেমন—$5 \times 5 = 25$, সুতরাং 25 সংখ্যাটি 5-এর বর্গ ; আবার 25-এর বর্গমূল হল 5। যে কোন সংখ্যা তার বর্গের বর্গমূল হবেই। কোন সংখ্যার বর্গ বুঝাতে হলে সেই সংখ্যাটির ডানদিকে একটু উপরে 2 লিখতে হয়। যেমন—

$$4^2 = 4 \text{ এর বর্গ} = 4 \times 4 = 16$$

আবার বর্গমূল বুঝতে হলে সেই সংখ্যার বাম দিকে '$\sqrt{\ }$' চিহ্ন বসাতে হয়। আবার সংখ্যাটির ডান দিকে একটু উপরে $\frac{1}{2}$ লিখেও বর্গমূল প্রকাশ করা যায় যেমন :—$5^{\frac{1}{2}}$-এর অর্থ 5 বর্গমূল। অতএব $5^{\frac{1}{2}}$ এবং $\sqrt{5}$ একই।

বর্গমূল সম্বন্ধে শিক্ষা দেবার আগে দেখতে হবে ছাত্রদের বর্গ সম্বন্ধে ভালো ধারণা আছে কি না। বর্গের ধারণা হলে তারপর আসবে বর্গমূলের ধারণা।

বর্গমূল শেখাতে হলে প্রথমে উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করার নিয়ম শেখাতে হবে। এইটিই বর্গমূল নির্ণয়ের সহজ উপায়। উৎপাদকের প্রত্যেক জোড়ার জন্য বর্গমূল একটি ধরতে হবে। যেমন $\sqrt{576} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2^6 \times 3^2} = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$, অর্থাৎ তিন জোড়া 2-এর জন্য

তিনটি 2 এবং এক জোড়া 3-এর জন্য একটি 3 নেওয়া হয়েছে। ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করার সময় লব ও হরের বর্গমূল পৃথকভাবে নির্ণয় করতে হয়। ঐ বর্গমূল দু'টিকে লব ও হরের স্থানে বসালে যে ভগ্নাংশটি পাওয়া যাবে সেইটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের বর্গমূল হবে। তবে ছাত্রদিগকে একটি বিষয় বিশেষভাবে শিক্ষা দিতে হবে। সেটি হল—মিশ্র সংখ্যাকে বা মিশ্র ভগ্নাংশকে প্রথমে অপ্রাকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করে নিতে হবে। দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে সেটিকে আগে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত ক'রে নিতে হবে।

[কোন প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে দেখতে হবে কোন সংখ্যাকে আবার সেই সংখ্যা দিয়েই গুণ করলে গুণফল ঐ প্রদত্ত সংখ্যাটি হয়। এইজন্য প্রদত্ত সংখ্যাটির উৎপাদকগুলি নির্ণয় করে সংখ্যাটিকে উৎপাদকগুলির গুণফলরূপে প্রকাশ করা হয়।]

আর একটি নিয়মে বর্গমূল শেখানো হয়। এই নিয়মে সাধারণতঃ বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে দু'টি করে অঙ্ক একসঙ্গে করে জোড়া করে নিতে হয়। এর কারণ হচ্ছে (শিক্ষার্থীরা আগেই জানে) এক অঙ্কের অথবা দুই অঙ্কের সংখ্যার বর্গমূল এক অঙ্কের সংখ্যা। তিন অথবা চার অঙ্কের সংখ্যার বর্গমূল হয় দুই অঙ্কের সংখ্যা ইত্যাদি। ভাগ করে বর্গমূল নির্ণয় করার পদ্ধতিটি উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতিরই অনুরূপ। অঙ্কগুলির জোড়া নির্ণয় করতে হয় বামদিক থেকে ডানদিকে। দশমিক থাকলে দশমিকের বামেও জোড়া করে নিতে হয় এবং সেই অনুসারে পূর্ণ সংখ্যা হবে। বর্গাঙ্কিত কাগজ বা বর্গক্ষেত্রের ছবির সাহায্যেও বর্গমূল সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যায়। আর এই ছবির সাহায্যে ভাজক কেন সব সময় ভাগফলের দ্বিগুণ করতে হয় তা বুঝিয়ে দেওয়া যায়।

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion) ঃ—ছাত্ররা ঐকিক নিয়ম সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করার পর অনুপাত ও সমানুপাত সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করবে। অনুপাত ও ভগ্নাংশ প্রায় সমগোত্রীয়। একটি সংখ্যার থেকে আর একটি সংখ্যা বা কোন জিনিসের পরিমাণ থেকে আর একটি জিনিসের পরিমাণ কতগুণ (বেশী বা কম) —তা যে সংখ্যাটি প্রকাশ করে তাকেই অনুপাত বলে। যেমন 10 টাকা ও 2 টাকার অনুপাত হল 5, কারণ 10 টাকা 2 টাকার থেকে পাঁচগুণ বেশী।

একটা জিনিস প্রায়ই লক্ষ্য করা যায়। ছাত্ররা অনুপাতের অন্তর্নিহিত অর্থটি হৃদয়ঙ্গম না ক'রেও কিন্তু অনুপাত নির্ণয় করতে পারে। এটা করে অবশ্য সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবেই। অনুপাত ও সমানুপাত যে তুলনামূলক, এটা তারা প্রথম অবস্থাতে বুঝতে পারে না। এই জন্য প্রাথমিক স্তরে বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে অনুপাত সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া উচিত। এক ফুট মাপের স্কেল ও গজের মাপকাঠির সাহায্যে কিংবা মার্বেল প্রভৃতির সাহায্যে অনুপাত সম্বন্ধে প্রাথমিক শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। তারপর অমূর্ত বস্তু, সংখ্যা প্রভৃতি প্রয়োগ করা যেতে পারে। অনুপাত সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করার পর ছাত্রদের অনুপাতের চিহ্ন সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে

হবে। ভাগও এক জাতীয় অনুপাত। ভাগের চিহ্ন হল ÷, কিন্তু সুবিধার জন্য অনুপাতের চিহ্নে ভাগ চিহ্নের মাঝখানের দাঁড়িটি বাদ দেওয়া হয় (:)। আর একটা জিনিস ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে যে অনুপাত নির্ণয় করা হয় প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করে। এই ভাগ করা চলে একমাত্র সমজাতীয় জিনিসের মধ্যে। কাজেই অনুপাত যখন নির্ণয় করা হয়, তখন সমজাতীয় জিনিসের মধ্যেই নির্ণয় করা হয়। আর একটি প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় হল, দু'টি জিনিসের মধ্যে অনুপাতকে ইচ্ছেমত বাড়ানো বা কমানো যেতে পারে, কিন্তু তাতে মূল জিনিসগুলির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমন—

1·50 প ও 6 টাকার অনুপাতকে 1 : 4 বা 2 : 8 বা 4 : 16 বা $\frac{3}{2}$: 6 ইত্যাদি বিভিন্ন ভাবে লেখা হলেও 1·50 ও 6 টাকার মধ্যে অনুপাতটি সব সময় একই থাকছে।

অনুপাতের পর আসে সমানুপাত। অবশ্য সমানুপাত নির্ণয় করতে হলে ছাত্রদের ভগ্নাংশের গুণ বা ভাগ করার মতো পূর্বজ্ঞান থাকা বাঞ্ছনীয়। সমানুপাত সম্বন্ধে প্রথমে এইভাবে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে :—

4 গজ দড়ির সঙ্গে 12 গজ দড়ির যে সম্পর্ক, 8 গজ দড়ির সঙ্গে সেই সম্বন্ধ কত গজ দড়ির ?

10 টাকার সঙ্গে 1000 টাকার যে সম্পর্ক, কত টাকার সঙ্গে 50 টাকার সেই সম্পর্ক ?

যখন দু'টি অনুপাত সমান হয়, তখন তাকে সমানুপাত বলে। যেমন 4 গজ দড়ি ও 12 গজ দড়ির অনুপাত হল 4 : 12 বা 1 : 3। এখন 8 গজের সঙ্গে কত গজের অনুপাত 1 : 3 ?—8 : x = 1 : 3 or $\frac{8}{x} = \frac{1}{3}$ or $x = 24$ গজ

সুতরাং 8 গজ 24 গজের মধ্যে সেই একই অনুপাত। এই রকম দু'টি অনুপাতের বিবৃতিকে সমানুপাতের বিবৃতি বলা হয়, আর এটি লেখা হয় এইভাবে :—

4 : 12 : : 8 : 24

সমানুপাত সম্বন্ধে ছাত্রদের ধারণা পরিষ্কার হলে কয়েকটি অঙ্ক দিয়ে সমানুপাতের অর্থ সহজ করে দেওয়া যায়। তারপর বিভিন্ন জাতীয় সমানুপাত (Direct এবং Increase) সম্বন্ধেও ছাত্রদের শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। বাস্তব জীবনের দৈনন্দিন সমস্যা থেকে সমানুপাতের অঙ্ক নির্বাচন করলে ভালো হয়।

সমানুপাতের জন্য গণিতে পৃথক্ কোন অধ্যায়ের প্রয়োজন নেই। ভগ্নাংশের অধ্যায়েই অনুপাত ও সমানুপাতকে অন্তর্ভুক্ত করা যেতে পারে।

মেট্রিক পদ্ধতি (Metric System) :—দশমিকের ভাগ ও গুণের পদ্ধতির উপর মেট্রিক পদ্ধতিটি প্রতিষ্ঠিত। অনেক আগের থেকেই ভারতবর্ষে ওজন ও মুদ্রার ব্যাপারে মেট্রিক পদ্ধতির প্রচলন করার প্রচেষ্টা চলে আসছিল। প্রথম দিকে অবশ্য বিশেষ সাফল্য অর্জিত হয়নি। 1955 সালে কেন্দ্রীয় সরকার পরিকল্পনা কমিশন ও প্রাদেশিক সরকারগুলির সঙ্গে আলোচনা করে সমগ্র ভারতব্যাপী ওজন ও

মুদ্রার ক্ষেত্রে সমনীতি মেট্রিক পদ্ধতি প্রচলন করার পরিকল্পনা গ্রহণ করেন। এর মুখ্য উদ্দেশ্য ছিল সমগ্র দেশে পরিমাপের ক্ষেত্রে সমতা আনয়ন করা। 1955 সালেই লোকসভার অধিবেশনে মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজনের পরিকল্পনাটি গ্রহণ করা হয়। 1957 সালে 1লা এপ্রিল থেকে মেট্রিক পদ্ধতিতে মুদ্রা গণনার (দশমিক মুদ্রা) পদ্ধতিটি প্রচলিত হয়। এর ফলে আগেকার আনা-পয়সা-পাই ইত্যাদির পরিবর্তে নয়া পয়সা (পরবর্তী কালে পয়সা, পয়সে) ব্যবহৃত হতে থাকল। মেট্রিক পদ্ধতির ওজন প্রচলিত হয় 1956 সাল থেকে। সরকারের অবশ্য পুরোপুরি পরিবর্তনের জন্য দশ বৎসর সময় দেবার পরিকল্পনাও ছিল। 1960 সালের 1 অক্টোবর থেকে ব্যবসা-বাণিজ্যে মেট্রিক পদ্ধতিতে ওজন করার পদ্ধতিটি আবশ্যিক করা হয়। সেই থেকে ওজন মন-সের-ছটাকের পরিবর্তে কুইণ্টাল-কিলোগ্রাম-গ্রাম ইত্যাদিতে করা হয় এবং বিদেশে মালপত্র রপ্তানী করার সময়ও ঐ ওজন ব্যবহৃত হয়। প্রথম প্রথম এই পদ্ধতি ব্যবহারে কিছু অসুবিধাও ছিল। প্রাচীন ও নূতন, দু'টি পদ্ধতি যখন পাশাপাশি প্রচলিত ছিল তখন অসুবিধার মাত্রা বেশীই ছিল। সরকার থেকে পরিবর্তন তালিকাও (Conversion Table) প্রকাশ করা হয়। কিন্তু প্রাচীন পদ্ধতি সম্পূর্ণ অবলুপ্ত হবার পর অসুবিধার মাত্রাও অনেক কমে যায়। দু'একটি অসুবিধার উদাহরণ দেওয়া যাক :—

1 আনা = 6 নঃ পঃ, 1 টাকা = 16 আনা = 16 × 6 = 96 নঃ পঃ

কিন্তু 1 টাকা = 100 নঃ পঃ (স্বীকৃত)

তেমনি 3 আনা = 18 নঃ পঃ (হিসেব মতো) না হয়ে 19 নঃ পঃ (স্বীকৃত)। অবশ্য গোড়াতেই 1 টাকা = 100 নঃ পঃ ধরে সরকার থেকে পরিবর্তনের সূত্র নির্ণয় করা হয়েছিল।

তেমনি 18 সের = 16 কিলোগ্রাম ; আবার 36 সের = 33 কিলোগ্রাম ; কিন্তু হওয়া উচিত ছিল 32 কিলোগ্রাম। এগুলিকে এখন অবশ্য দূরীভূত করা সম্ভব হয়েছে।

মেট্রিক পদ্ধতির সুবিধা :—মেট্রিক পদ্ধতি ব্যবহারের কতকগুলি সুবিধা আছে। তার মধ্যে প্রধান প্রধান সুবিধাগুলি হল :—

(১) শেখা সহজ, ব্যবহার করা আরো সহজ। (২) সমস্ত দেশে একই রকম পরিমাপ ব্যবহার করা সম্ভব। (৩) হিসেব পত্র খুব সহজে এবং নির্ভুলভাবে করা সম্ভব। কেবলমাত্র দশমিকের সাহায্যেই মানের পরিবর্তন করা যায়।

পদ্ধতিটির সুবিধার জন্য হয়তো কিছুদিনের মধ্যে এটি একটি আন্তর্জাতিক পদ্ধতি হিসাবে স্বীকৃতি অর্জন করবে। দশমিকের অঙ্ক করার সময় ছাত্রারা মেট্রিক পদ্ধতির নিয়মগুলিও শিখতে পারে। অতিরিক্ত শেখার মধ্যে তাকে বিভিন্ন এককের নামগুলি শিখতে হবে। এইগুলি প্রয়োজন মতো বাস্তব অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে তাকে শেখানো যেতে পারে।

শতকরা (Percentage)—শতকরার অর্থ হল—প্রতি শতে ; অর্থাৎ

একশত'র মধ্যে কত। শতকরাকে আমরা এমন একটি ভগ্নাংশ বলতে পারি যার হর 100। যেমন, 5%-এর অর্থ হল $\frac{5}{100}$ ইত্যাদি। সেইজন্য ভগ্নাংশ শিক্ষা দেবার সময়ই শতকরা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া চলতে পারে। কিন্তু শতকরা হিসাব কেন করা হয়, সে বিষয়ে ছাত্রদিগকে পরিষ্কার জ্ঞান দিতে হবে। যেখানে বিভিন্ন মাপের মধ্যে তুলনা করতে হয়, সেখানে একটি প্রামাণ্য মাপের প্রয়োজন হয়। 100-কে এইরূপ একটি প্রমাণ সংখ্যা বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।

শতকরার চিহ্নটির (%) বিবর্তন সম্বন্ধেও ছাত্রদের মনে একটা ধারণা গড়ে তোলা যায়। শতকরা বলতে যেহেতু প্রতি শ'তে (অর্থাৎ 100 দ্বারা ভাগ) বোঝায়, সেইজন্য প্রথম অবস্থাতে তা প্রকাশ করা হ'ত ভাগ (÷) চিহ্নের সাহায্যে। পরে নানা বিবর্তনের মধ্যে বর্তমান চিহ্নটি এসেছে।

শতকরার অধিকাংশ অঙ্কই অনুপাত ও সমানুপাতের অঙ্ক। সুদকষা, লাভ ও ক্ষতি, স্টক-ডিস্কাউন্ট প্রভৃতি বিভিন্ন ক্ষেত্রে শতকরা হিসাব ব্যবহৃত হয়। তবে ব্যবসা জগৎ বা দৈনন্দিন জীবন থেকে সমস্যা সংগ্রহ করে শতকরা হিসাবে সেগুলি সমাধান করলে ভালো হয়।

সুদকষা (Simple Interest)—শতকরা হিসাব বেশ ভালো করে বুঝলে তারপর সুদকষা সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া উচিত। সুদকষার মূল অর্থ হল সুদ নির্ণয় করা। এখন সুদ কি বা সুদ কেন দেওয়া হয়, সে বিষয়ে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দিতে হবে। তবে প্রাথমিক অবস্থায় ধার দিয়ে সুদ আদায় করা সম্বন্ধে ধারণা না দিয়ে ব্যাঙ্কের সুদ, পোস্ট অফিস, সেভিংস ব্যাঙ্কের সুদ ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা দেওয়াই ভালো। তারপর সুদ নির্ণয়ের পদ্ধতিটি তাকে ভালো করে বুঝিয়ে দিতে হবে। এ সম্বন্ধে কোন সূত্র যেন সে তোতাপাখীর মতো মুখস্থ না করে। ঐকিক নিয়ম সম্বন্ধে জ্ঞান থাকলে সুদ নির্ণয় করা সহজ হয়।

সুদ কষার কতকগুলি অঙ্ক করার পর ছাত্রদিগকে এই সূত্রটি ব্যবহার করার নির্দেশ দেওয়া যেতে পারে।

$$S.\,I=\frac{\text{Principal}\times\text{Rate}\times\text{Time}}{100} \text{ বা } I=\frac{P\times R\times T}{100}$$

$$A=P+I$$

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. (H. C. F. and L. C. M.):—দুই বা ততোধিক সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায় সচরাচর দু'ভাবে—(১) উৎপাদকের সাহায্যে এবং (২) সংখ্যাকে পুনঃপুনঃ ভাগ করে। ধরা যাক, 473 এবং 129-এর গ. সা. গু. নির্ণয় করতে হবে।

উৎপাদকের সাহায্যে :—$11\,\underline{|\,473}$; $3\,\underline{|\,129}$ দুইটির মধ্যে সাধারণ উৎপাদকের

43　　43

উৎপাদক হল 43, অতএব গ সা. গু. = 43.

ভাগের সাহায্যে :—129)473(3
387
86) 1 9 (1
86
43)86(2
86

$\therefore$ গ. সা. গু. = 43.

পুনঃপুনঃ ভাগের ফলে গ. সা. গু. কেমন করে নির্ণয় করা হয়, সেটি ছাত্রদের পরিষ্কার বোঝা দরকার। নীচু শ্রেণীতে ছাত্ররা সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবে ভাগ করে যায়। কিন্তু উঁচু শ্রেণীতে কয়েকটি উপপাদ্যের সাহায্যে নিয়মটি ব্যাখ্যা করা যেতে পারে।

প্রথম উপপাদ্য ঃ—যদি x সংখ্যাটি y সংখ্যার গুণনীয়ক হয়, তবে x সংখ্যা y সংখ্যার যে কোন গুণিতকেরও গুণনীয়ক হবে। x সংখ্যা y সংখ্যার গুণনীয়ক

অর্থাৎ $y = x \times K$ (K একটি পূর্ণসংখ্যা)

$\therefore\ y \times a = (x \times K) \times a = x \times (K \times a)$

অর্থাৎ x সংখ্যা $y \times a$ সংখ্যার গুণনীয়ক।

দ্বিতীয় উপপাদ্য ঃ—যদি x সংখ্যাটি y ও z সংখ্যা দুইটির সাধারণ গুণনীয়ক হয়, তবে x সংখ্যাটি y ও z সংখ্যা দুইটির যে কোনও গুণিতকের যোগ বা বিয়োগ ফলেরও সাধারণ গুণনীয়ক হবে। অর্থাৎ x সংখ্যাটি $my + nz$-এর সাধারণ গুণনীয়ক হবে।

তৃতীয় উপপাদ্য ঃ—x দ্বারা y-কে ভাগ করলে যদি z অবশিষ্ট থাকে, তবে x এবং y-এর গ. সা. গু. y এবং z-এর গ. সা. গু. এর সমান হবে। দু'টি সংখ্যার গ. সা. গু. কেন পুনঃপুনঃ ভাগ করে পাওয়া যায়—তা নীচের উদাহরণ থেকে বোঝা যাবে। ধরা গেল, X ও Y দু'টি সংখ্যা যাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হবে।

X) Y (P
PX
Z) X (Q
ZQ
L)Z(R
LR
M)L(S
MS

L-কে M দ্বারা ভাগ করার পর আর কোন অবশিষ্ট নাই। সুতরাং L ও M-এর গ. সা. গু. M।

এখন X ও Y-এর গ. সা. গু. = Z ও X-এর গ. সা. গু. = L ও Z-এর গ. সা. গু. = M ও L-এর গ. সা. গু.

সুতরাং X ও Y-এর গ. সা. গু. = M হবে।

ল. সা. গু × গ. সা. গু. = সংখ্যা দুইটির গুণফল।

ল. সা. গু. নির্ণয় করার সময় দু'টি রাশি থাকলে একটি রাশির সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র গুণিতকটি নির্ণয় করতে হবে এবং সেই গুণিতকটি দ্বিতীয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য হবে। কিন্তু এই সূত্রটি ব্যাখ্যা করার সময় বাস্তব ও প্রকৃত উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করলে ভালো হয়।

ধরা যাক সংখ্যা দু'টি হল 15 এবং 10.

এখন $15=5\times3$; $10=5\times2$

সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. $=5$ এবং ল. সা. গু. $=30$

$\therefore$ ল. সা গু. $\times$ গ. সা. গু $=5\times30=150$

আবার সংখ্যা দুইটির গুণফলও $15\times10=150$

উদাহরণটিতে দেখা গেল, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. = তাদের গ. সা. গু. $\times$ অন্য উৎপাদকগুলি

আবার এক একটি সংখ্যা = গ. সা. গু. $\times$ অপর উৎপাদক

$\therefore$ **সংখ্যা দুইটির গুণফল** = (গ. সা. গু. $\times$ অপর উৎপাদক) $\times$ (গ. সা. গু. $\times$ অপর উৎপাদক)

= গ. সা. গু. $\times$ অন্য উৎপাদকগুলি $\times$ গ. সা গু.

= গ. সা. গু. $\times$ ল. সা. গু.।

অঙ্ক সম্বন্ধে কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :—গণিতের বিষয়বস্তু ও পদ্ধতির কতকগুলি দিকে বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া বাঞ্ছনীয় বলে মনে হয়। এগুলি সম্বন্ধে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হল।

(ক) অপ্রয়োজনীয় যাথার্থ্য (False accuracy) : গণিতে যা উত্তর চাওয়া হয়েছে বা যে কয়টি স্তর উল্লেখ করতে বলা হয়, তার বাইরে যাওয়ার একটি স্বাভাবিক প্রবণতা ছাত্রদের মধ্যে দেখা যায়। এ অভ্যাসটি অত্যন্ত বদভ্যাস এবং এটি বন্ধ করা প্রয়োজন। কেন বন্ধ করা প্রয়োজন—তা ছাত্রদের যুক্তির সাহায্যে বুঝিয়ে দিতে হবে। অনেক সময় দৈর্ঘ্য মাপ করতে গিয়ে এক ইঞ্চির আট ভাগের একভাগ বা দশ ভাগের এক ভাগ কিংবা দশমিকের অষ্টম বা দশম স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান ছাত্ররা নির্ণয় করে থাকে। তারা ভাবে, হিসাবে তারা আরো নিখুঁত, আরো সূক্ষ্ম হচ্ছে। কিন্তু ঐ জাতীয় আসন্ন মান নির্ণয় করা কেবল অপ্রয়োজনীয়ই নয়, অকিঞ্চিৎকরও। যত দূরে যাওয়া যাবে ততই মানের যাথার্থ্য ক্রমশঃ কমে আসবে। তেমনি জ্যামিতির সম্পাদ্যে অনেক সময় চাওয়া না হলেও তারা প্রমাণ দিতে অভ্যস্ত হয়ে থাকে। এও বন্ধ করতে হবে।

(খ) অনুমান (Estimate) :—কোন সমস্যার সঠিক সমাধান করতে অনুমান প্রয়োগ করার কৌশলটি ছাত্রদের শিক্ষা দিতে পারলে অনেক ক্ষেত্রে হয়রানির হাত থেকে তাদের বাঁচানো যায়। সমাধান বা উত্তরটি ছোটই হোক আর বড়ই হোক অনুমানের সাহায্যে তার প্রকৃতি সম্বন্ধে একটা আভাস পাওয়া যায়। যেমন : ছাত্রকে হয়তো 488 এবং 27-এর গুণফল নির্ণয় করতে বলা হয়েছে। গুণফল নির্ণয় করার

আগে সে অনুমান করে নিতে পারে গুণফল কোন্ সংখ্যার কাছাকাছি হবে। নিশ্চয় গুণফলটি 15, 00 (500×30) থেকে কম এবং 12,200 (488×25) থেকে বেশী। এ জানা থাকলে তার পক্ষে গুণফল নির্ণয় করার সুবিধা হয় বা গুণ ঠিক হচ্ছে কিনা—সে তা বুঝতে পারে। তবে লক্ষ্য রাখতে হবে, অনুমান প্রক্রিয়াটি যেন বেশীর ভাগ ক্ষেত্রেই মৌখিক হয় এবং সময় যেন তার জন্য বেশী না লাগে। অনুমান প্রক্রিয়াটিকে প্রাথমিক ভাবে 'মিল করার' (check) প্রক্রিয়া বলা যেতে পারে। এর ফলে ছাত্ররা মারাত্মক ভুল করার হাত থেকে নিষ্কৃতি পায়।

(গ) **মিল করা** (Check)ঃ—কোন সমস্যার সমাধান হয়ে গেলে বা কোন অঙ্কের উত্তর নির্ণীত হয়ে গেলে সেই সমাধানটি বা উত্তরটি যে নির্ভুল হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা দরকার। অঙ্কটি দ্বিতীয়বার না করেও উত্তরটি মিল করা সম্ভব। অনেক গণিতবিদ বলে থাকেন—ছাত্রকে প্রথম থেকেই নির্ভুলভাবে অঙ্ক করার অভ্যাসটি অর্জন করিয়ে দিতে হবে। ("Train the child to absolute correctness the first time,") কিন্তু অনেক কারণের জন্য তা সম্ভব হয় না। ছাত্ররা ভুল করেই থাকে আর এই ভুল করার সম্ভাবনা থাকে বলেই তারা উত্তরটির সত্যতা যাচাই করতে চায়। কিন্তু প্রশ্ন হলঃ সে এই সত্যতা কি ভাবে যাচাই করবে। অনেক গণিত পুস্তকে উত্তর দেওয়া থাকে ; তার সাহায্যে যাচাই করা যেতে পারে। আবার ছাত্র নিজেই তার উত্তরের সত্যতা যাচাই করতে পারে। এর মধ্যে ছাত্রের নিজের চেষ্টাতে সত্যতা যাচাই করার পদ্ধতিটিই সবচেয়ে ভালো মনে হয়, কারণ এতে তার আত্মবিশ্বাস বাড়ে। তাছাড়া উত্তরের সত্যতা যাচাই করাও তো একটি সমস্যার সমাধান করা। ছাত্র সঠিক উত্তর চায়। সে সঠিক উত্তর খুঁজে বের করার পদ্ধতিটি নিজে নিজেই আবিষ্কার করবে। তার উত্তরটিই যে সঠিক উত্তর, সেটি সে নিজে নিজেই পরীক্ষা করবে। ছাত্রজীবনের শেষে বাস্তব জীবনে তার সামনে অনেক সমস্যা আসবে। সেগুলি সমাধান করার সময় তার সাহায্যের জন্য তখন কোন পাঠ্যপুস্তক বা শিক্ষক থাকবে না। কিন্তু সমস্যাগুলির সঠিক সমাধান হওয়া চাই। সেই জন্য প্রথম থেকেই নিজে নিজে সমাধানটি যাচাই করার ক্ষমতা অর্জন করতে হবে।

শ্রেণীকক্ষের অঙ্ক ইত্যাদি যাচাই করার বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। এর মধ্যে কতকগুলি উল্লেখ করা হল। যোগের উত্তর যাচাই করার পদ্ধতি আমরা আগেই আলোচনা করেছি। পাশাপাশি রেখে বা উপর-নীচে যোগ করে এবং 9 বাদ দিয়ে যোগফল ঠিক হয়েছে কি না যাচাই করা যায়। বিয়োগ অঙ্কে 9 বাদ দিয়ে বিয়োগফল যাচাই করা যায়। আবার বিয়োগ ফলের সঙ্গে বিয়োজ্য যোগ করেও উত্তরের সত্যতা যাচাই করা সম্ভব। গুণ অঙ্কও 9 বাদ দিয়ে মেলানো যায়। আবার ভাগ করেও গুণের উত্তর মেলানো সম্ভব। তেমান ভাগ অঙ্কও 9 বাদ দিয়ে মেলানো যায়, আবার গুণ করেও মেলানো যায়, কারণ ভাজক×ভাগফল+অবশিষ্ট=ভাজ্য। এই ভাবে বিভিন্ন সমস্যার সমাধানগুলি মেলান সম্ভব। যেখানে অঙ্ক ছোট থাকে, সেখানে

সমাধানটির পুনরাবৃত্তি করাই ভালো। বড় অঙ্ক হলে প্রত্যেকটি স্তর ভালোভাবে পরীক্ষা করে দেখতে হয়। এর জন্য অনেকে 'রাফ্' অঙ্ক করার পক্ষপাতী। এতে প্রাথমিকভাবে একটা অনুমানপ্রসূত যাচাই হয়ে যায়। আবার বীজগণিতের সমাধান জাতীয় সমস্যাতে এমন কতকগুলি সত আরোপ করা থাকে যে সঠিক উত্তর না হলে আপনা আপনি তা ধরা পড়ে যায়। বর্গমূল জাতীয় সমস্যাগুলির সমাধানও খুব সহজে মেলানো সম্ভব।

(ঘ) **রাফ কাজ (Rough work)**:—অনেক ছাত্র পাকাপাকি ভাবে অঙ্কটি করার আগে 'রাফে' অঙ্কটি করে থাকে। অনেক শিক্ষকও সঠিক উত্তরের জন্য ছাত্রদিগকে এই রাফ কাজ করাতে উৎসাহিত করে থাকেন। কিন্তু এই পদ্ধতিটি সবসময় গ্রহণযোগ্য নয়। 'রাফ-কাজ' (রাফ কথাটির অর্থ হল আবর্জনা) কথাটির মধ্যেই একটা নীচতাবোধ আছে। ছাত্ররাও যেন রাফ কাজকে ঠিকমত মর্যাদা দেয় না। ফলে তারা সংখ্যাগুলি স্পষ্ট ও পরিষ্কার করে লেখে না, বাক্যগুলিও অসম্পূর্ণ থেকে যায়। তাছাড়া প্রত্যেকটি অঙ্ক দু'বার করে করতে হয় বলে সময় ও পরিশ্রম অনেক বেশী লাগে। রাফ্ কাজের অস্পষ্টতা ও অসম্পূর্ণতার জন্য পরিষ্কার ভাবে অঙ্কটি লিখবার সময় ভুল হওয়া স্বাভাবিক। এইজন্য পুরো অঙ্কটি রাফে করার অভ্যাসটি বন্ধ করতে হবে। যে সমস্ত হিসাব অত্যন্ত প্রয়োজনীয়, কেবল সেইগুলিই রাফে করা যেতে পারে। এর জন্য একটি আলাদা কাগজ ব্যবহার করা যেতে পারে। আবার যে পৃষ্ঠাতে অঙ্কটি পরিষ্কার ভাবে লেখা হবে, সেই পৃষ্ঠার একদিকে মার্জিন ($1''$ বা $1\frac{1}{2}''$) রেখে তাতেও করা যেতে পারে। এতে পরিষ্কার-পরিচ্ছন্নভাবে অঙ্ক করার অভ্যাস অর্জিত হবে, ভুল হবার সম্ভাবনাও অনেক কম হবে। অঙ্কটি হয়ে গেলে উত্তরটি ঠিক হয়েছে কি না, তা প্রতিটি স্তর পরীক্ষা করে দেখতে হবে।

(ঙ) **গণিতে পঞ্চম-নিয়ম—সাধারণ জ্ঞান (Fifth rule in Arithmetic—Common Sense)**:—গণিতের মূল নিয়ম হল চারটি—যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ। ছাত্ররা যান্ত্রিকভাবেই নিয়মগুলি শিখে থাকে। আবার অনেক ক্ষেত্রে তারা নিয়মগুলি অন্তর্দৃষ্টির সাহায্যে শেখে বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতেও পারে। কিন্তু কখন কোন্ পরিস্থিতিতে কোন্ নিয়মটি প্রয়োগ করতে হবে, তা ঠিক করার জন্য ছাত্রকে তার সাধারণ জ্ঞানের সাহায্য নিতে হবে। তা ছাড়া কোন একটি অঙ্ক করতে গেলে একটি স্তরের পর অপর কোন্ স্তরটি আসবে তো জানা না থাকলে সঠিক সমাধানে কিছুতেই পৌছানো যাবে না। আবার সমস্যাগুলিও সব এক জাতীয় হয় না। কেবলমাত্র যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ করার পদ্ধতিগুলি জানা থাকলেই সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়। তার উপর আর একটি জিনিস প্রয়োগ করতে হয়—আর সেটি হল সাধারণ জ্ঞান।

ছাত্রকে ঠিকমত গণিত শিক্ষা দিতে হলে কেবলমাত্র সংখ্যাজ্ঞান ও কয়েকটি মূলনীতি শেখানোই যথেষ্ট নয়। ভবিষ্যৎ জীবনে সে যাতে সার্থক ভাবে গণিত প্রয়োগ করতে পারে—সে বিষয়েও তাকে শিক্ষা দিতে হবে। গণিত সম্বন্ধে, তার সঠিক

পদ্ধতি সম্বন্ধে একবার জ্ঞান আহরণ করতে পারলে ভবিষ্যতে আর কোন অসুবিধা হবার সম্ভাবনা থাকে না।

গণিতে দক্ষতা অর্জন করতে হলে সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগ অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। সেই জন্য ছাত্রদের জ্ঞানের পরিধি এবং তার প্রয়োগ ক্ষমতা যাতে বৃদ্ধি পায় তার ব্যবস্থা করতে হবে। ছাত্ররা যে সমস্ত সমস্যার সঙ্গে পরিচিত, তার থেকে কিছু পৃথক কতকগুলি সমস্যা তাদের সামনে উপস্থাপিত করা যেতে পারে। এগুলির সমাধান করতে গিয়ে ছাত্রকে তার সাধারণ জ্ঞান প্রয়োগ করতেই হবে। তাছাড়া কতকগুলি সমাধানের ক্ষেত্রে ছাত্রদের কয়েকটি ভুল ধারণা থেকে যায়। সেগুলি সাধারণ জ্ঞানের সাহায্যে শুদ্ধ করে দেওয়া যেতে পারে। একটা উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। অধিকাংশ ছাত্রের ধারণা থাকে—যে সমস্ত সমস্যাতে বিভিন্ন সংখ্যা এবং পরিমাণ থাকে, যেগুলির একটিতে কোন পরিবর্তন হলে অপরগুলিতেও পরিবর্তন হয়—সেই সমস্ত সমস্যাগুলির ঐকিক নিয়মে সমাধান করা সম্ভব। কিন্তু এ ধারণা ভুল। ধরা যাক, একটি সমস্যা হল—যে-ঘড়িতে 6 টার ঘণ্টা বাজতে 6 সেকেণ্ড সময় লাগে, সেই ঘড়িতে 12 টার ঘণ্টা বাজতে কত সেকেণ্ড সময় লাগবে? এ সমস্যার সমাধান সরাসরি ঐকিক নিয়মে করা সম্ভব নয়। এ রকম বিভিন্ন ভুল ধারণা থাকা সম্ভব, যার তালিকা দিতে গেলে সেটি অত্যন্ত দীর্ঘ হয়ে যাবে। মোট কথা হল এই যে-গণিতের সমস্যা সমাধানের আগে সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগ করে দেখে নিতে হবে কোন্ পদ্ধতিতে অগ্রসর হতে হবে। গণিতের মূল চারটি নিয়মের মতো সাধারণ জ্ঞানের প্রয়োগটিও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বলেই এটিকে গণিতের পঞ্চম নিয়ম বলা হয়।

বিভিন্ন একক সম্বন্ধে আলোচনা :—গণিতে আমরা বিভিন্ন একক ব্যবহার করে থাকি। ছাত্রদিগকেও এই সমস্ত একক সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া হয়ে থাকে। বিভিন্ন একক সম্বন্ধে ধারণা দেওয়ার সঙ্গে সঙ্গে কেমন করে ও কিভাবে সেই এককগুলি ব্যবহার আরম্ভ হয়েছে—সে সম্বন্ধে যদি আলোচনা করা যায়, তবে ছাত্ররা আগ্রহ বোধ করবে এবং তাদের কৌতূহল প্রবৃত্তিটিও কিছু পরিমাণে মেটানো সম্ভব হবে। কতকগুলি একক সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করা হল। প্রথমেই ধরা যাক সময়ের একক। সময়ের একক বিভিন্ন, যেমন—ঘণ্টা, দিন, সপ্তাহ, পক্ষ, মাস, বৎসর প্রভৃতি। একক নির্ধারণের ক্ষেত্রে অনেক সময় ধর্মীয় অনুশাসনের প্রভাব লক্ষ্য করা যায়। প্রত্যেক ধর্মেই দেখা যায়, সারা বৎসরে কতকগুলি ধর্মীয় অনুষ্ঠানের ব্যবস্থা অনেক প্রাচীন কাল থেকেই চলে আসছে। এই অনুষ্ঠানসূচী অবশ্য প্রস্তুত করতেন পুরোহিত ও জ্যোতিষিগণ। তাঁরা আকাশে বিভিন্ন নক্ষত্রের অবস্থান লক্ষ্য করে দিনগুলি স্থির করতেন। এই অনুষ্ঠানসূচী জানবার জন্য সকলে পঞ্জিকার প্রয়োজন অনুভব করতে লাগল। এখন পঞ্জিকার আধুনিকতম সংস্করণ ক্যালেণ্ডার প্রায় প্রত্যেক বাড়ীর দেওয়ালের শোভা বর্ধন করছে। রোমানরা ক্যালেণ্ডার কথাটি ব্যবহার করত কেবলমাত্র ছুটির দিনের তালিকা তৈরী করার জন্য।

সময়ের একটি মূল্যবান একক হল দিন। প্রত্যেক দেশেই সময়কে দিন হিসাবে ভাগ করা হয়েছে। তবে দিনের মাপ সব দেশে এক নয়। এই মাপটিও বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন ভাবে ধরা হয়। কোন কোন দেশে সূর্য একবার ঠিক মাথার উপর আসার পর আবার যখন মাথার উপর আসে এর মাঝের সময়কে দিন বলে ধরে নেওয়া হয়। তবে এই সময়টা বৎসরের সকল সময় একরকম হয় না। ঋতুর তারতম্যের সঙ্গে সঙ্গে সময়ও ছোট-বড় হয়। তবে এক বছরের সমস্ত সৌর দিবসের গড় নির্ণয় করে দেখা গেছে গড়ে ১ দিন ২৪ ঘণ্টার মতো হয়। কিন্তু দিন সুরু হবে কখন এ নিয়ে বিভিন্ন দেশে মতভেদ আছে। ব্যাবিলনিয়ানরা সূর্য ওঠার সঙ্গে দিনের আরম্ভ ঠিক করতেন। রোমান, ইহুদী, এথেনিয়ান প্রভৃতি অনেকে সূর্যাস্তের সময় থেকে দিনের আরম্ভ ধরতেন। এখনও পাশ্চাত্ত্য দেশগুলিতে মধ্যরাত্রি (রাত্রি ১২ টা বা Zero hour) থেকে দিনের আরম্ভ ধরা হয়। ভারতবর্ষে সূর্যোদয়ের সঙ্গে সঙ্গে দিনের আরম্ভ ধরা হয়।

এরপর সময়কে ভাগ করা হল মাস হিসাবে। মাস ভাগ করার ব্যাপারেও মতের এবং পদ্ধতির বিভিন্নতা দেখা গেল। এক অমাবস্যা থেকে আর এক অমাবস্যা পর্যন্ত বা এক পূর্ণিমা থেকে আর এক পূর্ণিমা পর্যন্ত সময়কে অনেক দেশে একমাস বলে ধরা হল। আবার কতকগুলি স্থির নক্ষত্রের সঙ্গে সম্পর্ক রেখে লক্ষ্য রাখা হল—চন্দ্র পৃথিবীর চারিদিকে ঘুরে আসতে কত সময় নেয়। এই সময়কেও একমাস (চান্দ্র মাস) ধরা হল। এতে ২৮ দিনে এক মাস হ'ত। আবার কোন কোন দেশে সূর্য ও চন্দ্র একই রেখায় অবস্থিত হওয়ার পর আবার সেইস্থানে ফিরে আসার জন্য যে সময় লাগে, সেই সময়টিকে একমাস বলে ধরা হ'ত। এতে একমাস হ'ত প্রায় ২৯$\frac{1}{2}$ দিনে। তবে সুবিধার জন্য মাসগুলি ৩০ দিনে ধরা হয়। অবশ্য সব মাস ৩০ দিনে হয় না। বঙ্গাব্দে কোন কোন মাস ৩২ দিন—আবার কোন মাস ২৮ দিনেও হয়। খ্রীষ্টাব্দে এক ফেব্রুয়ারী ছাড়া আর সব মাসই হয় ৩০, নয়তো ৩১ দিনে হয়। কেবল ফেব্রুয়ারী মাস ২৮ দিনে হয়, তাও আবার লিপ ইয়ার হলে ১ দিন বাড়ে।

মাসের পর এল বৎসরের হিসাব। তবে বৎসর ঠিক করতে অনেক দিন সময় লেগেছে। কোন একটি নক্ষত্রকে নির্দিষ্ট করে রেখে পৃথিবী সূর্যের চারিদিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আসতে কত সময় নিচ্ছে, তাই দেখে বৎসর ঠিক করা হল। এই সময়টি হল ৩৬৫$\frac{1}{4}$ দিন। এক মেষ সংক্রান্তি (Vernal Equinox) থেকে আর এক মেষ সংক্রান্তি পর্যন্ত সময়টিকে এক বৎসর বলে ধরা হয়েছিল। এই হল বৎসর ঠিক করার গোড়ার কথা।

বৎসর যে কবে থেকে গণনা করা সুরু হয়েছে সে নিয়ে মতবিরোধ আছে। খৃষ্ট ধর্মাবলম্বীরা যীশুখৃষ্টের জন্মের দিন থেকে বৎসর গণনা করেছেন। হিন্দুদের বৎসর গণনা শুরু হয়েছে কোনও একটি মেষ সংক্রান্তির পরের প্রথম অমাবস্যা থেকে। হিন্দুদের শকাব্দ বলে আর একটি বৎসর গণনা হয়। এটি সম্ভবতঃ কুষাণ রাজ কণিষ্কের শক-বিজয়ের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত। তাছাড়া লক্ষ্মণ সেনের রাজত্বকালে লক্ষ্মণ বঙ্গাব্দ বলে

আর এক প্রকার বৎসর গণনার প্রথা প্রচলিত ছিল। মুসলমানদের দিন আরম্ভ হয় সূর্যাস্তের সঙ্গে সঙ্গে। তাদের বৎসর গণনা স্থরু হয় ৬২২ খৃষ্টাব্দের ১০ই জুলাই থেকে। কথিত আছে, সেইদিন হজরত মোহাম্মদ মক্কা থেকে মদিনায় চলে যান।

বৎসর ও মাস স্থির করার পর আরো স্থবিধার জন্য পক্ষ ও সপ্তাহে মাসগুলিকে ভাগ করা হয়। পূর্ণিমা ও অমাবস্যার মধ্যে সময়ের পার্থক্যকে পক্ষ বলে ধরা হয়। আবার চন্দ্রকলার হ্রাস-বৃদ্ধি দেখে সপ্তাহ-তিথি ইত্যাদি স্থির করা হয়। সময় নির্ণয়ের প্রাথমিক স্তরে মানুষকে জ্ঞান আহরণ করতে হয় প্রাকৃতিক ঘটনাবলীর সাহায্যে। এর জন্য অবশ্য তাকে অত্যন্ত সতর্ক ভাবে বিভিন্ন ঘটনা পর্যবেক্ষণ করতে হয়েছিল। বীজ থেকে গাছ হওয়া, পালিত জন্তুর সন্তান প্রসব হওয়া, নদীর জোয়ার-ভাঁটা, এক ঋতু থেকে আর এক ঋতুর পরিবর্তন প্রভৃতি বিভিন্ন ঘটনা থেকেই সে সময় সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করে।

দিনকে আবার ভাগ করা হল ঘণ্টা-মিনিট-সেকেণ্ডে। এ ভাগও কিন্তু একদিনে করা সম্ভব হয়নি। দিনকে ঘণ্টাতে ভাগ করতেই মানুষকে অত্যন্ত কষ্ট করতে হয়েছিল। প্রথম অবস্থাতে ঘণ্টা ঠিক করা হ'ত কোন একটা গাছের বা পাহাড়ের ছায়া দেখে। সূর্যের আকাশে অবস্থানের সঙ্গে সঙ্গে ছায়ার দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হ'ত। কিন্তু পরে দণ্ডের ছায়ার সাহায্যে ঘণ্টা ঠিক করা হ'ত। মাটির উপর দণ্ডটি খাড়া ভাবে পুঁতে দেওয়া হ'ত। তারপর তার ছায়াটির গায়ে আড়াআড়ি ভাবে কতকগুলি দাগ টানা হ'ত। এর থেকেই সূর্যঘড়ির (Sun dial) সৃষ্টি। হুগলীর ইমামবাড়িতে এখনও একটি সূর্যঘড়ি আছে, যেটির সাহায্যে ঠিকভাবে সময় নির্ণয় করা সম্ভব। সকল দেশেই মোটামুটিভাবে দিন ও রাত্রিকে ১২ ঘণ্টা করে ধরা হয়েছে। এইভাবে দিন ও রাত্রিকে ১২ ভাগে ভাগ করার কারণ হল যে এর কতকগুলি সাধারণ ভগ্নাংশ (যেমন $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{৪}$, $\frac{১}{৬}$ প্রভৃতি) খুব সহজে নির্ণয় করা যায়।

দিনের বেলাতে সূর্যের আলোতে ছায়ার সাহায্যে সময় হিসাব করা হ'ত কিন্তু রাত্রে তো আর সূর্য থাকে না। কাজেই রাত্রে ছায়ার সাহায্যে সময় হিসাব করা সম্ভব হ'ত না। আবার মেঘলা দিনে যখন সূর্য উঠত না তখনও সময় হিসাব করা কঠিন হ'ত। তখন সময় হিসাব করা হ'ত মোমবাতির সাহায্যে। কতটা সময় অতিক্রান্ত হল তা ঠিক করা হত কতখানি মোমবাতি পুড়েছে, তা দেখে। আবার চীনদেশে ধূপকাঠির সাহায্যে সময় ঠিক করা হ'ত। পরবর্তীকালে জলঘড়ি ও বালু-ঘড়ির সাহায্যে সময় ঠিক করা হ'ত। অবশ্য প্রথম অবস্থাতে সময় ঠিক করার কাজটা করতেন পুরোহিত ও ধর্মযাজকেরা। কারণ তাঁরাই ছিলেন সে যুগের শিক্ষিত সম্প্রদায়। ছায়া-কাঠি, জলঘড়ি ও বালুঘড়ি থেকে সময় ঠিক করে গির্জার ঘণ্টা বাজানো হ'ত। ইংরেজী clock শব্দটি celtic শব্দ থেকে এসেছে বলে অনেকে মনে করেন, কারণ celtic শব্দটির অর্থ হল ঘণ্টা। আবার ফরাসী cloche শব্দটির অর্থও হল ঘণ্টা। বর্তমান যুগের যান্ত্রিক ঘড়ি আবিষ্কারের আগে রোমানরা wheel clock ব্যবহার করতেন। অনেকগুলি চাকা একত্রিত করে ঘড়ি চালানোর পদ্ধতি মধ্যযুগেও লক্ষ্য

করা যায়। প্রথম যান্ত্রিক ঘড়ি আবিষ্কৃত হয় জার্মানীতে ১৩৭৯ খৃষ্টাব্দে, আর এই আবিষ্কার করেন Heinrich De Dick।

পৃথিবীর প্রায় সবদেশেই প্রথম অবস্থাতে দৈর্ঘ্য মাপ করা হ'ত শরীরের কোন অঙ্গের মাপের সাহায্যে। মিশর, ব্যাবিলন প্রভৃতি দেশে মাপ করা হ'ত হাত দিয়ে, গ্রীস, রোমে পা দিয়ে, আঙ্গুল দিয়ে, হাতের তালু দিয়ে। এখনও কোন কোন জায়গায় এ রকম পদ্ধতিতে মাপ করার ব্যবস্থা প্রচলিত আছে। ইংল্যাণ্ডে দৈর্ঘ্য মাপ করা হ'ত আঙ্গুল দিয়ে। মুখের থেকে আঙ্গুলের ডগা পর্যন্ত দূরত্বকে ধরা হত এক গজ। ইংরেজী yard কথাটি সম্ভবতঃ Gyrd কথা থেকে এসেছে, যার অর্থ হল লাঠি বা ছড়ি। মুখ থেকে আঙ্গুলের ডগা পর্যন্ত মাপ ভিন্ন ভিন্ন লোকের ক্ষেত্রে ভিন্ন হ'ত। একটা প্রামাণ্য মাপ ঠিক করবার জন্য ইংল্যাণ্ডের রাজা প্রথম হেনরীর মুখের থেকে হাতের আঙ্গুলের ডগা পর্যন্ত মাপ নিয়ে একটি ছড়ি মাপা হল এবং আইন করে ঠিক করা হল যে ঐ মাপটিই হবে গজের প্রামাণ্য মাপ। সেই ছড়িটি এখনও ইংল্যাণ্ডের এক যাদুঘরে রাখা আছে। দোকানে যে গজকাঠি দেখতে পাওয়া যায় তা ঐ মাপের।

ওজন মাপ করা হ'ত বিভিন্ন শস্যের ওজনের মাপ ধরে। আমাদের দেশে ধান, যব, কুঁচফল প্রভৃতির সাহায্যে ওজন নির্ণয় করা হ'ত। মুদ্রার পরিমাপ এসেছে কিন্তু অনেক পরে। প্রথম অবস্থাতে মুদ্রা পরিমাপ করার কোন প্রয়োজনই হ'ত না, কারণ তখন জিনিসের মূল্য দেওয়া হ'ত অন্য জিনিসের পরিবর্তে (Barter System)। তার পর কড়ির সাহায্যে কেনা বেচার কাজ সুরু হল। পরে যখন তামা, রূপা ইত্যাদি ধাতুর প্রচলন সুরু হল তখন বিভিন্ন জাতীয় মুদ্রার প্রচলন সুরু হয়।

এইভাবে ছাত্রদের বিভিন্ন একক সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করতে সাহায্য করা যেতে পারে।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. Give a detailed description of the teaching of four fundamental rules of Arithmetic.

2. How will you teach the following topics of Arithmetic :

    (i) Fractions (ii) Unitary Method (iii) Percentage (iv) Profit and loss

    (v) Extraction of Square root by method of Successive division.

3. Write Pedagogical notes on concept of Number.

4. Discuss the respective roles of Unitary method and Ratio method in Arithmetic.

দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগণিত শিক্ষার উদ্দেশ্য ও পদ্ধতি

(Aims and Methods of Teaching Algebra)

বীজগণিতের প্রতিশব্দ 'algebra' কথাটির উৎপত্তি আরব দেশে। 'al' শব্দাংশটি আরবী শব্দাংশ এবং অনেক আরবী শব্দেও এই শব্দাংশটির প্রয়োগ দেখা যায়, যেমন—Alchemy (Chemistry), Alcohol ইত্যাদি। হিন্দুদের ভিতর ভাস্কর (১১৫০ খ্রীঃ) প্রথম সাধারণ অঙ্কের অন্য নাম দিয়েছিলেন 'বীজগণিত' অর্থাৎ বীজের গণনা বা মূল অথবা মৌলিক সংখ্যার গণনা। বর্তমানে Algebra বলতে যা বোঝা যায়, তার নাম ছিল অব্যক্ত গণিত। বীজগণিতে জানা সংখ্যা নিয়েই গণনা করা হয়, কিন্তু অব্যক্ত গণিতে অজানা সংখ্যা সম্বন্ধে গণনা করা হ'ত।

Algebra শব্দটির উল্লেখ আরব দেশের আব্ খোরীজিমি (৮২৫ খ্রীঃ) নামক একজন গণিতজ্ঞের লেখায় পাওয়া যায়। শব্দটি সম্ভবতঃ Aljebral-muqabulah শব্দের অপভ্রংশ। ১৬০০ খ্রীষ্টাব্দে ইংরেজদের মধ্যেও শব্দটির ব্যবহার দেখা যায়। শেষ পর্যন্ত উচ্চারণের ও লেখার সুবিধার জন্য শব্দটি ছোট করে করা হয় Algebra। সেই সময়কার একটি পুস্তকে Algebra সম্বন্ধে বলা হয়েছে—

"Cancel minus terms and then
Restore to make your Algebra
Combine your homogeneous terms and
This is called Muqabulah."

Al-jabr শব্দটির অর্থ হল ঋণাত্মক রাশির পার্শ্ব পরিবর্তন। Muqabulah শব্দটির অর্থ হল ধনাত্মক রাশির পার্শ্ব পরিবর্তন ও সরল করা। তাহলে সমস্ত অর্থটি দাঁড়াল এই রকম :—সমীকরণের এক দিক থেকে অপর দিকে কোন রাশির পার্শ্বান্তরিত করণ, তার চিহ্নের পরিবর্তন এবং সমীকরণের উভয় দিক থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করণ।

জ্যোতির্বিদ্যা ও যন্ত্রবিজ্ঞানের নানাবিধ সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে গণনা ও তার সঙ্গে বীজগণিতের সৃষ্টি হয়েছে। গ্রীক ও হিন্দুরা যে গণিত বা বীজগণিত ব্যবহার করতেন তা বর্তমানের থেকে অনেকাংশেই ভিন্ন ছিল। তাঁরা কতকগুলি নিয়ম অনুসরণ করে গণনা করতেন আর কতক ক্ষেত্রে সমস্যা সমাধান করতেন। কিন্তু এই সমস্যা সমাধানে তাঁরা কোন বিমূর্ত সংখ্যা ব্যবহার করতেন না। বিমূর্ত সংখ্যার ব্যবহার ও সাংকেতিক প্রতীকের ব্যবহার খুব ধীরে ধীরে সুরু হয়েছে; অবশ্য সাঙ্কেতিক প্রতীকের প্রচলনের ক্ষেত্রে বিভিন্ন মতবাদের অবতারণা করা হয়েছিল।

প্রথমে যখন নিয়ম ও সমস্যাগুলি পুরোপুরি ভাষাতেই লেখা হ'ত, তখন তাকে বলা হ'ত Rhetoric Algebra বা আড়ম্বরপূর্ণ ভাষার বীজগণিত। পরে যখন প্রতীক চিহ্ন ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করা হ'ত তখন তাকে বলা হ'ত Symbolic Algebra। পাটীগণিতের মতো বীজগণিতও সংখ্যার বিজ্ঞান। কিন্তু কিছুটা পার্থক্য আছে দু'টির মধ্যে। পাটীগণিতে যে ভাবে সংখ্যাগুলি লেখা হয়, বীজগণিতে সেভাবে হয় না। বীজগণিতে সংখ্যার বদলে বর্ণ বা অক্ষর (letters) ব্যবহার করা হয়। যতদূর জানা গেছে, তাতে মনে হয় হিন্দুরাই বীজগণিত শাস্ত্রের উদ্ভাবক। ৫২৫ খ্রীষ্টাব্দে আর্যভট্ট সর্বপ্রথম বীজগণিত প্রণয়ন করেন। তারপর ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য প্রভৃতি গণিতবিদেরা এই শাস্ত্রের প্রভূত উন্নতি করেন। দ্বাদশ শতাব্দীর মধ্যভাগে ভাস্করাচার্য দুই প্রকার গণিতের উল্লেখ করেন—ব্যক্ত ও অব্যক্ত।

"দ্বিবিধগণিতমুক্তং ব্যক্তমব্যক্তং সংজ্ঞং।
ব্যক্তং পাটীগণিতমব্যক্তং বীজগণিতং ॥"

তাঁর মতে পাটীগণিত ব্যক্ত গণিত ও বীজগণিত অব্যক্ত গণিত।

পরিমাণগত সম্বন্ধ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রতীক ব্যবহারের সাহায্যে বীজগণিত একটি নূতন দিগন্ত বিস্তৃত করেছে। সমস্যার উপর গুরুত্ব না দিয়ে বীজগণিত সমস্যা সমাধানের প্রক্রিয়ার উপর বেশী গুরুত্ব দিয়ে থাকে। পাটীগণিতের মতো বীজগণিতও যে সংখ্যার বিজ্ঞান, সে কথা আগেই বলা হয়েছে। পাটিগণিত ও বীজগণিতের মধ্যে সীমারেখা নির্ণয় করা খুবই কঠিন ব্যাপার। আবার বীজগণিতের সঙ্গে জ্যামিতির সম্বন্ধও অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ। বীজগণিতকে বলা হয় সামান্যীকৃত অঙ্ক (generalised arithmetic); অর্থাৎ অনেকগুলি অঙ্কের সমাধান করার পর যখন একটি সাধারণ নিয়মে উপনীত হওয়া যায়, তখনই বীজগণিত এসে যায়। তেমনি বীজগণিতকে লিখিত জ্যামিতি (written geometry) এবং জ্যামিতিকে চিত্রিত বীজগণিত (Pictured algebra) বলা হয়।

গোড়ার কথা চিন্তা করলে দেখা যায়, পাটীগণিত থেকেই বীজগণিতের উৎপত্তি। পাটীগণিতে সাধারণতঃ দু'টি ভিন্ন জাতীয় চিন্তাধারা যুক্ত করা হয়। চিন্তাধারা দু'টি হল—(১) কোন একটি পরিস্থিতি পর্যালোচনা করে কি করা উচিত, তা নির্ণয় করা এবং (২) কি করা উচিত, তা নির্ণয় করার পর সেইভাবে কাজ করা। বীজগণিতে সচরাচর প্রথম চিন্তাধারাটি প্রয়োগ করা হয়। পাটীগণিত ও বীজগণিতকে একই বিষয় বলা যেতে পারে—তবে তা বিভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গী ও মনোভাব নিয়ে দেখার বিষয়। একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টি বোঝানো যাক।

ধরা যাক, ছাত্রকে ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। তাকে প্রথমে বুঝিয়ে দেওয়া হল যে কোন একটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হল সেই ক্ষেত্রে যত বর্গ একক পরিমাণ স্থান থাকে, তাই। এই বর্গ এককটি বিভিন্ন হতে পারে। এরপর ছাত্রকে একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে দেওয়া চলতে পারে। বর্গক্ষেত্রটিকে কয়েকটি সমান ভাগে ভাগ করে ছাত্র তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবে। তেমনি আয়তক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে গিয়ে ছাত্র ছবি এঁকে ও সমান সমান ঘর কেটে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে। এইভাবে ছবি এঁকে কয়েকটি সমস্যা সমাধান করার পর ছাত্র নিজেই বুঝতে পারবে যে ছবি আঁকার আর কোন প্রয়োজন নেই। সে একটি নিয়ম খুঁজে পেয়ে যাবে এবং ছবি না এঁকেই সেই নিয়মের সাহায্যে সে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে। যতক্ষণ ছাত্র সমস্যাগুলির সমাধান করে যাচ্ছে, ততক্ষণ সে পাটীগণিত ব্যবহার করছে। কিন্তু যখনই সমস্যা সমাধান করার পরিবর্তে সমাধান করার নিয়মটির দিকে তার মনোযোগ নিবদ্ধ হচ্ছে তখনই সে বীজগণিত ব্যবহার করছে। এই নিয়মের সাহায্যেই সে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে। এই ধরনের সব প্রশ্নই যখন একটি নিয়মের সাহায্যে করা যাবে তখনই তাকে বলা যেতে পারে সামান্যীকরণ (generalisation)।

বীজগণিতের ব্যবহারিক প্রয়োজনীয়তা যে অনেক বেশী তা বুঝতে পারা যায় যখন আমরা প্রতীকের ব্যবহার করে থাকি। কোন একটি বিষয় বা সিদ্ধান্তকে সংক্ষেপে প্রকাশ করতে হলে প্রতীক ব্যবহার করতে হয়। আবার ঠিক প্রতীকটি ব্যবহার করতে হলে বা প্রতীকের ভাষায় প্রকাশ করতে হলে বিষয়টির সঠিক বিশ্লেষণ করা দরকার। আবার সামান্যীকরণের ক্ষেত্রেও এই প্রতীক সাহায্য করে। একটি বিবৃতিকে বিভিন্ন কত ভাবে এবং বিভিন্ন কত ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব তা প্রতীকের সাহায্যেই বোঝা যায়। প্রতীক ব্যবহার করা না হলে অঙ্কের ধারাকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হলেও সে বিশ্লেষণ আর বেশীদূর অগ্রসর হতে পারত না। বীজগণিতের প্রধান অবদানই হল প্রতীক—যার সহায়তায় বিশ্লেষণের কাজটি সহজ হয় এবং ফলাফলটিও অত্যন্ত সংক্ষেপে প্রকাশ করা সম্ভব হয়। অবশ্য এই প্রতীক যে কেবলমাত্র বিদ্যালয়ের পাঠ্যতালিকাভুক্ত বীজগণিতে প্রয়োগ করা হয়, তা নয়। যখনই কোন না কোন ক্ষেত্রে কিছু তত্ত্ব ও তথ্য অনুসন্ধান করার প্রয়োজন হয়, তখনই কাজের সুবিধার জন্য বিশেষ একজাতীয় বীজগণিত ব্যবহার করা হয়। অর্থনীতি, পরিসংখ্যান ইত্যাদি বিভিন্ন বিষয়ে বিভিন্ন জাতীয় 'প্রতীকমূলক বীজগণিত' ব্যবহার করা হয়। তবে বিভিন্ন জাতীয় হলেও সব বীজগণিতেরই উদ্দেশ্য কিন্তু এক। যেখানে তত্ত্বের অনুসন্ধান ও তথ্যের প্রকাশে ভাষা একটি বাধা হয়ে দাঁড়ায়, সেখানেই বীজগণিত তার প্রতীকের সাহায্যে সেই বাধা দূর করার চেষ্টা করে। আড়ম্বরপূর্ণ ভাষা, বিভিন্ন জাতীয় শব্দ ইত্যাদির সাহায্যে যে ভাব প্রকাশ করা যায়, সেই ভাবটি সহজ, সরল, সুস্পষ্ট ও সংক্ষিপ্তভাবে প্রকাশ করা সম্ভব প্রতীকের সাহায্যে। অনেকে মনে করেন, বীজগণিতের প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে যে কোন সংখ্যার পরিবর্তে। কিন্তু এ ধারণা ভুল। প্রতীক হচ্ছে গাণিতিক বিবৃতি প্রকাশের সংক্ষিপ্ত উপায় (Shorthand)। আবার বীজগণিতের সাহায্যে যন্ত্র চালিতের মতো কঠিন গণনার কাজ এবং জটিল সমস্যার সমাধান করা সম্ভব। যে সমস্ত সমস্যাতে সংখ্যা, মাপ, পরিমাণ ইত্যাদি যুক্ত আছে, সেইখানেই বীজগণিতের সাহায্যে সহজে সমাধান করা সম্ভব। বীজগণিতকে যদি একটি যন্ত্র বলা যায়, তবে বলতে হয় গণনা এবং

হিসাবের ক্ষেত্রে এটি একটি নির্ভুল যন্ত্র। এ ছাড়া বীজগণিত সৃজনধর্মী (creative)। বীজগণিতের সঙ্গে সঙ্গে ঋণাত্মক সংখ্যা, কাল্পনিক সংখ্যা (imaginary numbers) ইত্যাদির উদ্ভব হয়েছে।

বীজগণিত শিক্ষা দেবার মূল উদ্দেশ্য হল ছাত্রদের গণিতের বিশ্লেষণ ও গাণিতিক বিবৃতি প্রকাশের শিক্ষা দেওয়া। প্রাথমিক স্তরে বীজগণিত শিক্ষা দেবার সময় দুটি বিষয়ের প্রতি বিশেষ ভাবে মনোযোগ দিতে হবে। **একটি হল**—সমস্যাটি বিশ্লেষণ করা, যাতে বিশ্লেষণ করার পর গাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োগ করা যেতে পারে এবং **দ্বিতীয়টি হল**—প্রাথমিক বিশ্লেষণের উপর ভিত্তি করে বিবৃতি (যুক্তি ইত্যাদি) প্রকাশ করা। কেবলমাত্র সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করলেই বীজগণিত শিক্ষায় কাজ শেষ হয়ে যায় না। বীজগণিতে মানসিক শিক্ষা বা চর্চা যে হয়, তা সত্য; কিন্তু তার থেকেও প্রয়োজনীয় জিনিস হচ্ছে যে বীজগণিত কৃষ্টিমূলক (Cultural) শিক্ষায় সাহায্য করে। সাধারণ ছাত্র হয়তো পরবর্তীকালে উচ্চস্তরের বীজগণিতের সমস্যার সমাধান করবে না বা সে কলবিদ্যা, ক্যালকুলাস ইত্যাদি পড়বে না। কিন্তু তার বোঝা দরকার যে এমন কতকগুলি বিবৃতি আছে, যেগুলি সব জায়গাতে প্রয়োগ করা চলতে পারে। এগুলিকে সাধারণ বিবৃতি বলা যেতে পারে এবং এগুলি সাধারণভাবে অনেক ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এইরূপ কোন বিবৃতি সাধারণভাবে দিতে হলে বীজগণিতের সাহায্য না নিয়ে কোন উপায় নাই। জীবনের বিভিন্ন স্তরে, বিভিন্ন পেশা এবং বৃত্তির ক্ষেত্রেও বীজগণিত প্রয়োগ করা হয়। ছাত্র কিছু করুক আর না করুক, এই বিষয়টির ব্যবহার ও প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে তার একটা প্রাথমিক ধারণা থাকা দরকার। তার অন্ততঃ এটুকু বোঝা উচিত যে বীজগণিত ছাড়া কোনও বৈজ্ঞানিক সত্যের সামান্যীকরণ সম্ভব নয়। এমন অনেক ক্ষেত্র আছে যেখানে বীজগণিত ছাড়া ভাবপ্রকাশ করা অত্যন্ত কঠিন হ'ত। যেমন Binomial Expansionটি প্রতীক ছাড়া কখনই প্রকাশ করা সম্ভব হ'ত না। ভাষার সাহায্যে প্রকাশ করতে গেলে তা অত্যন্ত জটিল ও কষ্টসাধ্য হ'ত। একমাত্র প্রতীকের সাহায্যেই ঐ সাধারণ বিবৃতিটি অত্যন্ত সহজভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। আবার সাধারণ ছাত্র যাতে গণিত চর্চার ফলে আনন্দ উপভোগ করতে পারে সে বিষয়েও লক্ষ্য রাখতে হবে। অভিজ্ঞতার মাধ্যমে যে ফল লাভ করা যায়, তাতে যদি আনন্দের উপকরণ না থাকে, তবে বিষয়টি অত্যন্ত নীরস হয়ে পড়ে। ছাত্ররা বীজগণিতের সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে সেই আনন্দের আসরে উপস্থিত হয়। এই আনন্দ যাতে চিরস্থায়ী হয়, সে ব্যবস্থাও করা প্রয়োজন। প্রথম অবস্থাতেই নানা-রকম প্রতীক ছাত্রের সামনে উপস্থিত করা কেবলমাত্র অপ্রয়োজনীয়ই নয়, ক্ষতিকরও। $+, -, \times, \div, \therefore, \because, =$ ইত্যাদি কতকগুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় প্রতীকের অর্থ এবং ব্যবহার তাকে পরিষ্কার ভাবে বুঝিয়ে দিলেই যথেষ্ট। তেমনি বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্রের মধ্যে যেটি সবচেয়ে প্রয়োজনীয়—$a(b+c)=ab+ac$, এই সূত্রটি বুঝতে হবে। তারপর $\surd$, log, sin ইত্যাদির প্রয়োগকৌশল এবং ব্যবহারের সীমা (limit) বুঝাতে হবে। এর জন্য চর্চার একান্ত প্রয়োজন। কিন্তু এই চর্চা যখন

একান্তই অপরিহার্য হয়ে পড়বে, কেবলমাত্র তখনই চর্চা করতে হবে। আবার যতটুকু চর্চা করা প্রয়োজন ঠিক ততটুকুই যেন করা হয়—তার বেশী যেন না হয়।

বীজগণিত কেন পড়ানো হবে ?—বীজগণিত কেন পড়ানো হবে এ প্রশ্নের উত্তর কেবলমাত্র একটি বক্তব্যের মধ্যে সীমাবদ্ধ নেই। বীজগণিত পাঠের মূল উদ্দেশ্যগুলিকে আমরা কয়েকটি ভাগে ভাগ করতে পারি। এর মধ্যে প্রধান প্রধান উদ্দেশ্যগুলি হল--

(১) গণিতের অন্যান্য শাখাতে বীজগণিতের প্রয়োগ,

(২) বীজগণিতের নিজস্ব ধারণাগুলির শিক্ষাগত মূল্য,

(৩) বীজগণিত শিক্ষার ফলে অন্যান্য ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন।

বীজগণিতে যে সমস্ত ধারণা অর্জন করলে অন্যান্য সব ক্ষেত্রেই সুফল পাওয়া যায় সেগুলি হল—

(ক) সমীকরণের সাহায্যে সমস্যার সমাধান। (খ) সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন এবং সূত্রের প্রয়োগ। (গ) আপেক্ষিক পরিবর্তন (Functionality)।

সমস্যার সমাধান :—বিশুদ্ধ গাণিতিক পদ্ধতি বলতে যা বুঝায়, সমীকরণের সাহায্যে কোন সমস্যার সমাধান করার পদ্ধতি তার থেকে সম্পূর্ণ পৃথক। এটি সম্পূর্ণ নূতন একটি পদ্ধতি এবং এর নতুনত্বের জন্য ছাত্ররা এতে যথেষ্ট আগ্রহ বোধ করে। এ ছাড়া পাটীগণিতের অনেক জটিল সমস্যার সমাধান এই পদ্ধতির সাহায্যে অত্যন্ত সহজে করা সম্ভব। পদ্ধতিটি ব্যবহারের ফলে সময়ও অনেক কম লাগে।

সামান্যীকরণ ও সূত্র প্রয়োগ :—সামান্যীকরণের ক্ষমতা অর্জন এবং সূত্র প্রয়োগ করার কৌশলটি আয়ত্ত করা—দু'টিই সমান গুরুত্বপূর্ণ। বিশেষ জাতীয় ঘটনা অনেক ঘটে থাকে এবং সেগুলি প্রকাশ করা হয় বিশেষ বিশেষ বিবৃতির মাধ্যমে। এই বিশেষ বিশেষ ঘটনা, বিবৃতি বা সূত্রগুলি সামান্যীকরণের মাধ্যমে সাধারণ ভাবে প্রকাশ করা হয়। যেমন—$3\times7=7\times3$, $5\times6=6\times5$। ভাষায় প্রকাশ করতে হলে বলতে হবে—যখন দু'টি রাশি গুণ করা হয়, তখন রাশিগুলি কি ভাবে সাজানো হচ্ছে তার উপর গুণফল নির্ভর করে না। 3 আর 7-কে যে ভাবেই সাজানো হোক না কেন, গুণফল সবসময় 21-ই হবে। বীজগণিতের ভাষায় সূত্র প্রয়োগ করে বলা যেতে পারে : $ab=ba$. বীজগণিতের সূত্র বা অভেদ হল ভাষার সংক্ষিপ্ততম রূপ। এর সাহায্যে চিন্তাধারাকে পরিমিত করা সম্ভব (economy of thought)। যে সমস্ত লোক দৈনন্দিন জীবনে গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ করে থাকেন, তাদের পক্ষে বীজগণিতের সূত্র প্রয়োগ করা অপরিহার্য।

আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় বা পরিবর্তন :—বীজগণিতের আর একটি গুরুত্বপূর্ণ কাজ হল আপেক্ষিক পরিবর্তন সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জনে সহায়তা করা। চাপ এবং আয়তনের মধ্যে একটা সম্বন্ধ আছে যেটাকে আমরা একটা চিত্রের আকারে মোটামুটি এইভাবে প্রকাশ করতে পারি :

চিত্রটি থেকে দেখা যাচ্ছে, চাপ যখন বেশী আয়তন তখন কম, আবার চাপ যখন কম, আয়তন তখন বেশী। এই চাপ ও আয়তনের মধ্যে একটা নির্দিষ্ট সম্পর্ক আছে

চা = চাপ
আ = আয়তন

যার জন্য একটিতে কোন পরিবর্তন হলে অপরটিতেও আপেক্ষিক একটা পরিবর্তন হবে। এই সম্বন্ধটি গাণিতিক এবং একে আপেক্ষিক সম্বন্ধ বা Functionality বলে। এই সম্বন্ধটিকে বীজগণিতের সূত্র PV = RT-র সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এখানে চাপ ও আয়তনকে বলা হয় চলক (variable)। একটি চলকের আর একটি চলকের সঙ্গে আপেক্ষিক একটা সম্বন্ধ থাকে (function)। দু'টি চলকের মধ্যে যে সম্বন্ধ, তা বিভিন্ন ভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে। কেবলমাত্র সূত্রের সাহায্যেই নয়, লেখচিত্র বা অন্যান্য চিত্রের সাহায্যেও এই সম্বন্ধটি প্রকাশ করা সম্ভব। লিখিত শব্দকে যেমন মৌখিক শব্দের চাক্ষুষ প্রতিরূপ বলা যায়, লেখচিত্রকেও তেমনি বীজগণিতের সূত্রের চাক্ষুষ প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। এই আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় করা যায় বীজগণিতের সাহায্যে ; পাটীগণিতের সাহায্যে তা প্রকাশ করা যায় না।

মানসিক দক্ষতা অর্জন : কোন সমস্যার সমাধান হয়ে গেলেই বীজগণিতের কাজ শেষ হয়ে যায় না। শিক্ষককে লক্ষ্য রাখতে হবে, সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্র যে দক্ষতা অর্জন করল, সেই দক্ষতা যেন ভবিষ্যৎ জীবনেও কাজে লাগে। কোন একটি বিশেষ সমস্যার সমাধান করার ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন করানোই যেন শিক্ষকের উদ্দেশ্য না হয় ; জীবনের বিভিন্ন ও বিচিত্র সমস্যাবলীর সমাধানেও যেন সে অনুরূপ দক্ষতা অর্জন করতে পারে সেদিকেও তাঁর বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে।

বীজগণিতের কাজ :—বীজগণিতের কাজ তাঁর উদ্দেশ্যগুলির মধ্যেই নিহিত আছে। তবুও আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা বীজগণিতের কাজগুলিকে কয়েকটি সুনির্দিষ্ট ভাগে ভাগ করতে পারি। সেগুলি হল :—

১। পাটীগণিতের তত্ত্বমূলক পদ্ধতির সম্প্রসারণ এবং সেগুলির ভিত্তি সুদৃঢ় করা।

২। গণনা বা হিসাব সংক্রান্ত ব্যাপারে ছাত্রের দক্ষতা বৃদ্ধি করা। সেই সঙ্গে ছাত্রের অভ্যাসের ভিত্তিটিও দৃঢ় করা।

৩। সমীকরণ পদ্ধতিটি উন্নততর করা এবং সমীকরণের সাহায্যে পাটীগণিত, জ্যামিতি, পদার্থ বিদ্যা ইত্যাদি বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত বিভিন্ন বিষয়ের সমাধান করা।

৪। স্কুলের পাঠ শেষ করার পর ছাত্র যদি গণিত সম্বন্ধে শিক্ষা অর্জন করতে চায়, তবে তার ভিত্তি সুদৃঢ় করা এবং অন্যান্য বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে প্রয়োজনবোধে বীজগণিতের নীতি প্রয়োগ করা।

৫। সংক্ষিপ্ত ভাষা ও প্রতীকের সাহায্যে বিমূর্ত বিষয় শিক্ষণের উন্নততর ব্যবস্থা করা।

৬। মানসিক উন্নতিবিধানের যন্ত্র হিসাবে পরিগণিত হওয়া।

৭। বিজ্ঞানের সত্য ঘটনাগুলিকে সামান্যীকরণের মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত অথচ পূর্ণাঙ্গ সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা।

বীজগণিত কখন শুরু করা যেতে পারে :—বীজগণিত কখন শুরু করা যেতে পারে, সে বিষয়ে নির্দিষ্ট কোন বয়স বা স্তর নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তবে একথা বলা যেতে পারে যে পাটীগণিত শিক্ষার সঙ্গে সঙ্গেই বীজগণিতের শিক্ষা চলবে। কিন্তু বীজগণিতকে যখন গণিতের একটি পৃথক পূর্ণাঙ্গ বিষয় হিসাবে ধরা রয়েছে তখন এর নিয়ম মাফিক (formal) পাঠ শুরু করাও প্রয়োজন। পাটীগণিত পাঠের মাধ্যমে বীজগণিত সম্বন্ধে পরোক্ষভাবে (informal) শিক্ষা দেওয়া হয়ে থাকে। এতে ছাত্রদিগকে সংক্ষিপ্তভাবে ভাষায় প্রকাশ করা বা বীজগণিতের ভাষা সম্বন্ধে একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। এইভাবে অনুপাত, সমানুপাত, সরল সুদকষা, শতকরা হিসাব, বর্গ, বর্গমূল প্রভৃতি সম্বন্ধে শিক্ষা দেবার সময় বীজগণিতের সমীকরণ, ঘাত প্রভৃতি সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। ঋণাত্মক রাশি ব্যবহার না করেও পাটীগণিতে বীজগণিতের সমস্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জনে ছাত্রদের সাহায্য করা যেতে পারে। যেমন—একটি বস্তাতে A কুইন্টাল চাল আছে। অপরটিতে B কুইন্টাল। দু'টি বস্তাতে মোট কত চাল আছে? একটি বর্গাকৃতি ঘরের দৈর্ঘ্য P ফুট হলে ক্ষেত্রফল কত? এ জাতীয় সমস্যা সংখ্যাসূচক মানের সাহায্যেও প্রকাশ করা যায়। এইভাবে ছাত্র যখন সংখ্যা সম্বন্ধে এবং সংখ্যার বদলে অক্ষরের ব্যবহার সম্বন্ধে একটা ধারণা অর্জন করতে পারবে এবং তখন তার পক্ষে নিয়মানুগ পদ্ধতিতে বীজগণিতে শিক্ষা গ্রহণ করার পক্ষে আর কোনরকম অসুবিধাই থাকবে না। এই নিয়মানুগ পদ্ধতিতে শিক্ষাদানের কাজটি ছাত্রের ১০-১১ বৎসর বয়সে শুরু করা যেতে পারে। অবশ্য বীজগণিতে সাফল্য প্রথমদিকে নির্ভর করে ছাত্র কিভাবে পাটীগণিত সম্বন্ধে শিক্ষা গ্রহণ করেছে এবং কতটা শিক্ষা গ্রহণ করেছে তার উপর। আবার এ কথাও জোর করে বলা যেতে পারে না যে বীজগণিতে বেশ দক্ষতা অর্জন করলে তা পাটীগণিত শিক্ষার সহায়ক হবে। প্রতি ক্ষেত্রেই ছাত্রের একটা প্রাথমিক জ্ঞান ও আগ্রহবোধ থাকা প্রয়োজন। বীজগণিত শিক্ষা দেবার প্রাথমিক স্তরগুলি প্রায়ই খারাপ পদ্ধতির জন্য অত্যন্ত দীর্ঘ ও অপ্রয়োজনীয় হয়ে পড়ে। এইজন্যই ঐ স্তরে পূর্বজ্ঞানের এবং বাস্তব জ্ঞানের উপর ভিত্তি করে সহজ সমীকরণ ও সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে অগ্রসর হলে সুফল পাওয়া যায়। এই স্তরে শিক্ষণীয় বিষয়টি যেন অনাবশ্যক তত্ত্বে ও তথ্যে ভারাক্রান্ত হয়ে না উঠে।

বীজগণিতের পাঠক্রমে যেগুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় ও একান্ত অপরিহার্য, সেগুলি হল :—

(ক) সূত্র নির্ণয় ও তার ব্যবহার। (খ) লেখচিত্র অঙ্কন ও তার ব্যবহার। (গ) দিক্‌-নির্দেশক সংখ্যা (Directed Numbers)। (ঘ) লগারিদ্‌ম-এর তথ্য ও তার ব্যবহার। (ঙ) আপেক্ষিক সম্বন্ধ নির্ণয় (Functionality) ও সামান্যীকরণ (Generalisation)।

বীজগণিত শিক্ষার কয়েকটি মূল নীতি :—

১। বীজগণিতের পাঠক্রমটি এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে, যাতে বীজগণিত শিক্ষার লক্ষ্যে উপনীত হতে পারা যায়। এর জন্য পাঠক্রমটি থেকে সবরকম অপ্রয়োজনীয় বিমূর্ত ও সম্পূর্ণ যান্ত্রিক বিষয়গুলি বাদ দিতে হবে।

২। বীজগণিতের পাঠক্রমটি কেবলমাত্র তথ্য ভারাক্রান্ত হলে চলবে না। নীরস তথ্য অনেক ছাত্রই হৃদয়ঙ্গম করতে পারে না। কাজেই বীজগণিতের পাঠক্রমে যতদূর সম্ভব কম তথ্য থাকবে।

৩। পাঠক্রমে সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে যেগুলি চর্চার ফলে বিচারশক্তির বিকাশ হয়। প্রাথমিক বীজগণিত শিক্ষা যেন অত্যন্ত যান্ত্রিক না হয়, বরং যাতে চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তির উন্মেষ ও বিকাশ হয়, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

৪। বীজগণিতের ব্যবহারিক দিকটির দিকেও বেশী করে নজর দিতে হবে। বিভিন্ন বিষয়ে বীজগণিতের নীতিগুলি প্রয়োগ করা হয়। যে সমস্ত অধ্যায়গুলি জ্যামিতি, পাটীগণিত বা অন্যান্য বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে প্রায়ই প্রয়োগ করা হয়, সেগুলির ব্যবহারিক মূল্যের জন্যই তাদের উপর অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৫। যে সমস্ত অধ্যায় কেবলমাত্র উচ্চতর শিক্ষার জন্য প্রয়োজন, সে সমস্ত অধ্যায় বাদ দেওয়া চলতে পারে।

সংক্ষেপে বলা যেতে পারে, বীজগণিতের পাঠক্রমে এমন বিষয়ই অন্তর্ভুক্ত করা হবে, যেগুলি প্রয়োজনীয়, চিত্তাকর্ষক এবং সেই সঙ্গে চিন্তাশক্তির উদ্বোধক।

বীজগণিত শিক্ষাদানে ত্রুটী :—বীজগণিতের অনেক সুবিধা থাকলেও এর শিক্ষাদানে কতকগুলি ত্রুটী লক্ষ্য করা যায়। যে জিনিসটি প্রায়ই লক্ষ্য করা যায়, তা হল—ছাত্ররা অত্যন্ত যান্ত্রিক ভাবেই বীজগণিতের সমস্যাগুলির সমাধান করে যায়। এগুলির আভ্যন্তরীণ অর্থ তারা যেন বুঝতেই চায় না। অবশ্য এই ত্রুটী দূর করা সম্ভব। কোন একটি সূত্র ব্যাখ্যা করার পরই সেই সূত্র প্রয়োগ করে কতকগুলি সমস্যার সমাধান ছাত্রদের করতে হবে। এই সমস্যাগুলি বীজগণিতের ক্ষেত্র থেকেই যে নিতে হবে এমন কোন কথা নেই। মাঝে মাঝে পাটীগণিত থেকে সমস্যা নির্বাচন করলে বৈচিত্র্যহীনতা দূর হয়। ছাত্ররা যাতে প্রতীকের অর্থ বেশ ভালোভাবে বুঝতে পারে সেদিকেও বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে। এ ছাড়া আর যে সমস্ত ত্রুটী বা অসুবিধা দেখা দেয়, সেগুলি দূর করতে হলে কতকগুলি নিয়ম মেনে চলতে হবে। এগুলির মধ্যে অত্যন্ত প্রয়োজনীয় এমন কয়েকটি নিয়মের উল্লেখ করা হল।

১। অযথা বড় বড় অঙ্ক কম করতে হবে। অপ্রয়োজনীয়, দীর্ঘ ও অবাস্তব অঙ্ক পাঠক্রম থেকে বাদ দিতে হবে।

২। যে সমস্ত অধ্যায়ের পাঠের ফলে মৌলিক চিন্তা করার ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়, সেই সেই সমস্ত অধ্যায়ের উপর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৩। যে সমস্ত অধ্যায় প্রায়ই গণিতের অন্য শাখাতে অথবা অন্য বিষয়ে ব্যবহৃত হয়, সেগুলির উপর অধিকতর গুরুত্ব আরোপ করতে হবে।

৪। ছাত্রের বোধগম্য হবে না—এমন অধ্যায় বা যে অধ্যায়ে 'যুক্তিযুক্ত রীতি' অনুসৃত হয়নি, সে রকম অধ্যায় পাঠক্রম থেকে বাদ দিতে হবে। পাটীগণিত সম্বন্ধে প্রয়োজনীয় জ্ঞান অর্জন করার আগেই বীজগণিত শিক্ষা দেওয়া যেমন ক্ষতিকর, বীজগণিত সম্বন্ধে স্বল্পজ্ঞান লাভ করার আগেই বীজগণিত সম্বন্ধে জটিলতর শিক্ষা দেওয়া তেমনি ক্ষতিকর।

৫। যে সমস্ত পদ্ধতি বীজগণিতে একান্ত প্রয়োজনীয় বা যেগুলি প্রায়ই প্রয়োগ করতে হয়, সেই সমস্ত পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি করা আবশ্যক। পদ্ধতিগুলির ব্যবহারিক প্রয়োগও বিশেষ গুরুত্বদায়ক।

৬। বীজগণিত শিক্ষা দিবার সময় আরোহী পদ্ধতি (Inductive Method) অনুসরণ করাই বাঞ্ছনীয়।

৭। সূত্রগুলি যেন পৃথক করে গতানুগতিক ভাবে প্রয়োগ করা না হয়। যখনই প্রয়োজন হবে তখনই যেন যুক্তি-তর্কের অবতারণা করা হয়।

৮। বীজগণিত শিক্ষার প্রাথমিক স্তরে দৈনন্দিন জীবন থেকে সমস্যাগুলি নির্বাচন করতে পারলে খুব ভালো হয়। সমস্যা যত বাস্তব হবে ছাত্রের আগ্রহও তত বৃদ্ধি পাবে।

বীজগণিতে অনুবন্ধ (Correlation) :—বীজগণিতকে বলা হয় সাধারণীকৃত পাটীগণিত। আবার বীজগণিতকে গণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায়ও (Central Topic) বলা হয়। কিন্তু অধিকাংশ শিক্ষকই পাটীগণিত ও বীজগণিতকে দু'টি পৃথক বিষয় হিসাবে মনে করে থাকেন এবং তাদের ধারণা—যখন পাটীগণিত শেষ হয় তখন বীজগণিত শুরু হয় (শিক্ষণের ক্ষেত্রে)। কিন্তু এ ধারণা সম্পূর্ণ ভুল। বরং বীজগণিতে ছাত্র প্রতীক ব্যবহার করতে শিখেছে বলে সেই জ্ঞান পাটীগণিতের ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা চলতে পারে। এর ফলে পাটীগণিতের অনেক জটিল সমস্যার খুব সহজে সমাধান করা সম্ভব হয়, আবার অনেক অপ্রয়োজনীয় স্তরও বাদ দেওয়া যায়। ক্রয়-মূল্য, বিক্রয়মূল্য ও লাভের সম্বন্ধটি বোঝাতে গিয়ে পাটীগণিতে যথেষ্ট ভাষা ব্যবহার করতে হয়। কিন্তু সেই সম্বন্ধটি বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে এইভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে :—

$S=C+P$, যখন $S=$ বিক্রয় মূল্য, $C=$ ক্রয়মূল্য, $P=$ লাভ

তেমনি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রকাশ করা যেতে পারে $A=L\times B$ এই সূত্রের

সাহায্যে, যখন A = ক্ষেত্রফল, L = দৈর্ঘ্য ও B = প্রস্থ। এইভাবে সমস্যা সমাধান করতে গিয়ে প্রতীক ব্যবহার করলে সমাধানের পথটি যে সহজ হবে, সে বিষয়ে কোন সন্দেহ নেই।

বীজগণিত হল সাধারণীকৃত পাটীগণিত। কাজেই গণিতের এই দু'টি শাখার মধ্যে কোন পার্থক্য থাকা উচিত নয়। কিন্তু বিষয়গুলি সম্বন্ধে বিজ্ঞানসম্মত দৃষ্টিভঙ্গীর অভাবের জন্য এবং ত্রুটীপূর্ণ পদ্ধতির জন্য বীজগণিত প্রায় যান্ত্রিক স্তরে উপনীত হয়। পাঠ্যপুস্তকেও সূত্রটি বর্ণনা করার পর দু-একটি উদাহরণ দিয়ে ছাত্রদের সামনে একটি 'অনুশীলনী' উপস্থাপিত করা হয়। ছাত্ররাও যান্ত্রিকভাবে সূত্র প্রয়োগ করে অনুশীলনীর অঙ্কগুলি করে যায়। কিন্তু তারা সূত্র বা প্রতীকের ব্যবহারিক প্রয়োগ বা প্রয়োজনীয়তা হৃদয়ঙ্গম করতে পারে না। এ জাতীয় ঘটনা বন্ধ করা প্রয়োজন। এগুলির যান্ত্রিক প্রয়োগের চেয়ে ব্যবহারিক প্রয়োগের মূল্য অনেক বেশী। বীজগণিত শুরু করা যেতে পারে পাটীগণিতের মাধ্যমে। একদিকে ব্যাকরণের সঙ্গে বীজগণিতের যথেষ্ট মিল আছে। ব্যাকরণে কোন সাধারণ সূত্র তৈরি করতে হলে তার আগে অনেক পর্যবেক্ষণের প্রয়োজন। তেমনি বীজগণিতে কোন সাধারণ সূত্র তৈরি করতে হলে পাটীগণিতের কতকগুলি সমস্যা পর্যবেক্ষণ করা প্রয়োজন। ব্যাকরণে একবার সূত্র তৈরী হয়ে গেলে সমজাতীয় উদাহরণের ক্ষেত্রে সেই সূত্র প্রয়োগ করা যায়। বীজগণিতেও সূত্রে উপনীত হতে পারলে সেই সূত্র সমজাতীয় সমস্যার (তা সে সমস্যা বীজগণিত, পাটীগণিত বা জ্যামিতি যেখানেই হোক না কেন) ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যেতে পারে। কেবলমাত্র প্রতীকটির কোন মূল্য থাকে না, যতক্ষণ না সেই প্রতীকটিকে পাটীগণিতে সমপরিমাণ কোন রাশির বা সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ করা যাচ্ছে। $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$, এই সূত্রটির তখনই একটা অর্থ পাওয়া যাবে যখন a ও b-কে কোন সংখ্যা দ্বারা অপসারিত করে ঐ সম্বন্ধটি সত্য বলে যাচাই করা যাবে। a-এর বদলে 5 এবং b-এর বদলে 3 ধরলে $a^2 - b^2$-এর বদলে পাই $5^2 - 3^2$। সূত্র অনুযায়ী যা হওয়া উচিত, তা হল $5^2 - 3^2 = (5+3)(5-3) = 8 \times 2 = 16$

অথবা $25 - 9 = 8 \times 2 = 16$. সম্বন্ধটি সত্য, অতএব সূত্রটিও সত্য বলেই প্রমাণিত হল।

বীজগণিতের প্রাথমিক শিক্ষা পাটীগণিতের সাহায্যেই হওয়া বাঞ্ছনীয়। ছাত্র প্রথমে সংখ্যা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবে। তারপর তার সংখ্যাজ্ঞান হয়ে গেলেই সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার করা যেতে পারে। $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, এই সূত্রটি নির্ধারণ করার আগে সংখ্যার সাহায্যে দু'টি বর্গের অন্তরফল নির্ণয় করতে হবে।

বীজগণিতকে আমরা ভাষায় সংক্ষিপ্তরূপ (Shorthand) বলেছি। বীজগণিতের সাহায্যে গণিতের অনেক নিয়ম বা সূত্রকেও অত্যন্ত সংক্ষিপ্ত আকারে ও সহজে প্রকাশ করা সম্ভব।

উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে :—

$$\text{Simple Interest} = \frac{\text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time}}{100}$$ এই নিয়মটিকে

$$1 = \frac{P \times R \times T}{100}$$ এই সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব।

ছাত্রদের মাঝে মাঝে প্রতীকগুলির ব্যাখ্যা করতে বলা হবে। যখনই তারা প্রতীকের বদলে আসল জিনিস ব্যবহার করবে তখনই সূত্রটিতে রাশি বা সংখ্যা ব্যবহার করে সূত্রটির সত্যতা যাচাই করার কথাও তাদের বলতে হবে। পাটীগণিতের মতো বীজগণিতেও মানসাঙ্কের প্রচলন থাকবে। এর জন্ম খুব ছোট ছোট সমস্যা নির্বাচন করতে পারা যায়। বাস্তব জীবন থেকে সমস্যাগুলি নির্বাচন করতে পারলে খুবই ভালো হয়। কঠিন অধ্যায় বা কঠিন নিয়মগুলি স্তরে স্তরে শেখাতে হবে। তবে কোন একটি স্তরে আসার আগে দেখতে হবে সেই স্তরের আগের স্তরের পূর্বজ্ঞান তার আছে কি না। জ্ঞান অবিচ্ছিন্ন হওয়াই বাঞ্ছনীয়।

জ্যামিতেতে যুক্তি ও বিচারকরণের প্রয়োজনীয়তা বেশী। বীজগণিতেও জ্যামিতির মতো যাথার্থ্য, যুক্তি ও বিচারশক্তির প্রয়োজন কম তো নয়ই, বরং বেশী। বীজগণিতে অধ্যায়ের স্তরবিন্যাসটি মনোবিজ্ঞানসম্মত ও যুক্তিসম্মত হওয়া প্রয়োজন। প্রথম দিকের অধ্যায়গুলি সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক হওয়া বাঞ্ছনীয়। বীজগণিতে নির্দিষ্ট কাজ, নির্ভুল উত্তর ও অধ্যায়গুলির ব্যবহারিক প্রয়োগ জ্যামিতির মতোই। তবে জ্যামিতেতে বিচারশক্তির প্রয়োজন একটু বেশী, আর সেই বিচারশক্তির মানও বেশ উচ্চ। বীজগণিতের কতকগুলি অধ্যায় যান্ত্রিকভাবেই শিখতে হয়। কাজেই মৌলিকতা বা চিন্তাধারার নূতনত্ব দেখাবার খুব বড় একটা সুযোগ পাওয়া যায় না। তবে বীজগণিতের বিষয়বস্তু সম্বন্ধে জ্ঞান জ্যামিতির জ্ঞানের থেকেও বেশী গুরুত্বপূর্ণ।

এখন বীজগণিতের সঙ্গে জ্যামিতি ও পাটীগণিতের সম্বন্ধের কথা আলোচনা করা যাক। প্রথমে দেখা যাক **পাটীগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ :—**

ধরা যাক, সমাস্যাটি হল—Divide Rs: 128/- among A, B and C so that A may get Rs. 8 less than B and C gets Rs. 7 more than B.

পাটীগণিতের নিয়মে সমস্যাটির সমাধান করতে গেলে অনেক যুক্তি-তর্কের অবতারণা করতে হয়। পদ্ধতিও বেশ জটিল। কিন্তু বীজগণিতের পদ্ধতি অনুযায়ী সমাধান করলে কাজটি অত্যন্ত সহজ হয়ে যায়। A-এর অংশ x-এর সমান ধরলে B-এর অংশ হবে $x+8$ এবং C-এর অংশ $x+8+7$, ; তাহলে যে সূত্রটি পাওয়া যাবে তা হল :—

$$x+(x+8)+(x+15)=128$$ টাকা।

এর থেকে x-এর মান পাওয়া যায় 35 টাকা। এই ভাবে A, B, ও C-র অংশ কত টাকা করে পড়বে, তা নির্ণয় করা যায়।

তেমনি সমস্যাটি যদি হয়—The Sum of two numbers is 20 and their differe ce is 6. What are the numbers ?

কিংবা সরল কর :—$\frac{(3.756)^2-(2.244)^2}{3.756+2.244}$, তখন বীজগণিতের সূত্র প্রয়োগ করলে সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা যাবে।

এবার দেখা যাক, **জ্যামিতিতে কিভাবে বীজগণিত** প্রয়োগ করা যেতে পারে। জ্যামিতিতে অনেক ক্ষেত্রেই বীজগণিতের নীতিগুলি মেনে চলা হয়। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক :

AD is prependicular from the vertex A upon the base BC of a tria gle ACB. If $AD^2=BD.DC$, prove that the triangle is right-angled.

এর সমাধানটি বীজগণিতের সাহায্যে এই ভাবে করা যেতে পারে :—

$AB^2=AD^2+BD^2 \cdots\cdots$ (i)

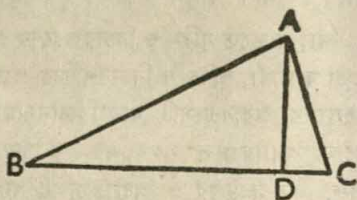
$AC^2=AD^2+CD^2 \cdots\cdots$ (ii)

যোগ করে AB^2+AC^2

$=BD^2+CD^2+2AD^2$

$=BD^2+CD^2+2BD.DC$

$=(BD+CD)^2$

$=BC^2$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এই রকম আরো অনেক উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে।

উদ্ধৃত দৃষ্টান্তগুলি থেকে দেখা যাচ্ছে পাটীগণিত ও জ্যামিতির অনেক সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে বীজগণিতের নীতিগুলি ব্যবহার করে অত্যন্ত সহজে ও সংক্ষিপ্ত উপায়ে সমাধান করা সম্ভব। পদ্ধতিটি ছাত্রদের নিকটও বেশ সহজবোধ্য হয়। কাজেই যখনই সুবিধাজনক মনে হবে তখনই পাটীগণিত বা জ্যামিতিতে বীজগণিত প্রয়োগ করা চলতে পারে।

তবে একথা মনে রাখতে হবে, যে-সমস্ত সমস্যাগুলির পাটীগণিতের বা জ্যামিতির নিয়মে সহজে সমাধান করা সম্ভব, সেগুলির ক্ষেত্রে বীজগণিতের নিয়ম প্রয়োগ না করলেও চলবে। আবার অনেক ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ কষ্টকল্পিত, দীর্ঘ ও কষ্টসাধ্য হয়ে পড়ে। সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ না করাই ভালো। গণিতের প্রত্যেকটি শাখারই নিজস্ব নিয়ম ও কর্মপদ্ধতি থাকা বাঞ্ছনীয়। যেখানে পাটীগণিত ও জ্যামিতির পদ্ধতিটি কঠিন ও দীর্ঘ বলে মনে হবে কিংবা পদ্ধতিটিতে অনেক যুক্তি-তর্কের অবতারণা করতে হয়, তখন বীজগণিত প্রয়োগ করলে সুফল পাওয়া যাবে। অন্যথায় প্রত্যেকটি শাখার নিজস্ব পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিত।

বীজগণিত শিক্ষণ পদ্ধতি :—সমীকরণ ও তার ব্যবহারকে বীজগণিতের কেন্দ্রস্থিত বিষয়বস্তু বলা যেতে পারে। বীজগণিতের কঙ্কালের শুকনো হাড়ের উপর সমীকরণই রক্ত ও মাংস সংযোজন করে তাকে একটি পূর্ণাঙ্গ রূপ দিয়ে থাকে। বীজগণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় হিন্দুদের গণিতশাস্ত্রেও অনেক আগে থেকেই সমীকরণের উল্লেখ পাওয়া যায়। প্রাচীনকালে হিন্দুরা বড় বড় সংখ্যা নিয়ে নানাপ্রকার সমস্যার সমাধান করতেন। অনেকে বলে থাকেন, সংখ্যাবিজ্ঞান ও বীজগণিতে ভারতবর্ষ গ্রীসদেশের থেকেও বেশী উন্নতি করেছিল। আলেকজান্দ্রিয়া স্কুলের Diophantus বীজগণিত নিয়ে যথেষ্ট চর্চা করেছিলেন কিন্তু তিনি সমীকরণকে একটি অসম্ভব বস্তু বলে উড়িয়ে দিয়েছিলেন। কিন্তু ঋণাত্মক রাশি, irrational সংখ্যা প্রভৃতি আবিষ্কারের সঙ্গে সঙ্গে সমীকরণও আর অসম্ভব বস্তু থাকল না। বীজগণিতের বিবর্তনে দেখা যায় প্রথমে এটি ছিল আড়ম্বরপূর্ণ ভাষায় প্রকাশিত (Rhetoric Alg bra)। তারপর কিছু সংক্ষিপ্ত করে তা লেখা হতে লাগল (Syncopated Algebra)। সবশেষে প্রতীক চিহ্নের ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করা হতে লাগল (Symbolic Algebra)। একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার বুঝা যাবে।

Rhetoric Algebra :—10টি চেয়ার ও 5টি টেবিলের দাম মোট 200 টাকা।

Syncopated Algebra :—10টি চেয়ার + 5টি টেবিল = 200 টাকা।

Symbolic Algebra :—$10x+5y=200$

গণিত ও অন্যান্য বিজ্ঞান পাঠের মূল প্রয়োজনীয়তা হল অজানাকে জানা। প্রকৃতি পর্যবেক্ষণ করার সময়, উচ্চতর বিজ্ঞান সম্বন্ধে আলোচনার সময় বা দৈনন্দিন জীবনের সমস্যাগুলির সমাধান করার সময় গণিতের সাহায্য নিতে হয়। অধিকাংশ সমাধানই করা হয় সমীকরণের সাহায্যে। এই জন্যই সমীকরণকে বীজগণিতের মেরুদণ্ড বলা হয়। বীজগণিতে যে সমস্ত পদ্ধতির কথা বলা হয়, সে পদ্ধতিগুলি আসলে সমীকরণেরই পদ্ধতি। প্রতীক চিহ্নের ব্যবহার, রাশির স্থানান্তরীকরণ, চিহ্ন পরিবর্তন সমস্তই সমীকরণের অঙ্গ। ইতিপূর্বে বীজগণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করে আমরা দেখেছি প্রথম অবস্থাতেও সমীকরণই ছিল বীজগণিতের একমাত্র পদ্ধতি।

শ্রেণীকক্ষে বীজগণিত আরম্ভ করার তিনটি সুস্পষ্ট পদ্ধতি প্রচলিত আছে। পদ্ধতিগুলি হল—(১) চারটি নিয়মের পদ্ধতি (Four Rules Method)

(২) সমস্যা পদ্ধতি (Problem Method)

(৩) সূত্র-গঠনের পদ্ধতি (Formulae Method)।

বীজগণিতে যে সমস্ত পাঠ্যপুস্তক প্রচলিত আছে. সেগুলিতে এই তিনটি পদ্ধতির মধ্যে দু'টি পদ্ধতিকে বাদ দিয়ে যে কোন একটি পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়। এটি কিন্তু বিজ্ঞানসম্মত নয়। যে কোন পাঠ্যপুস্তকে অন্ততঃ দু'টি বিভিন্ন পদ্ধতি অনুসরণ করা উচিত। এখন প্রত্যেকটি পদ্ধতি সম্বন্ধে কিছু কিছু আলোচনা করা যাক।

Four Rules Method বা চারটি নিয়মের পদ্ধতিটি হল :—বীজগণিতের প্রথম চারটি নিয়ম (যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ) সম্বন্ধে শিক্ষা দেওয়া হয়। কিন্তু পদ্ধতি হিসাবে এটি অত্যন্ত কার্যকরী বা চিত্তাকর্ষক পদ্ধতি নয়। তার কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে—

(১) পদ্ধতিটি অত্যন্ত অসন্তোষজনক, কারণ এটি কঠিন না হলেও যান্ত্রিক এবং সেইজন্য মোটেই চিত্তাকর্ষক নয়।

(২) ছাত্রদের ভবিষ্যৎ উন্নতির কোন সুযোগ থাকে না।

(৩) প্রথম পদ্ধতি হিসাবে ব্যবহার করলে পদ্ধতিটিকে নীরস, অর্থহীন ও কৃত্রিম বলে মনে হয়।

(৪) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি, যুক্তি ও বিচারকরণের ক্ষমতার কোন উন্নতি হয় না।

(৫) বিষয়টির ঐতিহাসিক ক্রমোন্নতির সঙ্গে পদ্ধতিটির কোন সংযোগ নেই।

(৬) ছাত্র ও শিক্ষক কারো সুবিধার জন্য কোন সুনির্দিষ্ট নিয়মের ব্যবস্থা নেই।

(৭) ছাত্রদের সৃজনীশক্তির বিকাশের কোন সুযোগ থাকে না। নিয়মগুলি পূব নির্ধারিত থাকে বলে তারা অন্ধ বা যান্ত্রিকভাবে চাপিয়ে দেওয়া নিয়মগুলি অনুসরণ করে চলে।

পদ্ধতিটি যে সম্পূর্ণরূপে ত্রুটিপূর্ণ একথা নিঃসন্দেহে বলা যায় না। London Mathematical Association-এর মতে—"a certain amount of teaching of the four rules is inevitable in the early stages." এই পদ্ধতিতেই ছাত্র বীজগণিতের বর্ণমালা ও ব্যাকরণের সঙ্গে পরিচিত হয়। কাজেই প্রাথমিক জ্ঞান অর্জন করার জন্য বা উচ্চতর জ্ঞানের ভিত্তি প্রস্তুত করার জন্য পদ্ধতিটির প্রয়োজন আছে, এ কথা বলা যেতে পারে। নিয়ম চারটির চর্চা করতে করতে ছাত্র কিছুটা মানসিক দক্ষতাও অর্জন করবে।

সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠনের পদ্ধতিতে প্রথম চারটি নিয়ম যান্ত্রিকভাবে অনুসরণ করতে হয় না। যেখানে প্রয়োজন হবে, সেখানে ছাত্র নিজের থেকেই প্রয়োজনীয় নিয়মটি ব্যবহার করবে। যেহেতু এটি নিয়ম অতএব অনুসরণ করতেই হবে—এ-ধারণার পরিবর্তে ছাত্র তার যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ করে নিয়মটির সত্যতা ও যাথার্থ্যতা যাচাই করে নিতে পারে। সমস্যা পদ্ধতির সাহায্যে বীজগণিত শিক্ষা দেওয়ার পক্ষে কয়েকটি যুক্তির অবতারণা করা যায়। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণগুলি হল :—

১। বিষয়টির ঐতিহাসিক বিবর্তনের সঙ্গে পদ্ধতিটি সামঞ্জস্য রক্ষা করা চলে।

২। সমস্যা পদ্ধতিতে সমাধান করা অনেকটা ধাঁধার উত্তর দেওয়ার মতো। কাজেই এই পদ্ধতিতে ছাত্রের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা প্রবৃত্তিকে জাগ্রত করে তার আগ্রহের পরিমাণ বাড়ানো যেতে পারে।

৩। ব্যবহারিক ক্ষেত্রেও পদ্ধতিটি উপকারী বলে এর সম্বন্ধে একটা বাস্তববোধ ছাত্রদের মনে গড়ে উঠে।

৪। বাঁধাধরা যান্ত্রিক নিয়ম অনুসরণ না করে ছাত্র তার নিজস্ব যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ করতে পারে।

৫। যে সমস্ত ছাত্রের এই পদ্ধতিতে বীজগণিত শিক্ষা শুরু হয় তারা অন্যান্য ছাত্রদের চেয়ে তুলনামূলক ভাবে বীজগণিতে দক্ষ হয়।

কিন্তু পদ্ধতির কতকগুলি ত্রুটিও আছে। বীজগণিতের সমস্ত সমস্যার সমধান এই পদ্ধতির সাহায্যে করলে পদ্ধতিটি সম্বন্ধে একটা ভ্রান্ত ধারণার সৃষ্টি হতে পারে। পদ্ধতিটিকে 'সর্ব-রোগ-হর' ওষুধের মতো মনে হতে পারে। এতে পদ্ধতিটির গুরুত্ব কিছুটা হ্রাস পেতে পারে। সমস্যা পদ্ধতির মূল কথাই হল সমীকরণ। সমস্যা পদ্ধতির সমস্যাগুলি এমনভাবে নির্বাচিত করতে হবে যেন সবগুলিরই সরল সমীকরণের সাহায্যে সমাধান না করা যায়। সমস্যাগুলি বিষয়টির বিভিন্ন অংশ থেকে সংগ্রহ করতে হবে। ছাত্রদের মুখস্থ করার যে একটা প্রবল প্রবণতা থাকে সেটা সম্পূর্ণরূপে বন্ধ করতে হবে। এ ছাড়া সমীকরণ করতে গেলে অজানা রাশিটিকে x ধরতে হয়। কিন্তু এই xটি কেবলমাত্র একটি অজানা রাশি নয়, এটি একটি চলক (variable)। অথচ বারবার সমীকরণ করা সত্ত্বেও ছাত্র x-কে কেবলমাত্র একটি অজানা রাশি বলেই মনে করতে থাকে, এটি যে একটি চলক একথা তার মনে থাকে না। আবার অধিকাংশ সমীকরণে কেবলমাত্র যোগ ও বিয়োগের চর্চা করাই হয়ে থাকে। যেমন :—"কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 6 যোগ করলে 10 হয় ?"—এই সমস্যাটিতে ছাত্র অজানা সংখ্যাটিকে x ধরে এইভাবে সমীকরণটি খাড়া করে :—$x+6=10$; $\therefore \quad x=10-6=4$.

সমীকরণগুলি এমনভাবে নির্বাচিত করতে হবে যাতে অন্যান্য নিয়মগুলিও (গুণ, ভাগ) প্রয়োগ করতে হয়।

সমস্যা পদ্ধতিতে যে x-কে কেবলমাত্র অজানা রাশি বলে ধরা হ'ত, সূত্র-গঠন পদ্ধতিতে সেই x যে একটি চলক—এ-কথা মনে রেখে সমাধান করা হয়। যদি একথা বলা যায় যে বীজগণিতে সমস্যা সমাধানের সময় পদ্ধতিতে প্রথমেই প্রতীক-চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে—তাহলে সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠন পদ্ধতির মধ্যে মূলগত কোন পার্থক্যই থাকে না। তবে এই দু'টি পদ্ধতির মধ্যে কোন্‌টি প্রথমে ব্যবহার করা ভালো, কোন্ পদ্ধতিতে ছাত্রদের শিক্ষণ পাকা হয়, সে নিয়ে শিক্ষক ও শিক্ষাবিদদের মধ্যে মতভেদ আছে। London Mathematical Society-র মতে—"It may be said definitely that it is a mistake to lay emphasis on either problems or formulae to the exclusion of the other." যাই হোক, এখন সূত্রগঠন পদ্ধতির সুবিধা-অসুবিধাগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক। প্রথমে সুবিধাগুলির কথাই ধরা যাক।

১। বিষয়টির ধারা বা মূলসূত্র সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা পাওয়া যায়। সাধারণ সত্যের প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশে এবং প্রতীকের সাহায্যেই নূতন সত্য আবিষ্কার করার মধ্যে চিন্তার সংক্ষেপীকরণ করা সম্ভব।

২। প্রথম অবস্থাতে বিষয়টির যে ব্যবহারিক প্রয়োগ হয়েছিল—তার সঙ্গে এই

পদ্ধতিটির একটা যোগসূত্র স্থাপিত হয় বলে পদ্ধতি সম্বন্ধে ছাত্রের আগ্রহ বৃদ্ধি পায়। সে সমস্ত ঘটনা বা নিয়মকে সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করতে চাইবে।

এইবার অসুবিধাগুলির কথা আলোচনা করা যাক।

১। পদ্ধতিটি শিক্ষকের পক্ষে খুবই উপযোগী এবং সুনির্দিষ্ট ; কিন্তু ছাত্রের পক্ষে (বিশেষতঃ যারা একটু দেরিতে বুঝতে পারে) পদ্ধতিটি বেশ জটিল।

২। পদ্ধতিটিতে শিক্ষক বা ছাত্র—কারো জন্যই খুব বেশী পথ-নির্দেশ (guiding line) থাকে না।

৩। পদ্ধতিটি ব্যবহার করতে হলে আগের থেকেই কতকগুলি সাধারণ নিয়ম জেনে রাখতে হয় :

৪। কখন কোন্ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে সে সম্বন্ধে শিক্ষা দেবার জন্য ছাত্রদের বার বার অভ্যাস করাতে হয়। এতে ছাত্রদের অযথা বেশ খানিকটা পরিশ্রম করতে হয়।

এখন সমস্যা পদ্ধতি ও সূত্রগঠন পদ্ধতির একটা তুলনামূলক আলোচনা করা যাক।

প্রথমতঃ দু'টি পদ্ধতিই মূলতঃ সমস্যার সমাধানের উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত বলে ছাত্রদের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা প্রবৃত্তি জাগরিত হয়। ফলে তারা বিষয়টি পাঠে অধিকতর আগ্রহী হয়।

দ্বিতীয়তঃ সূত্রগঠন পদ্ধতিতে বেশ কিছুটা পূর্বজ্ঞানের প্রয়োজন। এই পূর্বজ্ঞান না থাকলে পদ্ধতিটি অনুসরণ করা খুবই জটিল হয়ে পড়ে। কিন্তু সমস্যা সমাধান পদ্ধতিতে কোন্ পূর্বজ্ঞানের প্রয়োজন হয় না।

তৃতীয়তঃ সূত্রগঠন পদ্ধতিটি সমস্যা পদ্ধতির চেয়ে বেশী গতানুগতিক ও যান্ত্রিক।

চতুর্থতঃ সমস্যা পদ্ধতি অপেক্ষা সূত্রগঠন পদ্ধতিতে প্রতীকের ব্যবহার বেশী।

পঞ্চমতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই সচরাচর সমীকরণের মাধ্যমে ঈপ্সিত ফলে পৌঁছানো যায়। কাজেই একথা বলা যেতে পারে যে পদ্ধতি দু'টির বিষয়টির ঐতিহাসিক ক্রম-বিবর্তনের সঙ্গে একটা সামঞ্জস্য আছে।

ষষ্ঠতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই প্রথম নিয়ম চারটি যান্ত্রিকভাবে বা হঠাৎ এসে পড়ে না। যখন যে নিয়মটির প্রয়োজন হয়—তখনই সেই নিয়মটি ব্যবহার করা হয়।

সপ্তমতঃ দু'টি পদ্ধতিতেই কোন কাল্পনিক শক্তি বা ক্ষমতার নিকট নতি স্বীকার না করে ছাত্রকে তার নিজস্ব চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ করতে উৎসাহ দেওয়া হয়।

অষ্টমতঃ সূত্রগঠনের পদ্ধতিটি অপেক্ষাকৃত সংক্ষিপ্ত বলে এতে দ্রুত ফল লাভ করা যায়। কিন্তু সমস্যা পদ্ধতিতে ফললাভে বিলম্ব ঘটে।

এই আলোচনা থেকে দেখা যাচ্ছে পদ্ধতি দু'টির মধ্যে কোন একটি পদ্ধতিকে সম্পূর্ণ গ্রহণযোগ্য পদ্ধতি বলে বিবেচনা করা যায় না। বিভিন্ন পদ্ধতি প্রচলিত

থাকলেও ছাত্ররা সমস্যার সমাধানের স্তরগুলি, এমনকি উত্তর পর্যন্ত মুখস্থ করে পরীক্ষার খাতায় লিখে আসে। এতে তারা নম্বর হয়তো একটু বেশীই পায়, কিন্তু বীজগণিত শিক্ষা তাদের হয় না। এই অসুবিধা দূর করার বিষয়ে London Mathematical Association-এর বক্তব্য হল :—

"Equation should, with beginners, arise either from problems or from the use of formulae when one of the letters in the formulae is unknown."

দুই পদ্ধতিতে বিভিন্ন উপায়ে সমীকরণ খাড়া করে একইভাবে সমাধান করা যেতে পারে। আবার পদ্ধতি দু'টির মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করার জন্য একই সমীকরণের পৃথক পৃথক ভাবে দু'টি পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করা যেতে পারে। অনেকে আবার পদ্ধতি দু'টির একটা সংযুক্ত পদ্ধতিকে বীজগণিত শিক্ষণের সবচেয়ে ভালো পদ্ধতি বলে মনে করে থাকেন। এর স্বপক্ষে তাঁদের যুক্তি হল :—

- সংখ্যার বদলে অক্ষর (প্রতীক) ব্যবহার করতে হয়। ছাত্ররা এর জন্য অধিকতর আগ্রহ অনুভব করে।
- বিষয়টির শিক্ষণ গণিতের জ্ঞানের উপর নির্ভরশীল। ফলে পাটীগণিতের সঙ্গে বীজগণিতের একটা ঘনিষ্ঠ অনুবন্ধ স্থাপিত হয়ে যায়।
- এই পদ্ধতিতে পদ্ধতিটির উদ্দেশ্য, অর্থ, তত্ত্বমূলক ও ব্যবহারিক মূল্য সব কিছুই ছাত্রের নিকট পরিষ্কার হয়ে যায়।

পাটীগণিত সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করার সময়ই ছাত্রকে সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার করতে শিক্ষা দেওয়া যেতে পারে। বীজগণিত শিক্ষা শুরু করার আগেই কিন্তু সহজ-ভাবে প্রতীক ব্যবহার করা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। যেমন—

(ক) এক টাকাতে কত পয়সা? পাঁচ টাকাতে? N টাকাতে?

(খ) 100 টাকার 10% = কত? 20% = কত? S% = কত?

(গ) একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 10´ এবং প্রস্থ দৈর্ঘ্যের চেয়ে x' কম। বাগানটির ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা কত?

এগুলির সমাধান করার সময় লক্ষ্য রাখতে হবে, যেন প্রতিটি স্তর ছাত্র পরিষ্কার ভাবে বুঝতে পারে। অন্যথায় প্রতীক ব্যবহারের মূল উদ্দেশ্যটিই নষ্ট হয়ে যাবে।

যেমন :—এক গজে কত ফুট? দু'গজে? দশ গজে? x গজে?

ছাত্র এইভাবে শিখবে :

1 গজ $= 1 \times 3$ ফুট, 2 গজ $= 2 \times 3$ ফুট $= 6$ ফুট

10 গজ $= 10 \times 3$ ফুট $= 30$ ফুট, x গজ $= x \times 3$ ফুট $= 3x$ ফুট

যদি x সংখ্যক লোক y দিনে কোন একটি কাজ করতে পারে, তবে সেই কাজটি z সংখ্যক লোক কতদিনে করবে?

x সংখ্যক লোক কাজটি করে y দিনে

সমাধান : $\therefore$ 1 জন লোক কাজটি করে $y \times x$ দিনে

$\therefore$ z সংখ্যক " " " $\frac{y \times x}{z}$ "

এই পদ্ধতিতে শ্রেণীকক্ষে অপ্রত্যক্ষ ভাবে (Informal) বীজগণিত শুরু করা যেতে পারে। কতকগুলি সহজ সাধারণ সূত্র জানা থাকলে পদ্ধতিটি যথেষ্ট কার্যকরী হয়। ক্ষেত্রফল নির্ণয়, আয়তন নির্ণয়, বহুভুজের কোণ সমষ্টি নির্ণয় ইত্যাদি কতকগুলি সূত্র জেনে রাখা প্রয়োজন। তবে অধিকাংশ ক্ষেত্রেই ছাত্রদের এই সাধারণ সূত্রগুলি জানা থাকে না বলে পদ্ধতিটি যথেষ্ট কার্যকরী হয়ে উঠতে পারে না।

যাই হোক, যে পদ্ধতিই অনুসরণ করা যাক না কেন, শিক্ষককে কয়েকটি বিষয়ের দিকে সতর্ক মনোযোগ দিতে হবে। যেমন :—

১। যে কৌশলে সমাধান করা হচ্ছে, সে কৌশলটি যেন শ্রেণীর সমস্ত ছাত্র আয়ত্ত করতে পারে।

২। বিভিন্ন অমূর্ত উদাহরণের ক্ষেত্রে কৌশলটি প্রয়োগ করে দক্ষতা অর্জন করতে হবে।

৩। কেবল বর্তমানে নয়, ভবিষ্যতেও যেন তারা কৌশলটি ব্যবহার করতে পারে।

অনেক সময় বীজগণিতকে পাটীগণিতের সংক্ষিপ্ত রূপ বলা হয়। এইভাবেও পাটীগণিতের বিভিন্ন নিয়ম বা সূত্রকে বীজগণিতের সাহায্যে সংক্ষিপ্তভাবে প্রকাশ করা যায় এবং সমস্যাগুলি সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করা যায়। এই জন্য প্রথমে অবশ্য সহজ উদাহরণ নিয়ে এগিয়ে যেতে হয়। যেমন :—কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 6 যোগ করলে সংখ্যাটি 15 হবে ? এই বিবৃতি থেকে একটি সমীকরণ পাওয়া যাচ্ছে। সেটি হল : সংখ্যাটি $+6=15$

অথবা সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করলে, সংখ্যার বদলে x ধরে, $x+6=15$.

এইবার শিক্ষককে বলতে হবে সমীকরণের দুই দিক দাঁড়িপাল্লার দু'টি দিকের মতো। দাঁড়িপাল্লাতে যেমন ভারসাম্য ঠিক রাখার জন্য দু'দিকের পাল্লাতে সমান সমান ওজন যোগ-বিয়োগ করতে হয়, সমীকরণেও তেমনি সমান চিহ্নের দু'দিকেই সমান সমান রাশি যোগ বা বিয়োগ করতে হয়। অতএব $x+6=15$ এই সমীকরণে যদি কেবলমাত্র x পেতে হয়, তবে $x+6$ থেকে 6 বাদ দিতে হবে। কিন্তু একদিক থেকে বাদ দিলে ভারসাম্য থাকে না বলে উভয় দিক থেকেই 6 বাদ দিতে হবে। ফলে সমীকরণটি দাঁড়াল :—$x+6-6=15-6$

অথবা $x=9$, সুতরাং সংখ্যাটি হল 9

বীজগণিতের আর একটি পদ্ধতি হল—এটিকে সাধারণীকৃত পাটীগণিত বলে মনে

করা। পাটীগণিতের বিভিন্ন নিয়ম ও সূত্রকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করে সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করে প্রয়োজনীয় ফল পাওয়া যায়। যেমন :—

Area $= L \times B$, ; Simple Interest $= \dfrac{P \times R \times T}{100}$ ইত্যাদি।

পাটীগণিতে এরকম বিভিন্ন জাতীয় সূত্র দেখতে পাওয়া যায়।

পদ্ধতিগুলির মূল কথাই হল—যে পদ্ধতিই অবলম্বন করা হোক না কেন, পদ্ধতিটি ব্যবহারের ফলে বিষয়টির অন্তর্নিহিত অর্থ যেন ছাত্রদের নিকট পরিষ্কারভাবে ফুটে উঠে ; ছাত্ররা যেন বিষয়টি সম্বন্ধে যথেষ্ট আগ্রহ অনুভব করে এবং বিষয়টির ব্যবহারিক মূল্যটিও যেন তারা উপলব্ধি করতে পারে।

বীজগণিত শিক্ষার প্রথম উদ্দেশ্য হল ছাত্রদিগকে বীজগণিতের সরল সূত্রগুলিকে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে শিক্ষা দেওয়া। বলতে গেলে, প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করতে শিক্ষা দেওয়াকেই বীজগণিতের প্রথম পাঠ বলা যেতে পারে। অবশ্য প্রতীকগুলি এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে যেন তার থেকেই কিসের বদলে প্রতীকটি ব্যবহার করা হচ্ছে সহজেই বোঝা যায়। যেমন—ক্ষেত্রফলের প্রতীক A (Area), পরিসীমার P (Perimeter), দৈর্ঘ্যের L (Length) ইত্যাদি। সূত্রগুলিও এমনভাবে নিতে হবে যেন সেগুলি সহজ হয় এবং ছাত্রদের পূর্ব পরিচিত হয়।

প্রতীকের সাহায্যে সূত্রটি প্রকাশ করার পর সেটি ব্যবহার করতে হবে। সাধারণতঃ 'অগ্রগামী' পদ্ধতিতে (Forwards) সূত্র ব্যবহার করা হয়। যেমন :— কোন বহুভূজের কোণ সমষ্টি সাধারণতঃ $S = 2n - 4$ এই সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এখন যদি n দেওয়া থাকে, তবে S নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অগ্রগামী পদ্ধতি বলা হয়। আবার কতকগুলি সূত্র পশ্চাদ্গামী পদ্ধতিতে (backwards) ব্যবহার করা হয়। যেমন ঐ সূত্রে যদি C-এর মান দেওয়া থাকে এবং n-এর সংখ্যা নির্ণয় করতে হয়, তবে সেই পদ্ধতিকে পশ্চাদ্গামী পদ্ধতি বলা হয়। আবার 'লুকানো-সংখ্যার' (hidden number) সাহায্যেও বীজগণিত শুরু করা সম্ভব। কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 5 যোগ করলে যোগফল 12 হবে—এ সমস্যার সমাধান খুব ছোট ছেলেও করতে পারবে।

কেবলমাত্র প্রতীকের সাহায্যে সূত্রগঠনের দিকে মনোযোগ দিলেই চলবে না ; সূত্রকে আবার ভাষায় প্রকাশ করার শিক্ষাও দিতে হবে। এর জন্য অবশ্য অনুশীলন ও চর্চার কিছুটা প্রয়োজন। যেখানে প্রতীক ব্যবহার করতে হবে—সেখানে এর প্রবর্তন যেন যান্ত্রিক না হয়। আবার কোন জিনিসের বদলে কি প্রতীক ব্যবহার করতে হবে তা নির্ণয় করতে যেন ছাত্রকে বেশী বেগ পেতে না হয়। কেবলমাত্র সংখ্যার বদলে প্রতীক ব্যবহার করলেই প্রতীকের ব্যবহার শেখা হয়ে গেছে—এ কথা বলা চলে না। বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে যে বিশেষ সম্বন্ধ বজায় থাকে, প্রতীক ব্যবহারের ফলে সেই সম্বন্ধটি যেন বজায় থাকে। যেমন :—

$A = 4\pi r^2$ $\qquad S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ $\qquad C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

আবার ছাত্রদিগকে সূচক সম্বন্ধেও প্রথমদিকে শিক্ষা দিতে হবে। $a+a=2a$, কিন্তু $a\times a=a^2$, এই পার্থক্যটি তাকে বোঝাতে হবে। কতকগুলি বাস্তব সমস্যার সাহায্যে সূচক সম্বন্ধে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দেওয়া যায়। যেমন: একটি ইটের বিভিন্ন দিকের মাপ হল x, $2x$ এবং $3x$। ইটটির এক একটি দিকের ক্ষেত্রফল ও আয়তন কত? বিভিন্ন ভাবে সূত্র প্রকাশ করতে শিখলে এবং সূত্রগুলিকে ভাষায় প্রকাশ করতে শিখলে ছাত্র যেখানেই নতুন কোন বীজগণিতের সূত্র দেখতে পাবে সেইটিই ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করবে। অর্থাৎ তার শ্রেণীকক্ষের জ্ঞান সে শ্রেণীকক্ষের বাইরে যে বিশাল জগৎ, তার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানেও প্রয়োগ করতে শিখবে। এইভাবেই পুঁথির জ্ঞানের সঙ্গে জীবনের একটা ঘনিষ্ঠ যোগসূত্র স্থাপন করা সম্ভব।

প্রশ্নগুচ্ছ

1. Write short-note on the educational values of Algebra ?

2. How will you teach directed numbers to the students including the processes involving four fundamental rules ?

3. "The central topic of Algebra is, beyond question the equation and its application. It is this that puts flesh and blood upon the dry bones of the skeleton of Algebraic routine." Discuss, illustrating with examples, how the teaching of Algebra in the early stages should be directed mainly towards the development of the concept of equation.

4. Compare with examples the "Problem" and the "Formula" methods of approach to the early teaching of Algebra and show how and to what extent the two could be correlated with advantages. How do they compare with the traditional method of approach ?

তৃতীয় অধ্যায়

জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য ও পদ্ধতি

(Aims & Methods of Teaching of Geometry & Trigonometry)

জ্যামিতি :—এই শব্দটির মধ্যেই জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য লুকায়িত আছে। জ্যামিতি শব্দটি এসেছে জ্যা ও মিতি এই দু'টি শব্দ থেকে। জ্যা—অর্থ পৃথিবী এবং 'মিতি'র অর্থ হল পরিমাপ করা। Geometry কথাটির অর্থও পৃথিবী পরিমাপ করা—(Geo=Earth, meter=to measure)। জ্যামিতির ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় প্রত্যেক দেশে জ্যামিতির উদ্ভব হয়েছে ক্ষেত্র পরিমাপের ভিতর দিয়ে। জ্যামিতি মানুষের খেয়াল-খুশিমত তৈরী কতকগুলি তথ্য নয়। মানুষের বিভিন্ন প্রয়োজনের তাগিদে এবং পৃথিবীর রহস্য উদ্ঘাটন করতে গিয়েই এই শাস্ত্রের উদ্ভব হয়েছে। আমাদের দেশে বৈদিক যুগে যজ্ঞের বেদী নির্মাণ করতে গিয়ে ত্রিভুজাকার, চতুর্ভুজাকৃতি ইত্যাদি বিভিন্ন জাতীয় জ্যামিতিক আকারের উল্লেখ পাওয়া যায়। এই যজ্ঞস্থল পরিমাপ বা যজ্ঞবেদী নির্মাণ করতেন যারা—তাঁদের বলা হ'ত অধ্বর্যু। তাঁদের কাজের সুবিধার জন্য তাঁরা জ্যামিতির কতকগুলি সত্য আবিষ্কার করে তার নাম দিয়েছিলেন—শুল্বসূত্র। পরবর্তী কালে এই শুল্বসূত্র থেকে জ্যামিতি আরো উন্নত হয় এবং এই উন্নতির মূলে ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য, মুনীশ্বর গণক প্রভৃতির নাম উল্লেখযোগ্য। ভাস্কর তাঁর বই 'লীলাবতী'তে দেওয়াল, পুষ্করিণী, কূপ, ছায়া প্রভৃতির ক্ষেত্রে জ্যামিতির ব্যবহারের কথা লিখেছেন। মিশর দেশের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায়—প্রতি বৎসর নীলনদের প্লাবনের পর জমির হিসাব রাখতে গিয়ে ও তীরে বাঁধ বাঁধতে গিয়ে নানাপ্রকার মাপের দরকার হয় : আর তার ভিতর দিয়েই জ্যামিতি উন্নত হয়। রোম দেশের নগর তৈরী করতে গিয়ে জ্যামিতির উদ্ভব হয়। গ্রীস দেশে জ্যামিতির উন্নতি হয় শিল্পকলার ভিতর দিয়ে। যতদূর জানা গেছে—গ্রীকরা মিশরীয়দের নিকট হতেই জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করে। পীথাগোরাস, ইউক্লিড প্রভৃতি গ্রীক দার্শনিকের জ্যামিতির ক্ষেত্রে অবদান প্রচুর। অবশ্য এ্যারিস্টটল, প্লেটো, আর্কিমিডিস প্রভৃতির নামও উল্লেখযোগ্য। প্লেটোর মতে—"Geometry draws the Soul towards truth." আবার তাঁর Academy-র প্রবেশদ্বারে এই কথা কটি উৎকীর্ণ ছিল—"Let no one ignorant of Geometry, enter here" প্রথমদিকে জ্যামিতির সত্যগুলি সুসংবদ্ধভাবে লিপিবদ্ধ করে রাখার কোন ব্যবস্থাই ছিল না। এ বিষয়ে প্রথম পুস্তক হল—ইউক্লিডের Elements. ইউক্লিড তাঁর এই পুস্তকে প্রায় 500 উপপাদ্য সন্নিবিষ্ট

করেন। পরবর্তী কালে আর্কিমিডিস এবং এ্যাপোলোনিয়াস আরো অনেক নূতন উপপাদ্য প্রবর্তন করেন। ইউক্লিডের এই পুস্তকের বিষয়বস্তু থেকেই ইউক্লিডিয় জ্যামিতির উদ্ভব হয় এবং তার থেকে আবার অন্য শ্রেণীর জ্যামিতির (যথা—Solid, Spherical এবং সবশেষে Non-Eucledian জ্যামিতি) উদ্ভব হয়।

প্রথম অবস্থাতে জ্যামিতি সম্বন্ধে ধারণা জন্মাতে হলে বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নিতে হয়। শিক্ষক প্রথমে স্বর্ণকার, কর্মকার, রাজমিস্ত্রী, ছুতোর মিস্ত্রী, নাপিত, বৈজ্ঞানিক, এঞ্জিনিয়ার প্রভৃতির উদাহরণের সাহায্যে জ্যামিতি ব্যবহারের প্রয়োজনীয়তা ও উপযোগিতা সম্বন্ধে শিক্ষা দেবেন। পরে ছাত্ররা মনের দিকে আর একটু উন্নত হলে জ্যামিতির বিভিন্ন দিকের সঙ্গে তাদের পরিচয় করিয়ে দিতে পারা যায়। জ্যামিতির সঙ্গে তারা যত বেশী করে পরিচিত হবে, ততই তারা দেখবে যে এই বিষয়টি পৃথিবীর নানা রহস্য বুঝতে তাদের সাহায্য করে যাচ্ছে। প্লেটোর মতে—God eternally geometrises। এর উদাহরণ আমরা প্রাণীজগৎ বা উদ্ভিদ জগতে দেখতে পাই। এক-একটি পাতার, এক-একটি ফলের এক-এক রকম বিশেষ আকৃতি থাকে। আনারসের গায়ে বহুভুজের স্পষ্ট ইঙ্গিত। ফার্ন পাতা, তেঁতুল পাতা ইত্যাদি সমান্তরাল ভাবে সাজানো থাকে। আবার পেঁপে, নারকেল প্রভৃতি গাছ বেশ বেলন আকৃতি বিশিষ্ট। আবার প্রাণীজগতে দেখা যায়—মাকড়সার জাল বহুভুজ আকৃতির। মৌমাছির মৌচাক ষড়ভুজ। ঈশ্বরের সৃষ্টির এই রহস্য উদ্ঘাটন করতে গিয়েই মানুষ জ্যামিতির পরিচয় পেয়েছে। আকাশের দিকে দৃষ্টিপাত করলে দেখা যায় চন্দ্র-নক্ষত্র-সূর্য ইত্যাদিকে বৃত্তাকারে দেখায়। সূর্যের চারপাশে পৃথিবীর যে কক্ষপথ তাও অর্ধ-বৃত্তাকার। তখন মানুষ বৃত্ত, অর্ধ-বৃত্ত সম্বন্ধে ভাবতে শুরু করলো। ক্রমশঃ নদীর বিস্তৃতি বা পাহাড়ের উচ্চতা মাপ করবার জন্যও মানুষ জ্যামিতি ব্যবহার করতে শিখলো। প্রকৃতিতে যে সমস্ত জ্যামিতিক আকৃতি সে দেখেছে সেই আকৃতি বিশিষ্ট দৈনন্দিন ব্যবহারের জন্য প্রয়োজনীয় জিনিস তৈরী করতে সে শিখল (Man also geometrises)। আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় রেখা, ত্রিভুজ, বহুভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করাই জ্যামিতির উদ্দেশ্য। কিন্তু এটাই জ্যামিতি শিক্ষার চরম উদ্দেশ্য নয়। এর থেকে ছাত্ররা যে জ্ঞান অর্জন করবে তা তারা দৈনন্দিন জীবনের নানাকাজে প্রয়োগ করবে এবং সেইসঙ্গে ঈশ্বরের সৃষ্টিকেও বুঝতে সাহায্য করবে। হার্বার্ট স্পেন্সার তাঁর Education নামক বইখানিতে বলেছেন—The education of the child must accord, both in mode and arrangement, with the education of mankind considered historically. জ্যামিতি শিক্ষা কার্যকরী করতে হলে বিষয়টির ইতিহাসের ক্রমবিকাশের ধারা অনুযায়ী শেখাতে হবে।

জ্যামিতি সম্বন্ধে সবচেয়ে প্রাচীন তথ্য পাওয়া গেছে মিশরের একখানি গ্রন্থে। এই গ্রন্থে জ্যামিতিতে যে জ্ঞানের আভাস পাওয়া যায় তা হচ্ছে কতকগুলি নিয়ম—যেগুলি অভিজ্ঞতা থেকে আবিষ্কৃত হয়েছে। একটি বড় আয়তক্ষেত্রের তল মাপা হ'ত

কয়েকটি ছোট আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে। এই স্তরেই মাপ করার জন্য একক ব্যবহার করার প্রয়োজনীয়তা অনুভূত হয়েছিল। অনেকগুলি আয়তক্ষেত্রের মাপ প্রথম দিকে মেপে বার করা হ'ত। ক্ষেত্রগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ পাশে লিখে রাখা হ'ত। হঠাৎ আবিষ্কৃত হল যে ক্ষেত্রফল হল দৈর্ঘ্য × প্রস্থের সমান। যত বেশী সংখ্যক ক্ষেত্রের মাপ পরীক্ষা করা যাবে—তত বেশী নির্ভরযোগ্য সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে। তবে এই আবিষ্কার হয় যুক্তিশাস্ত্র অনুসারে (logically), কিন্তু এর প্রমাণ পাওয়া যায় না। কোন বিজ্ঞানসম্মত (scientific) জ্যামিতির অংশ একে বলা যায় না। কিন্তু বিজ্ঞানসম্মত ধারা অনুযায়ী একেবারে সূত্র প্রয়োগ করেই বলা যেতে পারে যে ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। এটি তত্ত্ব হিসাবে ছাত্রের মনে থাকে এবং যখনই সে কোন বাস্তব সমস্যার সম্মুখীন হয় তখনই সে এই সূত্রটি প্রয়োগ করে।

দু'টি পদ্ধতির মধ্যে কিছুটা পার্থক্যও আছে। অভিজ্ঞতা থেকে পুনঃপুনঃ পরীক্ষার ফলে যা আবিষ্কার করা হয়, তার ভিত্তি হল ইন্দ্রিয়ানুভূতি ও পরীক্ষণ। বিশেষ বিশেষ কতকগুলি দৃষ্টান্ত থেকে একটি সাধারণ তথ্যে উপনীত হওয়া যায়। কিন্তু অন্য পদ্ধতিটির ভিত্তি হচ্ছে কতকগুলি বিজ্ঞানসম্মত ধারণা ও সূত্র। এই ধারণা ও সূত্রগুলি আবার পূর্ব-নির্ধারিত কতকগুলি ধারণা, সূত্র ইত্যাদি কঠোর যুক্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। একটিকে বলা হয় পরীক্ষামূলক জ্যামিতি, আর একটি হল বিজ্ঞানসম্মত জ্যামিতি। একটি শাখা কাজ করছে কতকগুলি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তের উপর নির্ভর করে, আর কতকগুলি সাধারণ উপপাদ্যের উপর নির্ভর করে কাজ করে অপর শাখাটি। প্রাচীন পদ্ধতি ছিল ব্যবহারিক পদ্ধতি। অধিকাংশ তথ্য আবিষ্কৃত হয়েছে দৈনন্দিন কাজের মধ্য দিয়ে। মিশরে যে গ্রন্থ পাওয়া গেছে তাতে জানা যায় বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ তথ্য আবিষ্কার করাই ছিল সে কালের পদ্ধতি। যতদূর সম্ভব আসন্ন মান নির্ণয় করার চেষ্টা করা হ'ত। গ্রীক জ্যামিতির উদ্ভব আরও পরে হয়েছে বলেই তা হয়েছে বিজ্ঞানসম্মত। সাধারণ তথ্যের বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োগ এবং সঠিক মাপের উপর জোর দেওয়া হ'ত এই পদ্ধতিতে। Thales যে জ্যামিতি আবিষ্কার করেন তা ছিল বিমূর্ত জ্যামিতি। জ্যামিতির দু'টি উপপাদ্য তিনি আবিষ্কার করেন বলে জানা গেছে। সে উপপাদ্য দু'টি হল—ত্রিভুজের তিনটি কোণ দুই সমকোণের সমান এবং দুই সমানকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতিক। Thales-এর পরে পীথাগোরাসের স্কুলের উদ্ভব হয়। এঁরা জ্যামিতিকে একটি বিজ্ঞানশাস্ত্রে পরিণত করলেন এবং বিষয়টিকেও বিমূর্ত করে তুললেন। তারপর ইউক্লিড বিষয়টিকে নিখুঁত বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গীতে দেখতে এবং বিষয়টিকে ধারাবাহিকভাবে লিপিবদ্ধ করে রাখতে শুরু করেন। শত শত বৎসর পরে প্রাপ্তবয়স্ক লোকদের মনে যুক্তির ভিত্তিতে যে জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে—সেই জ্যামিতিকে তিনি সূত্র, স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য ইত্যাদি নিয়ে শিশুদের উপযোগী করে লিপিবদ্ধ করেন।

জ্যামিতি-শিক্ষাপদ্ধতি ও মনোবিজ্ঞান :—গেস্টাল্টবাদের উন্নতির সঙ্গে সঙ্গে গণিতকে সমগ্রভাবে বুঝবার ও জানবার উপর বেশী জোর দেওয়া হয়েছে। জ্যামিতি

শুরু করা হয় সূত্র ধরে। প্রথমে বিন্দু, তারপর রেখা, তারপর সমতল ক্ষেত্র এবং সবশেষে ঘনবস্তু—এইভাবে শেখানো হয়। শিক্ষার্থী তার দৈনন্দিন জীবনে ঘনবস্তুই বেশী ব্যবহার করে থাকে। বিন্দু বা রেখার ব্যবহার খুব কমই হয়। কিন্তু জ্যামিতিতে বিন্দু বা রেখার যে সংজ্ঞা দেওয়া হয় তা কিছুটা অবাস্তব বলেই মনে হয়। আয়তন নেই—এমন বিন্দু অঙ্কন করা সম্ভব নয় বলে এ কথা বলা যেতে পারে যে জ্যামিতিক বিন্দু হচ্ছে সত্যিকারের কল্পনার বস্তু। তেমনি প্রস্থবিহীন রেখা অঙ্কন করাও অসম্ভব। এটিও কল্পনার বস্তু। এইজন্য বিন্দু ও রেখার সূত্র দিয়ে জ্যামিতি আরম্ভ করলে বিষয়টিকে একটি অবাস্তব কাল্পনিক ও বিমূর্ত জিনিস বলেই মনে হবে। পক্ষান্তরে ঘনবস্তু নিয়ে আরম্ভ করে তার অংশ হিসেবে সমতল, সমতলের অংশ হিসেবে রেখা, রেখার অংশ হিসেবে বিন্দু - এইভাবে আলোচনা করলে বিষয়টি মূর্ত হয়ে উঠবে এবং বিষয়টির সমগ্র বাস্তব রূপটিও ছাত্রের নিকট পরিষ্কারভাবে ফুটে উঠবে।

গণিত শিক্ষণে প্রেষণার প্রয়োজন অত্যন্ত বেশী। এই প্রেষণা আবার বহির্জাত ও অন্তর্জাত, এই দু'প্রকারের হতে পারে। অন্তর্জাত প্রেষণা যা ভিতর থেকে আসে তা শিক্ষার্থীর উদ্দেশ্য, আগ্রহ, প্রয়োজনীয়তাবোধ ইত্যাদির উপর নির্ভরশীল। বহির্জাত প্রেষণা যা বাইরে থেকে আসে তা যে পরিস্থিতিতে শিক্ষার্থী শেখে, সেই পরিস্থিতি থেকে অর্থাৎ বাইরে থেকে আসে। সাধারণতঃ পরীক্ষাতে কৃতিত্ব, অন্যের সঙ্গে প্রতিযোগিতা, পুরস্কার, শিক্ষকের প্রশংসা ইত্যাদি থেকেই এই জাতীয় প্রেষণা আসে। অপরদিকে তিরস্কার, ব্যঙ্গ, ভয় দেখানো—এগুলি প্রেষণার বিপক্ষে কাজ করে থাকে। শিক্ষার ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর আগ্রহ অত্যন্ত প্রয়োজনীয় জিনিস। কোন কাজ করতে গিয়ে যখন সেটি ঠিকমত হতে থাকে তখন শিক্ষার্থী আনন্দ লাভ করে। এবং কাজ করতে আরো বেশী আগ্রহ বোধ করে। গণিতের কোন সমাধান করতে পারলে বা জ্যামিতির কোন উপপাদ্য যথাযথ ভাবে প্রমাণ করতে পারলে ছাত্র একটা আত্মপ্রসাদ লাভ করে থাকে এবং তার মনে প্রেষণার সঞ্চার হয়।

জ্যামিতি শিক্ষা দু'রকম ভাবে দেওয়া যেতে পারে—এক হচ্ছে যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসরণ করে (logical) এবং অপরটি হচ্ছে মনস্তত্ত্বের ধারা অনুসরণ করে (Psychological)। যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসরণ করে শিক্ষা দেওয়ার অর্থ হল বিষয়টিকে এমনভাবে সাজিয়ে নেওয়া যাতে সমগ্র বিষয়টি যুক্তির দিক দিয়ে ধারাবাহিক হয়। বিষয়টি বোঝানো হয় একটির পর একটি যুক্তি দিয়ে। বিষয়টিকে যুক্তি অনুসারে বিভিন্ন অংশে, বিভিন্ন প্রসঙ্গে ভাগ করে, পরিচ্ছেদ বা অধ্যায় অনুসারে সাজিয়ে শিক্ষা দেওয়া হয়। সমস্ত বিষয়টি একটা পূর্বপরিকল্পনা অনুসারে সাজিয়ে নেওয়া হয়। এ পদ্ধতিতে শিক্ষকের মনোযোগ বিষয়টির উপরেই নিবদ্ধ থাকে। কিন্তু মনস্তত্ত্বের ধারা অনুসরণ করে শিক্ষা দিতে গেলে শিক্ষার্থীর প্রয়োজন অনুসারে বিষয়, প্রসঙ্গ, শিক্ষার ধারা প্রভৃতি স্থির করা হয়। শিক্ষার্থীর যখন যে বিষয়টি জানার প্রয়োজন হয়, তখন সেই বিষয়টি উপস্থাপিত করা হয়। পূর্ব নির্ধারিত কোন পরিকল্পনাও থাকে না। এই

পদ্ধতিতে শিক্ষা দেবার আগে শিক্ষার্থীর আগ্রহ, তার সুপ্ত ক্ষমতা, মেজাজ, পছন্দ-অপছন্দ ইত্যাদি সব কিছু লক্ষ্য করা হয়। শিক্ষক শিক্ষার্থীর মনের ধারা বুঝতে চেষ্টা করেন। কি রকম করে শেখালে শিক্ষার্থী আগ্রহান্বিত হবে, কি করে পাঠ চিত্তাকর্ষক করে তোলা যাবে এ সমস্ত বিষয় বিবেচনা করে দেখা হয়। এ পদ্ধতিতে শিক্ষার্থী নিজের চেষ্টাতেই শিক্ষালাভ করে।

এতদিন যে পদ্ধতিতে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়েছে তা হল যুক্তিযুক্ত ধারা অনুসৃত পদ্ধতি। কিন্তু এই পদ্ধতি শিক্ষার্থীদের উপযোগী ছিল না। এই পদ্ধতিতে সে তার নিজের উদ্দেশ্য সাধনের চেষ্টা খুঁজে পায় না, আর নিজের অভিজ্ঞতা থেকে কোন জ্ঞানও অর্জন করতে পারে না। ছাত্রকে বিষয়টি আয়ত্ত করার জন্য মুখস্থ করার পদ্ধতি অবলম্বন করতে হয়, ফলে সমস্ত বিষয়টি নীরস ও কঠিন মনে হয়। এইজন্য অনেকে বিষয়টি হাতে-কলমে শিক্ষা দেওয়ার পক্ষপাতী। সমস্ত বিষয়টি সম্বন্ধে একটা পরিষ্কার ধারণা গড়ে তোলার পর যদি সে যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা করে, তখন যুক্তির ধারা সে কিছু কিছু বুঝতে পারবে। আবার অনেকে অযথা অনেক সময় নষ্ট হবে, এই অজুহাতে হাতে কলমে শিক্ষা দেওয়ার বিরোধী।

বর্তমানে অনেক গণিতবিদ জ্যামিতি শিক্ষা দেবার সময় দু'টি বিষয়ের উপর গুরুত্ব আরোপ করে থাকেন। সে দুটি বিষয় হল—(১) স্বতঃলব্ধ জ্ঞান বা স্বজ্ঞা (Intuition) এবং (২) কয়েকটি বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া (Induction)। যে সমস্ত সম্পাদ্য বা উপপাদ্য স্বজ্ঞা দ্বারাই বোঝা সম্ভব, সেখানে 'প্রমাণ' হল একটা বাড়তি বোঝা। এতে অযথা অনেক সময় নষ্ট হয় ও অনেক ক্ষেত্রেই অনর্থক অতিরিক্ত পরিশ্রম করতে হয়। এ রকম ক্ষেত্রে প্রমাণের চেষ্টা না করে স্বতঃসিদ্ধ বলে ধরে নিয়ে বিষয়টিতে এগিয়ে যাওয়াই সমীচীন। জ্যামিতির ইতিহাস পর্যালোচনা করলেও এই স্বজ্ঞার যথেষ্ট ব্যবহার দেখা যায়। ইউক্লিডের অনেক আগেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে। তখন স্বজ্ঞাই ছিল প্রশস্ত উপায়। ইউক্লিড কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে প্রমাণ করতে গিয়ে এমন কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য প্রভৃতির সাহায্য নিয়েছেন, যেগুলি অনেক বেশী কঠিন বলেই মনে হয়। অবশ্য কেবলমাত্র স্বজ্ঞার সাহায্যেই সব কাজ করা হ'ত না। আরোহী পদ্ধতির উপর ভিত্তি করেই জ্যামিতি অগ্রসর হতে পেরেছিল। হাতে-কলমে কতকগুলি কাজ করার মধ্যে বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্তে উপনীত হতে পারা যেত। অবশ্য একটি কিংবা দু'টি দৃষ্টান্তের সাহায্যে সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারা যেত না। অনেকগুলি দৃষ্টান্ত পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষা করে তবেই একটা সিদ্ধান্তে আসা সম্ভব হ'ত। দৃষ্টান্তের সংখ্যা যত বেশী হ'ত, সিদ্ধান্তের সত্যতাও তত বেশী হ'ত।

জ্যামিতি শিক্ষার প্রয়োজনীয়তা ঃ—জ্যামিতি শিক্ষার প্রয়োজনীয়তার কথা অস্বীকার করা যায় না। কেবলমাত্র ব্যবহারিক মূল্যই নয়, কৃষ্টিমূলক বা শৃঙ্খলামূলক মূল্যও বিষয়টির যথেষ্ট। ব্যক্তির কৃষ্টিমূলক বিকাশের জন্য জ্যামিতির অবদান কম নয়। বিশুদ্ধ চিন্তা বলতে যা বোঝায়, তার প্রকৃতি ও ক্ষমতার সঙ্গে পরিচিত হওয়া যায় এই

বিষয়টি পাঠের মাধ্যমে। কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধ বা ধারণার উপর ভিত্তি করে ছাত্র যুক্তিযুক্ত বিচার করার একটি ধারা গড়ে তুলতে পারে। জ্যামিতি চর্চার ফলে বুদ্ধির বিকাশ ঘটে এবং বিচারকরণের ক্ষমতাও বাড়ে। তা ছাড়া বিষয়টি পাঠের ফলে নূতন উপায় উদ্ভাবন করার দক্ষতা বা তৎপরতাও বৃদ্ধি পায়; সৌন্দর্যমূলক জ্ঞানও বিকশিত হয়। বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে সামঞ্জস্য নির্ণয় করার ক্ষমতা অর্জন বা সরলরেখা ও বক্ররেখার সাহায্যে সুন্দর চিত্র অঙ্কন করার ক্ষমতা অর্জিত হয় এই বিষয়টি চর্চার দ্বারা। কিন্তু খুবই দুঃখের বিষয়, আমাদের দেশের বিদ্যালয়গুলিতে জ্যামিতি ঠিকমত শেখানো হয় না—মুখস্থ করানো হয়। ছাত্ররা সম্পাদ্য, উপপাদ্য বা সমস্যাগুলির অঙ্কন ও প্রমাণ যান্ত্রিকভাবে মুখস্থ করে থাকে। সংশ্লেষণ বা বিশ্লেষণ করার ক্ষমতাকে কাজে লাগাবার কোন সুযোগই তাদের দেওয়া হয় না। এতে জ্যামিতি শিক্ষণের আসল উদ্দেশ্যই নষ্ট হয়ে যায়।

জ্যামিতি শিক্ষণের সাধারণ **উদ্দেশ্যগুলিকে** মোটামুটি তিনভাবে ব্যক্ত করা যায়।

(১) অধিক সংখ্যক জ্যামিতিক তত্ত্ব ও তথ্যের সঙ্গে ছাত্রদের পরিচিত করা;

(২) বিভিন্ন তত্ত্ব ও তথ্যের মধ্যে যে যুক্তিযুক্ত সম্বন্ধ আছে, তা বুঝতে ছাত্রদের সাহায্য করা; এবং

(৩) এই সমস্ত তত্ত্ব ও তথ্য ঠিকমত প্রয়োগ করার শিক্ষা দেওয়া।

জ্যামিতির কাজ বা জ্যামিতিক শিক্ষার উদ্দেশ্য সব শ্রেণীতে একই থাকে না। বিভিন্ন শ্রেণীতে এই উদ্দেশ্য বিভিন্নভাবে রূপায়িত করার চেষ্টা করা হয়। ছাত্রদের মানসিক বয়স ও পরিমাণের উপর এই উদ্দেশ্যগুলি নির্ভর করে থাকে। প্রথমে দেখা যাক নিম্ন মাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতির কাজ কি! এই স্তরটি অষ্টম শ্রেণী পর্যন্ত প্রসারিত ধরা যেতে পারে। বিদ্যালয়ে আসার পূর্বেও ছাত্র জ্যামিতি সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান বা ধারণা অর্জন করে থাকে। এই খণ্ড খণ্ড বিক্ষিপ্ত জ্ঞানকে সুসংগঠিত করাই হবে এই স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার মূল উদ্দেশ্য। ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানকে আবার জ্যামিতির ব্যাপক ও সাধারণীকৃত জ্ঞানের সঙ্গে যুক্ত করতে হবে। এই ব্যাপক ও সাধারণীকৃত জ্ঞান যদি দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হয়, তবে আরো ভালো হয়। এই স্তরে ছাত্রদের জ্যামিতির মূল ধারণা ও মৌলিক কৌশলগুলির সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া হয় এবং অবরোহী পদ্ধতিতে বিচার করার প্রাথমিক জ্ঞান আয়ত্ত করতেও তাকে সাহায্য করা হয়। প্রথমদিকে অবশ্য জ্যামিতিক তত্ত্বগুলি বাস্তব জগৎ থেকেই নির্বাচিত করা হয় এবং ম্যাপ, মডেল, পরিমাপ প্রভৃতির মাধ্যমেই জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়।

এবার দেখা যাক, উচ্চ মাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য কি? এই স্তরটিকে নবম শ্রেণী থেকে শুরু করে একাদশ শ্রেণী পর্যন্ত বিস্তৃত বলে ধরা যেতে পারে। এই স্তরে জ্যামিতি শিক্ষার উদ্দেশ্য হল ছাত্রদিগকে জ্যামিতির যুক্তিসম্মত চিন্তাধারার সঙ্গে পরিচিত করা; যাতে তারা স্বাধীন ভাবে সুস্পষ্ট চিন্তা করতে

শেখে, মূল্যায়নের সঠিক পদ্ধতিগুলির সঙ্গে পরিচিত হয় এবং ঠিক ভাবে সাধারণীকরণ করতে পারে। এই স্তরে কিভাবে সত্য আবিষ্কার করা যেতে পারে তার সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় করানো হয়। গণিতের সমস্যা এবং সমস্যার সঠিক সমাধানের পন্থা নির্ণয়ের কৌশলগুলিও এই স্তরে ছাত্রকে শেখানো হয়। ছাত্র পরিস্থিতিটি বিশ্লেষণ করতে শেখে, পরিস্থিতির অন্তর্গত বিভিন্ন অংশের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করতে শেখে এবং জ্যামিতিক ও অ-জ্যামিতিক ভাব ও ধারণাগুলি পরিষ্কারভাবে ও সঠিকভাবে প্রকাশ করতে শেখে। পূর্বে মনে করা হ'ত জ্যামিতি চর্চার ফলে মানসিক ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। কিন্তু বর্তমান কালে মনোবিজ্ঞানীরা বলে থাকেন কেবলমাত্র জ্যামিতি চর্চার ফলেই মানসিক শক্তি বা ক্ষমতা বৃদ্ধি পায় না—এর জন্য আরো অনেক বিষয়ের চর্চা করা প্রয়োজন।

ইউক্লিড পড়ানো ও ইউক্লিডের মতো পড়ানোঃ—ইউক্লিড ছিলেন আলেকজান্দ্রিয়া শহরের একজন বিখ্যাত গণিতবিদ। তিনি Elements নামক ১৩ খণ্ডের একটি পুস্তক রচনা করেন। ১৩ খণ্ডের মধ্যে ১ম থেকে ৪র্থ, ৬ষ্ঠ, এবং ১১শ থেকে ১৩শ খণ্ড হল জ্যামিতি সম্বন্ধীয়। ইউক্লিডের যুগে তাঁর পুস্তকের যথেষ্ট সমাদর থাকলেও বর্তমান কালে তার অনেক কঠোর সমালোচনা করা হয়েছে। 'ইউক্লিড পড়ানো' (Teaching Euclid) এবং ইউক্লিডের মতো পড়ানোর (Euclid Teaching) মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য আছে। ইউক্লিড পড়ানোর অর্থ হল ইউক্লিডের Element-এর অন্তর্নিহিত ভাব বা ধারণাগুলি বুঝতে ছাত্রদের সাহায্য করা। আর ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অর্থ হল প্রথমে সংজ্ঞা দিয়ে পাঠ শুরু করে তারপর স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য প্রভৃতির মাধ্যমে উপপাদ্যে উপনীত হওয়া। ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অনেকগুলি অসুবিধা আছে বলে ইউক্লিড পড়ানোর উপর বেশী জোর দেওয়া উচিত। ইউক্লিডের মতো পড়ানোর অসুবিধাগুলি সংক্ষেপে হল :—

(১) শিক্ষণের প্রক্রিয়াটি মনোবিজ্ঞানসম্মত নয়।

(২) জ্যামিতির ব্যবহারিক দিকটি সম্পূর্ণ উপেক্ষিত ও অবহেলিত থাকে।

(৩) ইউক্লিডের কতকগুলি ধারণা ছিল ভুল।

(৪) নিখুঁত ও বাস্তব বিজ্ঞানের প্রাথমিক বৈশিষ্ট্যগুলি ইউক্লিডের পদ্ধতিতে উপলব্ধি করা যায় না। তা ছাড়া প্রথমেই কতকগুলি সংজ্ঞা মুখস্থ করে যে বিচ্ছিন্ন জ্ঞান অর্জিত হয়, তাতে জ্যামিতি সম্বন্ধে পূর্ণ জ্ঞান লাভ করা সম্ভব হয় না।

যাই হোক, এখন 'ইউক্লিডের' পদ্ধতি সম্বন্ধে একটু বিশদভাবে আলোচনা করা যাক। ইউক্লিডের পদ্ধতিকে **যুক্তিসম্মত পদ্ধতি** (Logical method) বলা হয়ে থাকে। তিনি জ্যামিতি শিক্ষণের ক্ষেত্রে প্রধানতঃ যুক্তি, সিদ্ধান্ত ইত্যাদির প্রাধান্যই স্বীকার করে নিয়েছেন। তাঁর পদ্ধতি শিশুমনের পক্ষে খুব বেশী গ্রহণযোগ্য হয়নি, বরং বলা যেতে পারে, ঐ পদ্ধতি বয়স্কদের উপযোগী। সে যুগে অবশ্য শিশু-শিক্ষার এত প্রসার ঘটেনি। কাজেই বলা যেতে পারে, বয়স্কদের উপযোগী করে এবং বয়স্কদের প্রয়োজন অনুযায়ী ইউক্লিডের পদ্ধতির উদ্ভব হয়েছিল।

আগেই বলা হয়েছে, ইউক্লিডের পদ্ধতি শুরু হয় কতকগুলি জ্যামিতিক আকারের সংজ্ঞা দিয়ে। প্রথমে বিন্দু, তারপর রেখা, তল, কোণ ইত্যাদি সম্বন্ধে আলোচনা করা হয় ও সেগুলির সংজ্ঞা দেওয়া হয়। আবার এই সংজ্ঞাগুলি সম্বন্ধে কতকগুলি চিরন্তন সম্বন্ধ স্থির করে নেওয়া হয়, যেগুলি প্রমাণের কোন অপেক্ষা রাখে না বা যেগুলি ঠিকমত প্রমাণ করাও যায় না। এগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্য** (Postulates) বলা হয়। ইউক্লিড এই সমস্ত সংজ্ঞা ও স্বীকার্যগুলির সাহায্য নিয়ে অবরোহী পদ্ধতিতে জ্যামিতিক আকার সম্বন্ধীয় বহু সূত্র গঠন করেন।

ইউক্লিডের পদ্ধতি শৃঙ্খলামূলক মূল্যের জন্যই প্রসিদ্ধ—এতে জ্যামিতির বাস্তব মূল্যকে কোন স্থানই দেওয়া হয় না। তবে ইউক্লিড মনে করতেন যে এই পদ্ধতির সাহায্যে বিভিন্ন জাতীয় মানসিক ক্ষমতা, যেমন চিন্তা করা, ধারণা করা, বিচার করা ইত্যাদি বিকশিত হয়। এগুলি ছাড়াও এই পদ্ধতিতে সত্যনিষ্ঠা, মনোযোগ, আত্ম-প্রত্যয়, জ্যামিতিক নিয়ম ইত্যাদির চর্চার সুযোগ যথেষ্ট আছে বলেই মনে করা যায়।

কিন্তু সত্যসত্যই এই গুণগুলি বিকশিত হয় কিনা সে সম্বন্ধে আধুনিক মনো-বিজ্ঞানীরা যথেষ্ট আস্থাশীল নন। তাঁদের মতে—ইউক্লিডের পদ্ধতিটি শিশুমনের উপযোগী তো নয়ই, বরং সম্পূর্ণ অনুপযোগী ও অমনোবৈজ্ঞানিক। শিশুরা মূর্ত জিনিসের সাহায্যে অমূর্ত জ্ঞান অর্জন করে। কিন্তু ইউক্লিডের পদ্ধতিতে তারা প্রথমেই অমূর্ত জ্ঞানের সম্মুখীন হচ্ছে। এর ফলে সেই জ্ঞান তাদের বোধগম্য হচ্ছে না। বিষয়বস্তুটি উপলব্ধি বা হৃদয়ঙ্গম করতে না পেরে তারা মুখস্থ করতে বাধ্য হয়। অর্থাৎ পদ্ধতিটি পরোক্ষভাবে মুখস্থ করাকে উৎসাহিত করে। যারা বেশী মুখস্থ করতে পারে তারাই বেশী জ্যামিতি বুঝেছে বলে ধরে নেওয়া হয়। যাদের মুখস্থ করার ক্ষমতা কম, তারা বিষয়টিতে দুর্বল হয়ে পড়ে। অর্থাৎ এই পদ্ধতিটি বিমূর্ত চিন্তন বা নৈর্ব্যক্তিক চিন্তনের পথটি সম্পূর্ণ রুদ্ধ করে দেয়। অন্যান্য ক্ষমতাগুলিও ঠিকমত বিকশিত হয় না। মূর্ত জিনিস ও মূর্ত অভিজ্ঞতার অভাবে অমূর্ত জ্যামিতি তার সংজ্ঞা ও স্বীকার্য নিয়ে শিশুর কাছে একটা বিভীষিকা হয়ে পড়ে। বার বার পড়ার ফলে সে হয়তো সংজ্ঞাগুলির ভাষামূলক অর্থ আয়ত্ত করে। কিন্তু তাদের যুক্তিযুক্ত সঙ্গতি বা কঠোর নিয়মানুবর্তিতা সম্বন্ধে কোন ধারণা গড়ে তুলতে পারে না। সংজ্ঞাগুলি তার কাছে বেশ জটিল হয় বলে সে ক্রমশঃ সমস্ত জ্যামিতিকেই একটা জটিল বিষয় বলে মনে করতে শুরু করে।

আধুনিক বা মনোবিজ্ঞানসম্মত (Psychological) পদ্ধতি অনুযায়ী জ্যামিতি শিক্ষার সোপান বা স্তর :—

জ্যামিতি শিক্ষার প্রাথমিক স্তর :—কোন শিক্ষাকে কার্যকরী করতে হলে শিক্ষার উদ্দেশ্যটি শিক্ষার্থীকে পরিষ্কার ভাবে বুঝিয়ে দিতে হবে। জ্যামিতি শিক্ষার প্রথম স্তরে শিক্ষার্থীদের বুঝতে দেওয়া দরকার—কেন তারা বিষয়টি শিখবে। কোন্ দেশে, কখন এবং কি ভাবে জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে তা শিশুদের বয়সের উপযোগী করে বললে শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারবে যে প্রয়োজনের তাগিদেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে।

প্রাথমিক স্তরে শিশুর চারপাশে যে সমস্ত জিনিস আছে, সেগুলির সাহায্যে তাকে বিভিন্ন জ্যামিতিক আকারের সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া হবে। এই স্তরে শিক্ষাটা হবে অনেকটা শিশুর অজ্ঞাতসারেই। অভিজ্ঞতার মাধ্যমেই ছাত্র জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবে এবং এই স্তরে যান্ত্রিক প্রমাণের কোন প্রয়োজন হবে না। বিভিন্ন জ্যামিতিক নাম ও Instrument Box-এর ব্যবহার এ স্তরে শেখানো যেতে পারে।

পরবর্তী স্তরে স্বভাবসিদ্ধ জ্ঞান বা Intuition-এর প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। যে সমস্ত ঘটনা অবশ্যম্ভাবী সেগুলিকে স্বতঃপ্রমাণিত (স্বতঃসিদ্ধ) বলে ধরে নেওয়া হয় এবং যেটি আগে ঘটেনি বা যার সম্বন্ধে আগে কোন চিন্তা করা হয়নি, সেই রকম ঘটনার সত্যতা প্রমাণ করার জন্য যুক্তি প্রয়োগ করা হয়। এই স্তরে সামঞ্জস্য নির্ণয় করা এবং বিভিন্ন আকার ও আয়তনের মধ্যে তুলনা করার উপর বেশী জোর দেওয়া হয়। তা ছাড়া, এ স্তরে আরোহী প্রণালীর অনুসরণও করা হয়। এক কথায় বলা যেতে পারে, এ-স্তরে কতকগুলি জ্যামিতিক তথ্য সংগ্রহ ও ব্যবহার করা হয়।

জ্যামিতি শিক্ষার তৃতীয় স্তরে ঐ সমস্ত জ্যামিতিক তথ্যকে একটি যুক্তিযুক্ত ধারাবাহিকতা অনুযায়ী একত্র করা হয়। কিছু কিছু যৌক্তিক ধারাবাহিকতার জ্ঞান ছাত্র ইতিমধ্যেই অর্জন করেছে। কতকগুলি উপপাদ্যকে একত্র করে এক-দলভুক্ত করা হয় এবং তার একটিকে প্রাধান্য দেওয়া হয়।

আলোচনার সুবিধার জন্য এবং সংগঠনের সরলতার জন্য জ্যামিতির পাঠক্রমকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়। অবশ্য এই ভাগ বিষয়বস্তু অনুসারে হতে পারে, আবার শিক্ষণ পদ্ধতি অনুসারেও হতে পারে। ইউক্লিড বিষয়বস্তু অনুসারে স্তর-বিন্যাসের পক্ষপাতী ছিলেন, কিন্তু এই পদ্ধতিতে সাধারণ ছাত্ররা অবহেলিত হয় বলে এটি গ্রহণযোগ্য নয়। যাই হোক, জ্যামিতির বিভিন্ন স্তরগুলিকে নিম্নলিখিত ভাবে ভাগ করা হয়:—

(১) পরীক্ষণমূলক স্তর (Experimental Stage), (২) কারণ দেখে কার্য নির্ণয়াত্মক বা অবরোহী স্তর (Deductive Stage) এবং (৩) নিয়মানুগ স্তর (Systematising Stage)।

পরীক্ষণমূলক স্তর :—এই স্তরে শিক্ষাদান প্রণালী মূলতঃ নিরীক্ষার মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে। ছাত্রকে জ্যামিতির সাধারণ ধারণা, নাম ও চিত্রের সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া হয়। জ্যামিতিক যন্ত্রপাতিগুলির মধ্যে যেগুলি সহজ ও সরল, সেগুলির ব্যবহারও ছাত্রকে শেখানো হয়। কেবলমাত্র মৌখিক পদ্ধতিতে শিক্ষাদান করা হয় না; বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ও দৈনন্দিন অভিজ্ঞতার মাধ্যমে ছাত্রদিগকে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়। জমি মাপ করা, খেলার জন্য মাঠের সীমানা নির্দিষ্ট করা ইত্যাদি কাজের মাধ্যমে জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া হয়। জ্যামিতি শিক্ষার এই স্তরে জ্যামিতিক শব্দগুলির সংজ্ঞা বিশেষ ভাবে দেওয়ার চেষ্টা করা দরকার। আগে পূর্ব নির্ধারিত কতকগুলি সংজ্ঞা ছাত্রকে মুখস্থ করানো হ'ত। এই স্তরে নিজের হাতে পরীক্ষা করে অভিজ্ঞতার মাধ্যমে শিক্ষার্থী নিজে নিজেই সূত্র তৈরী করবে। যে সমস্ত জ্যামিতিক তথ্য ছাত্রকে

শেখানো হবে, সেগুলি বাস্তব-জগতের সঙ্গে সম্বন্ধ রেখে শেখানো দরকার। অবশ্য এর জন্য নানাবিধ ম্যাপ, মডেল, ও যন্ত্রপাতির প্রয়োজন হয়। জ্যামিতির সঙ্গে কিছু পরিচয় হলে জ্যামিতিক চিত্রগুলির ভিতর শিক্ষার্থীরা সৌন্দর্যের আভাস পায় এবং তখন সে চিত্রগুলিকে চিত্র হিসাবে গ্রহণ করতেই আগ্রহবোধ করে। এইজন্য এই বিষয়টির প্রথম উপস্থাপন হাতে-কলমে কাজের ভিতর দিয়ে করাই বাঞ্ছনীয়। শিক্ষার্থীদের আগ্রহ ধীরে ধীরে বিমূর্ত চিত্রগুলিতে যাবে। তবে এ পরিবর্তন হঠাৎ আসে না। জ্যামিতির বিভিন্ন সংজ্ঞাগুলিকে ব্যবহারিক ভাবে আগে প্রয়োগ করতে হবে। কোণ, বাহু, ত্রিভুজ, লম্ব, বিন্দু, সরলরেখা সমান্তরাল সরলরেখা ইত্যাদির সংজ্ঞা মুখস্থ না করিয়ে বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদিগকে শিক্ষা দেওয়া উচিত।

কারণ দেখে কার্য নির্ণয়াত্মক স্তর :—জ্যামিতি শিক্ষার প্রথম স্তরে ছাত্ররা বিন্দু, রেখা ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করেছে। তারা কতকগুলি জ্যামিতিক চিত্র আঁকতে শিখেছে। এইবার জ্যামিতি শিক্ষার দ্বিতীয় স্তরে শিক্ষার্থীরা ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদির কোণ, বাহু প্রভৃতির বিশেষ বিশেষ ধর্মগুলি শিখবে। ছাত্র এই স্তরে উপপাদ্য ও নূতন সমস্যার (Rider) প্রমাণ করতে শেখে এবং সেই প্রমাণগুলি লিখতেও শেখে। অবশ্য জ্যামিতি বলতে এই স্তরে সাধারণ সমতল জ্যামিতিকেই (Elementary plane geometry) বোঝায়। নিয়মানুগ পদ্ধতিতে জ্যামিতি শিক্ষণের উপর খুব বেশী জোর এই স্তরে না দেওয়াই উচিত, কারণ ঠিক নিয়ম মেনে চলতে তখনও তারা অভ্যস্ত হয়ে উঠে না। ছাত্ররা স্বাধীনভাবে জ্যামিতিক সত্য আবিষ্কার করাতেই বেশী আনন্দ পায়। সেইজন্য যে সমস্ত উপপাদ্য, সমস্যা বা সিদ্ধান্ত সত্য বলে প্রতীয়মান হবে, সেগুলিকে নিয়ম মতে প্রমাণ করতে না শিখিয়ে ছাত্রদিগকে অজানা সত্য আবিষ্কার করতে উৎসাহী করে গড়ে তুলতে হবে এবং সেইজন্য প্রয়োজনীয় সুপরিচালনার ব্যবস্থাও করতে হবে। অবরোহী পদ্ধতিতে শিক্ষা দিলেই ভালো হয়, তবে আরোহী পদ্ধতির ও স্বজ্ঞার ব্যবহারও করতে হবে। বিভিন্ন প্রকার পরীক্ষণের সাহায্যে, বিভিন্ন পরিমাপের মাধ্যমে এবং আরোহী প্রণালী ও স্বজ্ঞার প্রয়োগ করে ছাত্র জ্যামিতির অজ্ঞাত রহস্যের যে জগৎ, তার অনেক ভিতরে প্রবেশ করে। এই স্তরের শেষদিকে ছাত্র সমতল জ্যামিতির সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক উপপাদ্যগুলির সঙ্গে পরিচিতি হবে, সেগুলি অঙ্কন করতে শিখবে ও সহজ সমস্যার সমাধান করতে শিখবে। ধীরে ধীরে তাকে ঘন-জ্যামিতির (Solid Geometry) সঙ্গেও পরিচিত করা হয় এবং যুক্তিযুক্ত পদ্ধতি (Logical method) বলতে কি বুঝায়, তাও তাকে বুঝিয়ে দেওয়া হয়। তার নিজস্ব ধারণার উপর ভিত্তি করেই তার জ্ঞানের 'সৌধ' গড়ে উঠবে—তবে এই ধারণা তার মানসিক বিকাশের উপযোগী হওয়া চাই। মোট কথা, এই স্তরে একেবারে বিমূর্ত চিত্র বা ধারণা নিয়ে কাজ না করে ছাত্র যেগুলি সহজে বুঝতে পারে এবং যেগুলিতে বেশী উৎসাহ বোধ করে সেই সমস্ত মূর্ত ও বাস্তব চিত্র ও ধারণা নিয়ে কাজ শুরু করাই ভালো।

নিয়মানুগ স্তর :—জ্যামিতি শিক্ষার দ্বিতীয় স্তরে কতকগুলি জ্যামিতিক

তথ্য সংগ্রহ করা হয় এবং সেগুলি ব্যবহারও করা হয়। নিয়মানুগ স্তরে একটি যৌক্তিক ধারাবাহিকতা রক্ষা করে সেই সমস্ত তথ্যকে একত্র করা হয়। যৌক্তিক ধারাবাহিকতায় ছাত্র কিছুটা জ্ঞান অর্জন করেছে। কতকগুলি উপপাদ্যকে একত্র করে একটি দল গড়ে তোলা হয়। তারপর সেই দলের অন্তর্গত কোন একটি উপপাদ্যকে প্রাধান্য দেওয়া হয়। এই বিশেষ উপপাদ্যটি যে সবচেয়ে বেশী প্রয়োজনীয় বা সবচেয়ে বেশী আগ্রহজনক—তা কিন্তু নয়। তবে ঐ উপপাদ্যটি জানা থাকলে অন্যান্য উপপাদ্য প্রমাণ করার ক্ষেত্রে কিছুটা সুবিধা পাওয়া যায়। এই উপপাদ্যটির উপর গুরুত্ব আরোপ করতে পারলে শিক্ষার্থী যুক্তির ধারা পরিষ্কারভাবে বুঝতে পারে। বিপরীত প্রতিজ্ঞাগুলির ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করলে যুক্তির ধারা স্পষ্ট হয়। নিয়মানুগ স্তরের গোড়াতেই জ্যামিতির উপপাদ্যগুলিকে দলভুক্ত করার দিকেই বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া হয়। আসল উপপাদ্যটি জানা থাকলে কিভাবে অন্যান্য উপপাদ্যগুলি তার সাহায্যে নির্ণয় ও প্রমাণ করা যায় তার দিকেও দৃষ্টি দিতে হবে। আগের স্তরে মাত্র কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমাণ করা হয়েছিল। এই স্তরে বাকী উপপাদ্যগুলি প্রমাণ করতে হবে। এইভাবে সমস্ত জ্যামিতির মধ্যে একটা ধারাবাহিকতা বা নিয়ম আনতে হবে। জ্যামিতি সম্বন্ধে ছাত্র যে জ্ঞান অর্জন করেছে এই স্তরে অন্তর্পূর্তির (Consolidation) মাধ্যমে সেই জ্ঞান সম্পূর্ণ হবে। এই স্তরের বিপরীত প্রতিজ্ঞা-গুলির ধর্ম কতকগুলি পাঠের ভিতর দিয়ে দেওয়া যেতে পারে। যুক্তির ধারার দিক দিয়ে ছাত্রদিগকে দু'টি জিনিস শেখানো যায়। একটি হল, সমস্ত বিপরীত প্রতিজ্ঞাই সত্য নয়। আর দ্বিতীয়টি হল, A যে সত্য, তা প্রমাণ করতে গেলে যদি B-র সত্যতা ধরে নিতে হয়, তবে B-র সত্যতা প্রমাণ করার সময় A-র সত্যতা যে ধরে নিতেই হবে এমন কোন কথা নেই। ছাত্র তার আবিষ্কার-লব্ধ জ্ঞান থেকে সাধারণীকৃত সত্যে (generalised truth) যাতে পৌঁছাতে পারে তার জন্য প্রয়োজনীয় সুযোগের ব্যবস্থা করে দেওয়া হবে এই স্তরে। অবশ্য কোন একটি বিবৃতি নিয়মানুগ ভাবে লিখে প্রকাশ করার সর্বশেষ স্তর হল নিয়মানুগ স্তর। পাঠ-দানের সময় বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্যে অগ্রসর হতে পারলেই ভালো হয়।

নিয়মানুগ স্তরে প্রমাণের চারিটি অংশ থাকে, সেগুলি হল :—

(১) **প্রকল্প** (Hypothesis) :—এটি হল প্রদত্ত তথ্য। সাধারণতঃ প্রদত্ত তথ্যের সারাংশ (চিত্রের সাহায্যে ও জ্যামিতির ভাষায়) এই অংশে দেওয়া হয়ে থাকে।

(২) **সিদ্ধান্ত** (Conclusion) :—সিদ্ধান্ত হল যা প্রমাণ করতে হবে সেই অংশ। এই স্তরেও চিত্রের সাহায্যে বিষয়বস্তুটিকে (যা প্রমাণ করতে হবে) পরিষ্কার ভাবে অথচ সংক্ষেপে বিবৃত করা হয়।

(৩) **অঙ্কন** (Construction) :—এ হল প্রকল্প অনুযায়ী চিত্র। অবশ্য অনেক ক্ষেত্রে প্রমাণের সুবিধার জন্য অতিরিক্ত অংশ চিত্রে সন্নিবিষ্ট করতে হয়। সেগুলিও এই স্তরে বিবৃত করা হয়।

(৪) **প্রমাণ** (Proof) :—এই স্তরে যুক্তিসম্মত অনুসিদ্ধান্তগুলি গ্রহণ করা

হয়। প্রত্যেকটি বিবৃতির যুক্তি দেখাতে হয় এবং সিদ্ধান্তে পৌছে এই স্তরে কাজ শেষ হয়।

কিভাবে জ্যামিতি শুরু করা হবে?—'কিভাবে জ্যামিতি শুরু করা যাবে? —এ প্রশ্ন বোধহয় সর্বদেশের সর্বকালের প্রশ্ন। অবশ্য এর উত্তর সম্বন্ধেও এখন আর শিক্ষাবিদদের মধ্যে দ্বিমত নেই। এ ব্যাপারে তাঁরা সকলেই একমত যে জ্যামিতি শুরু করা হবে ব্যবহারিক কাজের মধ্য দিয়ে। প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে উপপাদ্যের প্রমাণ তাদের শেখানো হবে না। আবার মৌখিক পদ্ধতিতে ছাত্রদের জ্যামিতির সংজ্ঞা বা বিমূর্ত ধারণাগুলি মুখস্থ করানোও হবে না। দৈনন্দিন জীবনের বাস্তব সমস্যাগুলির সাহায্যেই জ্যামিতি শিক্ষার সূত্রপাত হবে। এ-ব্যাপারে প্রথমেই আসে জমি মাপ করার পদ্ধতি, যাকে সাধারণ ভাবে বলা হয়—বয়-স্কাউট জ্যামিতি। ছাত্রদিগকে জানা জিনিসের সাহায্যে অজানা জিনিসের দিকে এগিয়ে নিয়ে যাওয়া হয়। কোণ, বিন্দু, সমান্তরাল সরলরেখা, ত্রিভুজ ইত্যাদি সম্বন্ধে তাকে শিক্ষা দেওয়া হবে। ছাত্র পরীক্ষণের মাধ্যমে এবং বাস্তব পরিমাপের সাহায্যে বিভিন্ন ধারণার সঙ্গে পরিচিত হবে এবং সংজ্ঞাগুলির সত্যতা ও যথার্থতা যাচাই করবে। বাস্তব উদাহরণের সাহায্যেও জ্যামিতির সংজ্ঞাগুলি ব্যাখ্যা করা যায়। যেমন—গরুর গাড়ীর চাকা বা সাইকেলের চাকার সাহায্যে বৃত্ত, রেল লাইনের সাহায্যে সমান্তরাল সরলরেখা, ঘরের দেওয়ালের সংযোগস্থলের সাহায্যে কোণ ইত্যাদি ব্যাখ্যা করা চলে। তা ছাড়া ছাত্ররা নিজেরাও ছবি এঁকে বৃত্ত, ত্রিভুজ, সমান্তরাল সরলরেখা, একান্তর কোণ, অনুরূপ কোণ প্রভৃতির ব্যাখ্যা করতে পারে। ব্যবহারিক কাজের পিছনে যে মনো-বিজ্ঞানসম্মত নীতিটি থাকে তা হল 'কাজের মধ্য দিয়ে শিক্ষা লাভ করা'। জ্যামিতি শিক্ষার পরীক্ষণমূলক স্তরে ছাত্রদিগকে স্বাধীনভাবে কোন পরীক্ষা করতে বলা হয় এবং তার ফলাফল নির্ণয় করতে বলা হয়। এই পরীক্ষা বা ব্যবহারিক কাজ অবশ্য শ্রেণীকক্ষের ভিতরে ও শ্রেণীকক্ষের বাইরে দু'ভাবেই করা চলে। যাই হোক, বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজের একটা তালিকা নীচে দেওয়া হল।

শ্রেণীর বাইরের ব্যবহারিক কাজ (Field work)

১। কোন একটি স্থির বিন্দুর চারিদিকে দিকনির্ণয় করা ও দূরত্বের পরিমাপ।

২। দূরত্ব ও দিকের সাহায্যে অবস্থিতি নির্ণয়।

৩। স্কেল ও ফিতার সাহায্যে মাপ করা।

৪। উচ্চতা পরিমাপ করা।

৫। ত্রিভুজ অঙ্কনের দ্বারা অবস্থিতি ও দূরত্ব নির্ণয়।

৬। ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা।

৭। কোন একটি বিন্দু থেকে বা একটি উঁচুস্থান থেকে বিভিন্ন দিকে ঢাল (Slope) নির্ণয়।

৮। বিভিন্ন জাতীয় নক্শা অঙ্কন।

শ্রেণীর ভিতরের ব্যবহারিক কাজ (Class-room work)

১। ইঞ্চি, সেন্টিমিটার ও তাদের দশমিক অংশের সাহায্যে দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

২। কোন স্থির বা নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে আর একটি বিন্দু বসানো এবং দূরত্বের সাহায্যে অবস্থান নির্ণয়।

৩। সীমারেখা বা প্রান্ত হিসাবে রেখার ধারণা অর্জন এবং রেখার ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞানলাভ করা।

৪। তল সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করা।

৫। ছক্ কাগজের বর্গাকৃতি ঘরের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা। [অনেক ছাত্রের ধারণা থাকে যে কোন জিনিস যত বেশী লম্বা হয় তার ক্ষেত্রফলও তত বেশী হয়। কিন্তু এ ধারণা ভুল। বিভিন্ন আকৃতির গাছের পাতা এনে ছক কাগজের উপর রেখে তার কিনারা বরাবর সীমারেখা টেনে বর্গাকৃতি ঘরের সংখ্যা গণনা করলেই তারা নিজেদের ভুল বুঝতে পারবে।]

৬। বৃত্ত, বৃত্তের ব্যাস প্রভৃতি সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করা, কোণ অঙ্কন করা ও তার পরিমাপ।

৭। সমান্তরাল সরলরেখার ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করা এবং একান্তর, অনুরূপ ইত্যাদি কোণ পরিমাপ করা।

৮। ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বহুভুজ ইত্যাদি অঙ্কন এবং সেগুলির কোণ সমষ্টি নির্ণয় করা এবং এর থেকে কোন সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া, যেমন :—

ত্রিভুজের বাহুসংখ্যা 3, কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ $=2\times3-4$
চতুর্ভুজের ,, 4, ,, ,, 4 ,, $=2\times4-4$
পঞ্চভুজের ,, 5, ,, ,, 6 ,, $=2\times5-4$
ষড়ভুজের ,, 6, ,, ,, 8 ,, $=2\times6-4$

এ সমস্ত উদাহরণ থেকে তারা এই সিদ্ধান্তে আসবে যে n বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলি হয় $2n-4$ সমকোণ। কোণ সম্বন্ধে জানা হয়ে গেলে কোণ ও বাহুর সঙ্গে কোন সম্বন্ধ আছে কি না ছাত্র তা নির্ণয় করবে। জ্যামিতিক সত্য সম্বন্ধে ছাত্র নিঃসন্দেহ হবে। পাঠের অগ্রগতিতে ছাত্রের একক দায়িত্ব নেই, এ ব্যাপারে ছাত্র ও শিক্ষকের যৌথ দায়িত্ব আছে। এর জন্য উপযুক্ত প্রশ্ন, উত্তর, আলোচনা প্রভৃতির প্রয়োজন হয়। পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার যত কম হয়, ততই ভালো। সঠিক পদ্ধতি, পরিষ্কার-পরিচ্ছন্নতা, নির্ভুল চিত্রাঙ্কন প্রভৃতির উপর বেশী জোর দিতে হবে। জ্যামিতি পাঠের জন্য অনুবন্ধ প্রণালীর সহায়তাও নেওয়া যেতে পারে। নিজে নিজে আবিষ্কার করার পর পাঠ্যপুস্তকে যে সমস্ত সংজ্ঞা দেওয়া আছে, সেগুলি ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে।

জ্যামিতির প্রতিপাদ্য বিষয় : জ্যামিতির প্রতিপাদ্য বিষয়গুলিকে সাধারণতঃ দু'ভাগে ভাগ করা হয়—(১) **উপপাদ্য** এবং (২) **সম্পাদ্য**। উপপাদ্য কোন একটি বিবৃতিকে প্রমাণ করতে হয়, কিন্তু সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে কতকগুলি বিশেষ

জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। প্রত্যেকটি উপপাদ্যে দু'টি অংশ থাকবেই। সে দু'টি হল—**প্রকল্প** (Hypothesis)—অর্থাৎ 'যদি' অংশ এবং **সিদ্ধান্ত** (Conclusion)—অর্থাৎ 'তবে' অংশ। কোন একটি প্রমাণিত উপপাদ্য বিশ্লেষণ করলে ৬টি বিভিন্ন অংশ পাওয়া যায়। সেগুলি হল—(১) **বিবৃতি** (statement), (২) **চিত্র** (figure), (৩) **প্রকল্প** (Hypothesis)—কি দেওয়া আছে, (৪) **সিদ্ধান্ত** (conclusion)—কি প্রমাণ করতে হবে, (৫) **অঙ্কন** (construction)—যদি প্রয়োজন হয়, এবং (৬) **নিয়মানুগ প্রমাণ** (orderly proof)।

কোন একটি উপপাদ্যকে বিভিন্ন ভাবে প্রমাণ করা সম্ভব। এইজন্য পাঠ্যপুস্তকে যে প্রমাণ দেওয়া থাকে কেবলমাত্র সেইটির উপরই জোর দিয়ে ছাত্রদের সেই প্রমাণটি শেখানো ঠিক যুক্তিযুক্ত নয়। বরং ছাত্রদিগকে আরো সহজ প্রমাণ আবিষ্কার করতেই উৎসাহ দেওয়া উচিত। তারা নিজেদের সুবিধামত প্রমাণ খুঁজে বের করবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে এই উপপাদ্যটি—**'যখন একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হয় তখন যে দু'টি কোন উৎপন্ন হয়, তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ'**'—বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। সে ক্ষেত্রে পাঠ্য-পুস্তকের বিশেষ প্রমাণটির উপর জোর দিয়ে কি লাভ! আবার তাদের সামনে বিভিন্ন রকমের প্রমাণ উপস্থিত করে যেটি তাদের নিকট সহজবোধ্য বলে মনে হবে সেই প্রমাণটি অনুসরণ করতে বলা যেতে পারে। উপরে যে উপপাদ্যটির কথা বলা হল, তার দু'রকম প্রমাণের উদাহরণ দেওয়া হল। ছাত্ররা এর থেকে যেটি সহজ বলে মনে করবে সেইটি গ্রহণ করতে পারে।

প্রথম প্রমাণ

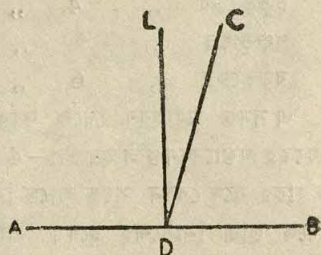
AB-র উপর LD লম্ব টানা হল।
ধরা গেল $\angle CDB$ = ১ নং কোণ.
$\angle LDC$ = ২নং কোণ এবং $\angle LDA$ = ৩নং কোণ।

স্পষ্টতঃই $\angle CDA$ = ২নং + ৩নং কোণ

$\therefore$ $\angle CDB + \angle CDA$ = $\angle$১নং + $\angle$২নং + $\angle$৩নং
= $\angle ADB$ = সরলকোণ = ২ সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রমাণঃ

$\angle CDB = \angle LDB - \angle LDC$
$\angle CDA = \angle LDA + \angle LDC$

যোগ করিয়া $\therefore \angle CDB + \angle CDA = \angle LDB + \angle LDA$
$= 90^\circ + 90^\circ$ [লম্ব বলিয়া]
$= 180^\circ = 2$ সমকোণ।

উপপাদ্য শিক্ষণের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম ঃ—প্রথম থেকে ছাত্ররা যাতে কোন একটা ধারণা না গড়ে তোলে সেদিকে বিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে। বিবৃতি-গুলি তারা যেন পরিষ্কারভাবে চিত্রের মাধ্যমে ফুটিয়ে তুলতে পারে। একেবারে অজানা জিনিস দিয়ে শুরু করলে ফল ভালো হয় না বলে জানা থেকে অজানাতে গেলেই ভালো হয়। ছাত্রদের পাঠের আগ্রহ যেন বরাবর উজ্জীবিত থাকে। আগ্রহের অভাব ঘটলেই মনোযোগও বিনষ্ট হবে, ফলে তারা জ্যামিতি বিষয়টিকেই অপছন্দ করতে শিখবে। পাঠদানের প্রক্রিয়াটি বিজ্ঞানসম্মত ও মনোবিজ্ঞানসম্মত হতে হবে। যেখানে ছাত্র নিজে কিছু আবিষ্কার করতে পারবে সেখানে তাকে জোর করে কিছু মুখস্থ করাতে গেলে ফল খারাপই হবে। জ্যামিতি কি ভাবে আরম্ভ করা হচ্ছে, তার উপরই নির্ভর করছে ছাত্র এটিকে সহজভাবে গ্রহণ করবে কিনা। যদি বিমূর্ত বিষয় হিসাবে জ্যামিতি উপস্থাপিত করা হয় তবে ছাত্র এটি অপছন্দ করতে শিখবে—আর যদি মূর্ত বিষয় হিসাবে এবং ব্যবহারিক দিকের সঙ্গে সামঞ্জস্য রক্ষা করে বিষয়টি উপস্থাপিত করা হয় তাহলে ছাত্র এতে আগ্রহ বোধ করবে এবং বিষয়টিকেও সহজভাবে গ্রহণ করবে। এ ব্যাপারে শিক্ষকের দায়িত্ব অপরিসীম।

শিক্ষক যান্ত্রিকভাবে পাঠ্যপুস্তক অনুসরণ করবেন না। তিনি নিজস্ব পদ্ধতিতে সহজ ও সরল ভাষায় উপপাদ্যের প্রমাণ বুঝিয়ে দেবেন। যে ক্ষেত্রে প্রমাণ অত্যন্ত সহজ বা সিদ্ধান্তটি এত অবশ্যম্ভাবী যে প্রমাণের অপেক্ষাই রাখে না—সেক্ষেত্রে প্রমাণ করার আর কোন প্রয়োজন নেই। সেই উপপাদ্যটিকে স্বতঃসিদ্ধ (axiom) বলে ধরে নেওয়া যেতে পারে।

যেখানে প্রমাণ প্রয়োজন, সেখানে প্রমাণটি কত সহজে করা সম্ভব সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। ভাষা বা কঠিন কঠিন জ্যামিতিক শব্দে সেটিকে ভারাক্রান্ত করা চলবে না। প্রমাণের কাঠিন্য, মাত্রা, দৈর্ঘ্য, মান সব কিছু নির্ভর করে ছাত্রের মানসিক ক্ষমতার উপর।

গতানুগতিক পদ্ধতিতে প্রমাণের উপর জোর দেওয়া উচিত হবে না।

প্রারম্ভিক উপপাদ্যগুলির উপরও খুব বেশী জোর দেওয়া উচিত নয়।

উপপাদ্যের অর্থটি যাতে ছাত্র পরিষ্কার বুঝতে পারে সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে।

উপপাদ্যের ধারা অনুসারে সেটি প্রয়োগ করার বা ঐ উপপাদ্য অনুসারে অন্য কোন সমস্যার সমাধান করবার জন্য ছাত্রদের উৎসাহ দিতে হবে।

নীচের বিষয়গুলির দিকে দৃষ্টি দিলে উপপাদ্য শিক্ষণের কাজটি অনেক সহজ হয়।

১। ছাত্র যেন তার বুদ্ধি প্রয়োগ করে উপপাদ্যটি শিক্ষা করে। উপপাদ্য মুখস্থ করার একটা প্রবণতা ছাত্রদের মধ্যে দেখা যায়। সেটি সম্পূর্ণরূপে বন্ধ করতে হবে। ছাত্র প্রথমে উপপাদ্যটি নিজে নিজে বোঝবার চেষ্টা করবে। তারপর পাঠ্যপুস্তকে বিবৃত অংশটি সে পড়ে নিতে পারে। কি দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করতে হবে—এই দু'টি অংশ যেন তার কাছে পরিষ্কার হয়।

২। এরপর একটি চিত্রের সাহায্যে বিবৃতিটি প্রকাশ করতে হবে। প্রথম প্রথম ছাত্ররা তাদের পাঠ্যপুস্তকে যেভাবে চিত্র ও যে নাম দেওয়া থাকে তা ব্যবহার করতে পারে। কিন্তু পরে তারা চিত্র ও নাম দুইই পাল্টে দিতে পারে। জ্যামিতি শিক্ষণে স্মৃতির উপর মোটেই জোর দেওয়া চলবে না। আবিষ্কার করার প্রবণতার উপরই বেশী জোর দিতে হবে।

৩। পাঠ্যপুস্তকে উপপাদ্যের স্তরগুলি ভালো করে বুঝে নিয়ে ছাত্র বই বন্ধ করে মনে মনে একটি চিত্র কল্পনা করে স্তরগুলি মনে করার চেষ্টা করবে। এই মনে করাটা যেন যান্ত্রিকভাবে মুখস্থ করা জিনিস মনে করার মতো না হয়। যুক্তির সাহায্যে কারণ দেখিয়ে স্তরগুলি মনে করতে হবে।

৪। উপপাদ্যটি শেখা হয়ে গেলে অন্য কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সেটিকে প্রয়োগ করতে হবে। সার্থক প্রয়োগের ফলেই ছাত্র যে জ্ঞান অর্জন করছে তা পাকা হয়।

৫। পাঠ্যপুস্তকে যেভাবে উপপাদ্যগুলি পর পর সাজানো থাকে ঠিক সেইভাবেই যে সেগুলি পড়াতে হবে এমন কোন বাঁধাধরা নিয়ম নেই। শিক্ষক শিক্ষার্থীর সুবিধা অনুসারে উপপাদ্যগুলিকে পৃথক পৃথক শ্রেণীতে ভাগ করে নিতে পারেন। প্রত্যেক শ্রেণীতে আবার বিশেষ একটি উপপাদ্যের উপর গুরুত্ব আরোপ করা যেতে পারে। এটিকে মূল বা কেন্দ্রীয় উপপাদ্য (Key Proposition) বলা যেতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে—স্পর্শক শ্রেণীর মূল উপপাদ্য হল Tangent is perpendicular to the radius. বৃত্ত শ্রেণীর মূল উপপাদ্য হল The angle at the centre is double the angle at the circumference, ইত্যাদি। প্রথমে মূল উপপাদ্যটির শিক্ষা দিয়ে তারপর এর সঙ্গে ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ আছে এমন সমস্ত উপপাদ্য শেখানো উচিত।

৬। একটি উপপাদ্য প্রমাণ করতে গিয়ে অনেক সময় অপর একটি উপপাদ্যের সাহায্য (Reference) নিতে হয়। জ্যামিতির পাঠ্যপুস্তকে উপপাদ্যগুলির ১, ২, ৩, এইভাবে নম্বর দেওয়া থাকে। যে উপপাদ্যটির সাহায্য নেওয়া হল ছাত্ররা তার নম্বরটি উল্লেখ করে দেয়। তা না করে যাতে তারা মূল নীতি, যেটির সাহায্য নেওয়া হল সেটির উল্লেখ করে, তার শিক্ষা দিতে হবে। উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে :—

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম (8-এর উপপাদ্য অনুসারে)—এ ভাবে না লিখে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম (দুইটি বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ সমান বলে) এভাবে লেখা উচিত।

৭। সহজ প্রমাণ না করে জটিল পদ্ধতিতে ঘুরিয়ে প্রমাণ করার চেষ্টা যাতে ছাত্র না করে সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। এর ফলে অনেক ক্ষেত্রে যে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে হবে তার সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হবার আগেই প্রমাণিত বলে ধরে নেওয়া

হয়। এটা মারাত্মক ভুল। যুক্তিযুক্ত ভাবে বিচার করার উপরই শিক্ষক বেশী জোর দেবেন।

বিভিন্ন জাতীয় প্রমাণ (Kinds of Proofs) :—জ্যামিতির প্রমাণ বিভিন্ন জাতীয় হতে পারে। সমস্ত উপপাদ্যই যে একভাবে প্রমাণ করতে হবে এমন কোন কথা নেই। উপপাদ্যের প্রকৃতি অনুযায়ী প্রমাণের প্রকৃতিও পাল্টে যায়। এখন দেখা যাক জ্যামিতিক প্রমাণ কত রকমের হতে পারে :—

১। **পরীক্ষণমূলক প্রমাণ (Experimental Proof)**—যখন ছাত্র জ্যামিতি সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান অর্জন করে তখনই তাকে পরীক্ষামূলক প্রমাণ করতে দেওয়া চলে। সরলরেখা, কোণ, সমান্তরাল সরলরেখা, ত্রিভুজ ইত্যাদি সম্বন্ধে একটা জ্ঞান আগে অর্জন করা দরকার। এই প্রমাণ হল পরীক্ষামূলক। যেমন "যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে বিপরীত কোণগুলিও সমান হবে" —এই উপপাদ্য প্রমাণ করতে গিয়ে ছাত্র একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করে বিপরীত কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপ করতে পারে। বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করে এবং বিপরীত কোণগুলি মাপ করে উপপাদ্যটির সত্যতা পরীক্ষণের সাহায্যেই প্রমাণ করা সম্ভব। আবার যদি প্রমাণ করতে হয় ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ—তবে ছাত্র বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ অঙ্কন করে প্রতিটি কোণ মাপ করে, তারপর যোগ করে উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণ করতে পারবে।

২। **যুক্তিযুক্ত প্রমাণ (Logical Proof) :**—যখন যুক্তির সাহায্যে কোন উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়, তখন তাকে যুক্তিযুক্ত প্রমাণ বলে। যুক্তিযুক্ত প্রমাণ করতে গেলে চারটি স্তরের একান্ত প্রয়োজন। সেই স্তর চারটি হল—উপাত্ত (Data), কি প্রমাণ করতে হবে, অঙ্কন এবং প্রমাণ।

৩। **স্বজ্ঞালব্ধ প্রমাণ (Intuitive Proof) :**—সমস্ত উপপাদ্যের ক্ষেত্রে কিন্তু এই প্রমাণ চলে না। যেখানে পরীক্ষামূলক বা যুক্তিযুক্ত কোন প্রকার প্রমাণেরই প্রয়োজন হয় না—সেইখানে স্বজ্ঞালব্ধ প্রমাণ প্রয়োগ করা চলতে পারে। উপপাদ্যটি যে সত্য হবেই তা খালি চোখে দেখেই বোঝা যায়। 'দুটি বিন্দুর মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম দূরত্ব' কিংবা 'সমান্তরাল সরলরেখাগুলি কখনও পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হয় না'—এ-জাতীয় উপপাদ্যের কোন প্রমাণ প্রয়োজন হয় না। এগুলি সত্য বলেই ধরে নেওয়া যেতে পারে।

৪। **পরোক্ষ প্রমাণ (Indirect Proof) :**—সহজ পথে না করে ঘোরানো পথে প্রমাণ করা হয় এই পদ্ধতিতে। তবে পদ্ধতিটি সব ছাত্রই অনুসরণ করতে পারে না, কারণ এটি অপেক্ষাকৃত কঠিন পদ্ধতি। বিশেষ বিশেষ কতকগুলি উপপাদ্য এই পরোক্ষ প্রমাণের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়। প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে যে সমস্ত উপপাদ্য প্রমাণ করা যায় না কেবলমাত্র সেই সমস্ত উপপাদ্যেরই পরোক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা

উচিত। এই পদ্ধতিতে সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয়। নানারকম বিকল্প সম্ভাবনার মধ্য দিয়ে শেষ পর্যন্ত প্রকল্পে পৌছানো হয়। একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

উপপাদ্যটি হল :—যদি একটি সরলরেখা অপর দু'টি সরলরেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যেন বিপরীত কোণগুলি সমান হয়, তবে সরলরেখা দু'টি সমান্তরাল হবে।

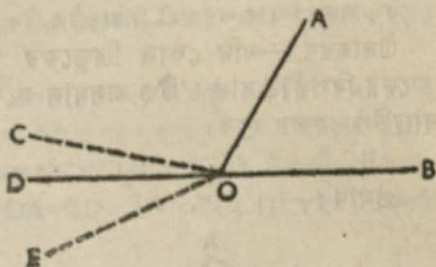
প্রমাণ :—যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয় তবে ধরা গেল সরলরেখা দু'টিকে বর্ধিত করলে K বিন্দুতে মিলিত হবে। এখন GHK ত্রিভুজে KG বাহু A পর্যন্ত বিস্তৃত হয়েছে।

∴ বহিঃকোণ $\angle AGH > \angle GHK$, কিন্তু প্রকল্পে বলা হয়েছে $\angle AGH = \angle GHK$

∴ AB ও CD মিলিত হতে পারে না। সুতরাং $AB \parallel CD$.

৫। অযৌক্তিকে পরিণত করে প্রমাণ (Reduction and Absurdum method) :—পদ্ধতিটি পরোক্ষ প্রমাণের পদ্ধতিরই আর একটি রূপ। এই পদ্ধতিতেও সিদ্ধান্ত থেকে শুরু করা হয়, কিন্তু প্রমাণের সুবিধার জন্য সিদ্ধান্তটি ভুল বলে ধরে নেওয়া হয়। অর্থাৎ প্রথমেই একটি ভুলকে সত্য ধরে নিয়ে অগ্রসর হতে হয়। এইভাবে অগ্রসর হতে হতে শেষ পর্যন্ত একটি অসম্ভব, অযৌক্তিক বা অবাস্তব তথ্যে উপনীত হওয়া যায়, যার থেকে বোঝা যায় যে প্রথমে যেটিকে সত্য বলে ধরে নেওয়া হয়েছিল সেটি মোটেই সত্য নয়। অতএব ধরে নেওয়া সিদ্ধান্তটির বিপরীতটিই সত্য হবে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

উপপাদ্যটি হল :—**যদি দু'টি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে কোণগুলির বহিঃস্থ বাহু দু'টি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে।**

প্রমাণ :—ধরা যাক, একটি বাহু BO-কে বর্ধিত করা হল। তাহলে অপর বহিঃস্থ বাহু CO হয় OD-র উপর সমাপতিত হবে, নয়তো হবে না। অর্থাৎ সম্ভাবনা দু'টি, এবং একটি সত্য হলে অপরটি মিথ্যা হবে। যা প্রমাণ করতে হবে তার বিপরীত ধারণাটি নিয়েই কাজ শুরু করা হবে। ধরা গেল, CO, OD-র

সঙ্গে মিলিত হয় না। এর ফল কি হতে পারে সে সম্বন্ধে প্রাথমিক জ্ঞান ছাত্রের আছে। এখন দেখা যাচ্ছে ∠AOB+∠AOC=2 সমকোণ অথবা ∠AOB+∠AOE=2 সমকোণ। কিন্তু দেওয়া আছে ∠AOB+∠AOD=2 সমকোণ। অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে 2 সমকোণ হচ্ছে 2 সমকোণ থেকে ছোট এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যে 2 সমকোণ পাওয়া যাচ্ছে তা হল 2 সমকোণ থেকে বড়, এটি সম্পূর্ণ অসম্ভব। 2 সমকোণ সবসময় 2 সমকোণেরই সমান। কাজেই BO-র অপর প্রান্ত OC বা OE হতে পারে না।—OD হবেই। অর্থাৎ BO ও OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এই পদ্ধতিতে জ্যামিতির প্রচলিত প্রকৃতির (formal character) উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়। ছাত্রের স্বভাবলব্ধ জ্ঞান বা স্বজ্ঞার উপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করাই হয় না। ফলে পদ্ধতিটি ছাত্রের মনে বেশ প্রভাব বিস্তার করতে পারে না। এইজন্য বর্তমানে এই পদ্ধতিতে প্রমাণ করার প্রথা প্রায় উঠিয়েই দেওয়া হয়েছে। যেখানে এই পদ্ধতিতে প্রমাণ অপরিহার্য হয়ে উঠবে সেখানে প্রমাণের বিভিন্ন স্তরগুলি ছাত্রের নিকট সহজবোধ্য করে তুলতে হবে। স্তরগুলি অনড়, অচল বা অপরিবর্তনীয় হবে না। প্রয়োজন হলে ছাত্র পরীক্ষণ পদ্ধতির সাহায্য গ্রহণ করতে পারে। ছাত্রকে সাধারণ বাহুবিশিষ্ট দু'টি কোণ আঁকতে বলা যেতে পারে এবং সেগুলি মাপ করে যোগ করতে বলা যেতে পারে। কোণগুলি এমনভাবে নিতে হবে যেন তাদের সমষ্টি (i) ঠিক 2 সমকোণ হয়, (ii) 2 সমকোণ থেকে বেশী হয় এবং (iii 2 সমকোণ থেকে কম হয়। ছাত্ররা নিজেরাই পরীক্ষা করে দেখবে যেখানেই কোণসমষ্টি 2 সমকোণ হচ্ছে, সেখানেই বহিঃস্থ বাহু দু'টি একই সরলরেখাতে অবস্থিত হবে। এর ফলে ছাত্ররা মনে মনে প্রস্তুত হয়ে থাকবে, আবার পরীক্ষণের সাহায্যে সিদ্ধান্তে উপনীত হতেও পারবে। বিমূর্তভাবে সত্যের সঙ্গে পরিচিত হবার আগে তারা মূর্তভাবেই সত্যের সঙ্গে পরিচিত হচ্ছে।

৬। **পরিশ্রান্তিকর প্রমাণ** (Proof of Exhaustion) :—এই পদ্ধতিটিও পরোক্ষ পদ্ধতির একটি রূপান্তর। একে অনেকে সামগ্রিক প্রমাণও বলে থাকেন। কোন একটি উপপাদ্য প্রমাণ করতে গিয়ে বিভিন্ন বিকল্প প্রকল্পের সাহায্য নিয়ে ভিন্ন ভিন্ন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। কিন্তু শেষ পর্যন্ত দেখা যায় সম্ভাবনাগুলির মধ্যে

একটি বাদ দিয়ে বাকীগুলি সব ভুল। যে সম্ভাবনাটি ঠিক, সেটি প্রকল্পে দেওয়া থাকে ; অতএব তার অনুগামী সিদ্ধান্তটিও ঠিক হবে।

উদাহরণ :—যদি কোন ত্রিভুজের দু'টি কোণ অসমান হয়, তবে তাদের বিপরীত বাহু দু'টিও অসমান হবে এবং বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহুটিও বৃহত্তর হবে।

ABC ত্রিভুজে $\angle C > \angle B$। প্রমাণ করতে হবে $AB > AC$

প্রমাণ :—ধরা যাক, AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর নয়। সেক্ষেত্রে

AB হয় AC-র সমান হবে, নয়তো AB বাহু AC অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে। যদি $AB < AC$ হয়, তবে $\angle C < \angle B$। কিন্তু দেওয়া আছে $\angle C > \angle B$, আবার যদি $AB = AC$ হয়, তবে $\angle C = \angle B$। কিন্তু দেওয়া আছে $\angle C > \angle B$.

অতএব AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও হতে পারে না, আবার সমানও হতে পারে না। অতএব AB বাহু নিশ্চয়ই AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিভিন্ন জাতীয় উপপাদ্য :—পরোক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করতে গেলে কতকগুলি বিভিন্ন জাতীর উপপাদ্যের সঙ্গে পরিচিত হতে হয়। এ সমস্ত উপপাদ্যকে সচরাচর কোন একটি উপপাদ্যের বিপরীত বা উপাত্ত (converse), বিরুদ্ধ (Inverse), বৈষম্য-মূলক (contrapositive) এবং পূরক (Reciprocal)—এই চারভাগে ভাগ করা হয়। আসল বা মূল উপপাদ্যের প্রকল্প ও সিদ্ধান্তের অদল-বদল বা যোগ-বিয়োগ করে নূতন উপপাদ্যগুলি পাওয়া যেতে পারে।

একটি উদাহরণ দিয়ে চারপ্রকার উপপাদ্যের প্রকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করা হল—

ধরা যাক, মূল উপপাদ্যটি হল : "**"যদি কোন ত্রিভুজ সর্বসম হয়, তবে তা সমদ্বিবাহু হবে।"**

বিপরীত প্রতিজ্ঞা :—মূল উপপাদ্যটির প্রকল্প হবে বিপরীত প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত, আর মূল উপপাদ্যটির সিদ্ধান্ত হবে বিপরীত প্রতিজ্ঞার প্রকল্প। উপরের উপপাদ্যটির বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি হবে এইরূপ—

"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, তবে তা সর্বসম হবে।"

একথা অবশ্য বলা যায় যে বিপরীত প্রতিজ্ঞাগুলি সবসময় সত্য হয় না। উপরের প্রতিজ্ঞাটিই তার প্রকৃষ্ট উদাহরণ।

বিরুদ্ধ প্রতিজ্ঞা :—এই প্রতিজ্ঞাতে মূল উপপাদ্যের সিদ্ধান্তটি অস্বীকার করে সেইটিকেই প্রকল্প বলে ধরে নেওয়া হয় এবং মূল উপপাদ্যের প্রকল্পটি সিদ্ধান্তে পরিণত হয়। অর্থাৎ তার রূপ দাঁড়াবে এই রকম—

"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়, তবে তা সর্বসম হবে।"

বৈষম্যমূলক প্রতিজ্ঞা :—এতে মূল উপপাদ্য বা প্রতিজ্ঞার প্রকল্প ও সিদ্ধান্ত দু'টিরই নেতিবাচক রূপটি গ্রহণ করা হয়। যেমন—"যদি কোন ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু না হয়, তবে তা সর্বসম হবে না।"

পূরক প্রতিজ্ঞা :—যখন মূল উপপাদ্যের বিভিন্ন সর্ত বিশেষ বিশেষ ভাবে পরিবর্তিত করা হয় (পারস্পরিক), তখনই তাকে পূরক প্রতিজ্ঞা বলে। মূল উপপাদ্যের বিন্দু পরিবর্তিত হয়ে রেখাতে, আবার রেখা পরিবর্তিত হয় বিন্দুতে। ত্রিভুজের কোণ পরিবর্তিত হয় বিপরীত বাহুতে, আবার বিপরীত বাহু পরিবর্তিত হয় কোণে। একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

মূল উপপাদ্য হল :—"যদি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।" পূরক প্রতিজ্ঞা হল—যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং অন্তর্ভুক্ত বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

উপপাদ্যের শ্রেণীভুক্ত করণ :—Key-Proposition-এর কথা আগেই বলা হয়েছে। অনেকগুলি উপপাদ্যের মধ্যে একটি উপপাদ্যকে মূল উপপাদ্য ধরে নিয়ে একটি শ্রেণী বা দল গঠন করা হয়। এই মূল উপপাদ্যটি অনেক দিক দিয়েই গুরুত্বপূর্ণ ও প্রয়োজনীয়। আবার এই মূল উপপাদ্যটি নির্বাচন করতে বিশেষ বেগ পেতেও হয় না। বিভিন্ন উপপাদ্যের কতকগুলি শ্রেণী এবং তাদের মূল উপপাদ্যটি নীচে দেওয়া হল :—

(i) বৃত্ত সম্বন্ধীয় কোণ :—কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

(ii) স্পর্শক শ্রেণী :—স্পর্শক বৃত্তের ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

(iii) ক্ষেত্রফল শ্রেণী :—একটি ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

(iv) পীথাগোরাসের শ্রেণী :—সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা।

মূল উপপাদ্যটি স্থির করা হলে বাকী সমস্ত উপপাদ্যকে দু'ভাবে সাজানো যায়।

একটি হল—মূল উপপাদ্যের সঙ্গে প্রতিটি উপপাদ্যের একটা সম্বন্ধ রাখা হয়। এতে মূল উপপাদ্যটি জানা থাকলে বাকী উপপাদ্যগুলি সহজে প্রমাণ করা যায়। বিভিন্ন উপপাদ্যের মধ্যে যে যুক্তিযুক্ত সম্বন্ধ তা জানতে হয় না। ফলে পরিশ্রম অনেক কম হয়।

আর একটি হল—প্রতিটি উপপাদ্যের মধ্যে একটা নিবিড় যোগসূত্র রাখা হয়। এতে পূর্বের উপপাদ্যটি জানা না থাকলে পরের উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় না। এতে যুক্তিযুক্ত পদ্ধতি নিখুঁতভাবে মেনে চলতে হয়।

প্রথম নিয়মটিকে এক ছড়া কলার সঙ্গে তুলনা করা যায়। প্রতিটি কলা নির্দিষ্ট এক জায়গার সঙ্গে যুক্ত আছে অথচ একটির সঙ্গে অপরটির কোন সম্বন্ধ নাই। দ্বিতীয় নিয়মটিকে একটি মালার সঙ্গে তুলনা করা যায়। একটি ফুলের সঙ্গে অপর একটি

ফুলের সম্বন্ধ রক্ষা করেই মালাটি গাঁথা হয়। যদি একটি ফুল ছিঁড়ে ফেলা যায়, তবে মালাটির সৌন্দর্য বা সামঞ্জস্য নষ্ট হয়ে যায়। এ থেকে পরিষ্কারভাবে বোঝা যাচ্ছে প্রথম নিয়মটি দ্বিতীয় নিয়ম অপেক্ষা অনেক সুবিধাজনক।

রূপান্তরীকরণ জ্যামিতি সম্বন্ধে কয়েকটি ধারণা (Some Concepts about Transformation Geometry) :—এতদিন পর্যন্ত গতানুগতিক জ্যামিতি শিক্ষণে যুক্তিগ্রাহ্য ইউক্লিড পদ্ধতিই একমাত্র প্রচলিত পদ্ধতি ছিল। জ্যামিতির বিষয়বস্তুর সংগ্রহের ক্ষেত্রেও বিমূর্ত যুক্তিপূর্ণ প্রমাণভিত্তিক বিষয়বস্তু নির্বাচন করা হত। সবচেয়ে বেশী গুরুত্ব দেওয়া হত ত্রিভুজের সর্বসমতার কঠোর নিয়মতান্ত্রিক ধারণার উপর। ফলে শিক্ষার্থীদের মধ্যে জ্যামিতি সম্পর্কে নতুন ধারণা সৃষ্টি ব্যাহত ও বাধা-প্রাপ্ত হত। জ্যামিতিতে সেই সমস্ত চিত্রের ধর্মসম্পর্কেই আলোচনা করা হয় যা একটি দল বা গোষ্ঠীর সবরকম চিত্রের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য ও অপরিবর্তনীয়। এইভাবে এক একটি বিশেষ ধরনের জ্যামিতি গড়ে উঠেছে। কিন্তু ইউক্লিড জ্যামিতির সীমার বাইরেও তো আরো কিছু আছে। এইজন্যই শিক্ষার্থীদের রূপান্তরীকরণ জ্যামিতি শিক্ষা দেওয়া উচিত যাতে তাদের মানসিক ক্ষমতা বৃদ্ধি পায়। এইজন্য জ্যামিতির নতুন পাঠক্রমে কয়েকটি বিশেষধর্মী অধ্যায় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এগুলি হল **প্রতিফলন** (Reflection), **স্থানান্তরিতকরণ বা অবস্থানের পরিবর্তন** (Translation), **ঘূর্ণন** (Rotation), **প্রসারণ** (Enlargement), **প্রতিসাম্য** (Symmetry) প্রভৃতি। সুনির্বাচিত উদাহরণ ও উপকরণের সাহায্যে এই সমস্ত ধারণা সম্বন্ধে শিক্ষার্থীদের দক্ষতা অর্জন ও জ্যামিতির বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা সমাধানের ক্ষমতা অর্জনে সাহায্য করা প্রয়োজন।

নন্‌-ইউক্লিডিয় জ্যামিতি (Non-Euclidean Geometry) :—

গণিতশাস্ত্র, তথা বিজ্ঞানের ইতিহাসে নন্‌-ইউক্লিডিয় জ্যামিতি যুগান্তর আনয়ন করেছে। আগেই বলা হয়েছে, মিশরবাসীরা স্বজ্ঞা ও আরোহী পদ্ধতিতে জ্যামিতিক জ্ঞান অর্জন করে। পরে গ্রীকেরা তার উত্তরাধিকারী হয়। এই জ্ঞানকে তারা প্রমাণসিদ্ধ করে। ইউক্লিড সেগুলিকে একত্রিত করেন এবং নিয়মানুগ পদ্ধতি অবলম্বন করে সেগুলি লিপিবদ্ধ করেন। তারপর প্রায় দু'হাজার বৎসর ধরে জ্যামিতির ক্ষেত্রে ইউক্লিডের একছত্র আধিপত্য বিরাজ করছিল। সকলের মনে দৃঢ় ধারণা হয়েছিল যে ইউক্লিড ভৌত স্থান পরিমাপের ক্ষেত্রে যা বলেছেন তারপর আর বলবার কেউ নেই, কিছু নেই। প্রকৃত প্রস্তাবে ইউক্লিডের সিদ্ধান্তকে বেদবাক্যের মতো অভ্রান্ত মনে করা হ'ত। ইউক্লিডের গোঁড়া সমর্থকও কম ছিল ছিল না। দীর্ঘদিন ধরে ইউক্লিডের সিদ্ধান্ত সম্বন্ধে কেউ সন্দেহ প্রকাশও করেননি, আবার সমালোচনাও করেননি। তবে অনেকদিন পরে হলেও, দীর্ঘদিনের এই অভ্রান্ত বিশ্বাসের মূলে কুঠারাঘাত করেন একজন জার্মান, একজন রাশিয়ান ও একজন হাঙ্গেরীয়ান গণিতবিদ। তাঁদের প্রচেষ্টার ফলেই নন্‌-ইউক্লিডিয় জ্যামিতির উদ্ভব ঘটে।

ইউক্লিডের 'এলিমেণ্ট'-এর ১ম খণ্ডের ৫ম স্বীকার্য হল এইরকম: একটি প্রদত্ত সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে ঐ সরলরেখাটির সমান্তরাল একটিমাত্র সরলরেখা টানা যেতে পারে। ইউক্লিড কিন্তু সবসময় স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যের মধ্যে সুস্পষ্ট কোন সীমারেখা টানেননি। অনেকেই মনে করেন, ইউক্লিড যখন পূর্বোক্ত বিবৃতিটিকে স্বতঃসিদ্ধ না বলে স্বীকার্য বলেছেন, তখন এটি স্বয়ংসম্পূর্ণ ও স্বাধীন কিনা সে বিষয়ে তাঁর নিজেরই যথেষ্ট সন্দেহ ছিল। পরবর্তী দু'হাজার বছর ধরে বহু গণিতবিদ অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধগুলির সাহায্যে এই স্বীকার্যটি প্রমাণ করার চেষ্টা করেন। Ptolemy-ও চেষ্টা করেছিলেন। তারপর মধ্যযুগেও বহু গণিতবিদ এটি প্রমাণ করার চেষ্টা করেন। কিন্তু কারো কোন চেষ্টাই ফলবতী হয় না। Grauss নামক একজন জার্মান গণিতবিদ প্রথম ধারণা করেন যে স্বীকার্যটি সম্পূর্ণ স্বাধীন। তখনই বুঝতে পারা যায় যে কোন স্বীকার্য অবলম্বন করে যুক্তিসম্মতভাবে নূতন জ্যামিতি সৃষ্টি করা সম্ভব। Grauss-এর পর রাশিয়ান গণিতবিদ Nikolai Ivanovitch Lobachevsky ও হাঙ্গেরীয়ান গণিতবিদ Janos Bolyai ইউক্লিডের সিদ্ধান্তগুলি সম্পর্কে প্রথম প্রকাশ্যভাবে বিরুদ্ধাচারণ করেন এবং তারই ফলে Non-Euclidean জ্যামিতির উদ্ভব ঘটে। 1829-30 সালে Lobachevsky তাঁর Non-Euclidean জ্যামিতি সম্বন্ধে বইটি প্রকাশ করেন। Bolyai-ও তাঁর অভিনব ধারণার কথা প্রকাশ করেন। তিনি ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যটিকে একটি স্বাধীন স্বীকার্য বলে গ্রহণ করেন এবং বলেন যে ঐ স্বীকার্যটির বদলে যদি স্বীকার করে নেওয়া যায় যে সমতলস্থ একটি বিন্দু দিয়ে অসীম সংখ্যক সরলরেখা টানা যায় যারা ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে ছেদ করবে না, তা হলে আর একপ্রকার জ্যামিতি গঠন করা সম্ভব।

স্বীকার্যগুলির উপর ভিত্তি করে আমরা তিন রকমের জ্যামিতির দেখা পাই। সেগুলি হল—১। Euclid-এর জ্যামিতি ২। Lobachevsky-র এবং ৩। Reimann-এর জ্যামিতি। প্রথমটি হল Euclidean এবং বাকী দু'টি Non-Euclidean জ্যামিতি। অবশ্য Non-Euclidean জ্যামিতিতে Euclid-এর পদ্ধতিই অবলম্বন করা হয়েছে। ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য ছাড়া অন্যান্যগুলিকে মেনে নেওয়া হয়েছে। Euclid-এর জ্যামিতি যেমন যুক্তিসিদ্ধ, ঐগুলিও তেমন যুক্তিসিদ্ধ এবং যুক্তিগুলির মধ্যে ফাঁক নেই। কিন্তু তিনটি জ্যামিতির আলোচিত উপপাদ্যগুলির মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য আছে।

ইউক্লিড যেভাবে জ্যামিতি তৈরী করেছেন ও স্বীকার্য নির্ণয় করেছেন সেভাবে অসংখ্য জ্যামিতি ও স্বীকার্য গঠন করা সম্ভব। এ জ্যামিতিগুলিও ইউক্লিডের জ্যামিতির মতোই সত্য হবে। তলের বক্রতা যাই হোক না কেন, আর যেমনই হোক না কেন, যে কোন তলকে অবলম্বন করেও জ্যামিতি গঠন করা সম্ভব। জ্যামিতির কাজই হল এমন একটা যুক্তিসঙ্গত কাঠামো নির্মাণ করা যার সিদ্ধান্তগুলি পরস্পর বিরোধী হবে না। পদার্থবিদ্যাতে Non-Euclidean জ্যামিতি প্রয়োগের ফলে বহু পরীক্ষালব্ধ তথ্যের ব্যাখ্যা করা সম্ভব হয়েছে, যার ফলে বহু নূতন তথ্য আবিষ্কৃতও হয়েছে।

কেবল দ্বিমাত্রিক তলের উপরই নয়, বর্তমান পদার্থবিদগণ আরো বেশীমাত্রাবিশিষ্ট স্থানেও Non-Euclidean জ্যামিতি প্রয়োগ করেছেন। আমরা যে স্থানে (Space) বাস করি, সেই স্থান সম্বন্ধে বৈজ্ঞানিকগণ পরীক্ষা করে এই সিদ্ধান্তে এসেছেন যে, স্থানটি সরল নয়, বক্র। সুতরাং পৃথিবীর পৃষ্ঠদেশে ইউক্লিডের জ্যামিতি কার্যকরী হলেও সুদূর গ্রহ-নক্ষত্রের জগতে তা কোন কাজে লাগে না। তাছাড়া ইউক্লিড সময় সম্বন্ধে কিছু চিন্তা করেননি। তিনি মনে করতেন সরলরেখা, কোণ ও জ্যামিতিক চিত্র অপরিবর্তনীয় স্থির। কিন্তু পৃথিবী পরিবর্তনশীল, পরিবর্তনশীল জগতের পরিবর্তন মাপ করতে হলে অপরিবর্তনীয় মাপকাঠি হলে চলবে না; পরিবর্তনশীল মাপকাঠির প্রয়োজন। সেইজন্যই আজ Non-Euclidean জ্যামিতির প্রয়োজনীয়তা ও কদর এত বেশী।

ত্রিকোণমিতি শিক্ষাপদ্ধতি (Teaching of Trigonometry) :

ত্রিকোণমিতির ইংরেজী প্রতিশব্দ Trigonometry। এই শব্দটির মধ্যেই এর অর্থটি নিহিত আছে। Trigonometry শব্দটি Trigonom এবং metria এই দু'টি শব্দের সংযোগে গঠিত। Trigonom শব্দের অর্থ হল ত্রিভুজ আর metria শব্দের অর্থ হল মাপ করা। জরীপ করার কাজে ত্রিভুজীকরণের সাহায্য নেওয়া হ'ত বলেই গণিতের এই শাখাটির নাম হয় Trigonometry। ত্রিকোণমিতিতে মূল কথাই হল যে একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের মাপ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত (পরস্পরাপেক্ষ) কোন মাপ পাওয়া যায় কি না, তা নির্ণয় করা।

ত্রিকোণমিতি কারা আবিষ্কার করেন, এর উত্তরে অনেক ঐতিহাসিক বলেন—গ্রীকদের মধ্যেই এর প্রথম প্রচলন শুরু হয়। খৃষ্ট পূর্ব ১৬০ অব্দে হিপারকাস্ নামক একজন গ্রীক জ্যোতির্বিদ প্রথম এর আবিষ্কার করেন। ত্রিকোণমিতি আবিষ্কার করে তিনি জ্যোতির্বিজ্ঞানের অনেক উপকার সাধন করেছিলেন। পরবর্তীকালে এই শাখাটির আরও উন্নতি করেন টলেমী নামক আর একজন জ্যোতির্বিদ। অতএব দেখা যাচ্ছে জ্যোতির্বিজ্ঞানের তত্ত্ব অনুসন্ধানের জন্যই ত্রিকোণমিতির সৃষ্টি হয় এবং একই প্রয়োজনে তার উন্নতি সাধিত হয়। জ্যোতির্বিদগণ প্রধানতঃ সময় ও কোণ পরিমাপ করে থাকেন। তাঁরা বিভিন্ন যন্ত্রপাতি (যেমন টেলিস্কোপ) নিয়ে ঠিক কোন্ মুহূর্তে কোন্ নক্ষত্র উত্তর বা দক্ষিণে আসে তা বার করতে চেষ্টা করেন। সুতরাং আসলে তাঁরা যা মাপ করেন তা কোণ। দু'টি নক্ষত্রের কোনও বিন্দু অতিক্রম করার মাঝে যে সময় কেটে যায় তাঁরা সেই সময় অনুসারে ঠিক করেন কত ডিগ্রী কোণ পৃথিবী ঐ সময়ের ভিতর অতিক্রম করেছে। সুতরাং জ্যোতির্বিজ্ঞানী যখন আকাশ পর্যবেক্ষণ করেন, তখন তিনি গ্রহ-নক্ষত্রের অন্তর্বর্তী কোণগুলিই মাপ করার চেষ্টা করেন।

তেমনি যখন ভূমি জরীপ করা হয় তখনও আসলে যা মাপ করা হয় তা হচ্ছে কোণ। নদীর গভীরতা বা পাহাড়-পর্বতের উচ্চতা কিংবা ভূমির অসমতা অনেক

সময় বাধা সৃষ্টি করে। কোন স্থানের জরীপ নির্ভর করে একটি বা দু'টি দৈর্ঘ্যের উপর, কিন্তু আসল কাজ হয় কোণ মাপ করা। একটা উদাহরণ দেওয়া যাক। ধরা যাক, এমন একটি জায়গা জরীপ করতে হবে, যার তিনটি সমুন্নত স্থান হল—A, B ও C। এই তিনটির প্রত্যেক স্থান থেকে অপর স্থানটি দেখা যায়। Clinometer প্রভৃতি কোণ মাপক যন্ত্রের সাহায্যে $\angle ABC$ সহজেই মাপ করা যায়। দুটি মাত্র কোণ মাপ করতে পারলেই কাজ চালানো যায়। এইজন্য কোন দেশের মানচিত্র তৈরী করতে গেলে সমস্ত ভূমির উপরিভাগকে কতকগুলি ত্রিভুজে ভাগ করা হয়। একেই বলা হয় ত্রিভুজীকরণ (Triangulation)। একটি ত্রিভুজের সমস্ত কোণ জানা থাকলে ত্রিভুজের আকারটিও জানা যায়। জ্যামিতির সদৃশতার যে তত্ত্ব (Principle of Similarity) তা নিয়োগ করা হয়। যদি ABC ও DEF ত্রিভুজ এমন হয় যে :—

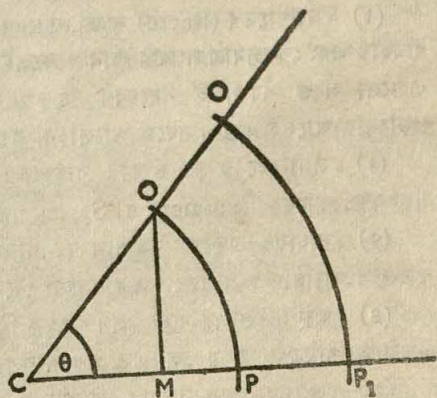
$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, তা হলে $DE : AB = EF : BC$ হবে। এই সুবিধাটি কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই পাওয়া যায় ; চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে পাওয়া যায় না। সেইজন্যই জরীপের কাজে ত্রিভুজীকরণের সাহায্যই নেওয়া হয়।

ত্রিভুজের কোণ ও বাহুর পরস্পরাপেক্ষ মাপ জানতে হলে কোণগুলির পরিমাণের কতকগুলি কার্যকারিতা জানতে হয়। প্রথম অবস্থাতে এইজন্য একটি সমকোণী ত্রিভুজ নেওয়া হ'ত এবং কোণের মাপ বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে মাপা হ'ত। বর্তমানে অবশ্য কোণের মাপ বৃত্তের চাপের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে মাপ করা হয় না। ঋজুরেখক্ষেত্রগুলির মধ্যে ত্রিভুজ থেকে যে সুবিধা পাওয়া যায় বক্ররেখা সমন্বিত ক্ষেত্রের মধ্যে বৃত্তের থেকেও সেই সুবিধা পাওয়া যায়। যে কোন দু'টি বৃত্তই হল সদৃশ ক্ষেত্র। দু'টি বৃত্তের পরিধির অনুপাত আর তাদের ব্যাসার্ধের সমান। আবার এককেন্দ্রীয় বৃত্ত হলে তাদের কোণ চাপের অনুপাত ব্যাসার্ধ দু'টির অনুপাতের সমান হবে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, চাপকে ব্যাসার্ধ দিয়ে ভাগ করলেই কোণের একটি মাপ পাওয়া যায়।

$$\frac{\text{চাপ } PO}{\text{চাপ } P_1O_1} = \frac{CP}{CP_1}$$

অথবা

$$\frac{\text{চাপ } PO}{CP} = \frac{\text{চাপ } P_1O_1}{CP_1}$$

এখন যদি O বিন্দু থেকে CP-র উপর OM একটি লম্ব টানা হয়, তবে OM হবে $\angle PCO$ র sine। এটা অবশ্য গ্রীক গণিতজ্ঞদের মত। তাঁরা sine শব্দটি নিয়েছেন Sinus থেকে যার অর্থ হল বক্ষ-রেখা। OP চাপটিকে বাড়ালে চিত্রটিকে একটি ধনুকের মতো কল্পনা করা যেতে পারে। সেই ধনুকের তীর হল CP আর বক্ষ-রেখা হল OM.

এখন $\frac{OM}{CP} = \frac{OM}{CO}$, একে বলা হয় ∠OCM-এর sine.

আবার $\frac{CM}{CO}$কে বলা হয় sine-এর Complement কোণ বা Co-sine এটা অবশ্য ধরা সম্ভব হচ্ছে OCM সমকোণী ত্রিভুজ বলেই। তেমনি $\frac{OM}{CM}$কে বলা হয় tangent বা সংক্ষেপে tan.

অর্থাৎ ∠OCM = θ ধরলে sine $\theta = \frac{OM}{CO}$, cosine $\theta = \frac{CM}{CO}$ এবং tan $\theta = \frac{OM}{CM}$

ত্রিকোণমিতিকে গণিতশাস্ত্রের একটি পৃথক শাখা হিসাবে ধরা হয় এবং সেই-ভাবেই বিষয়টি পড়ানোর ব্যবস্থাও করা হয়। কিন্তু বিষয়টির বৈশিষ্ট্যগুলি ভালো করে পর্যবেক্ষণ করলে বোঝা যাবে এটি পৃথক ও স্বাধীন একটি বিষয় নয়। পাটীগণিত এগিয়ে আসে সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা নিয়ে, বীজগণিত সেই ধারণাটিকে সাধারণীকৃত করে, আবার সমীকরণ ব্যবহার করাতেও সাহায্য করে। আর জ্যামিতি আসে স্থান সম্বন্ধে ধারণা ও সেই জাতীয় সমস্যার সমাধানে সাহায্য করতে। এতো বিভিন্নতা থাকা সত্ত্বেও বিষয়গুলির মধ্যে একটা পারস্পরিক সংযোগ লক্ষ্য করা যায়। ত্রিকোণমিতিকে একটি পৃথক বিষয় হিসাবে না ধরে এটিকে বীজগণিত ও জ্যামিতির বিশেষ রূপান্তর বলা যেতে পারে। ত্রিকোণমিতির বৈশিষ্ট্যগুলি পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে ঐ সমস্ত বৈশিষ্টা জ্যামিতি ও বীজগণিতের ক্ষেত্রেও পাওয়া যায়। আবার ত্রিকোণমিতির সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রেও জ্যামিতি ও বীজগণিতের নীতিগুলির সাহায্য নিতে হয়। ত্রিকোণমিতির আলোচ্য অংশগুলির পরস্পরের মধ্যে যে সম্বন্ধ আছে, তার চেয়ে বেশী সম্বন্ধ আছে অংশগুলির সঙ্গে জ্যামিতি ও বীজগণিতের। যাই হোক, ত্রিকোণমিতির যে অংশগুলিকে পৃথক করা যায় না সেই অংশগুলি হল :—

(১) অনুপাতের (Ratio) সংজ্ঞা, তাদের আসন্ন মান নির্ণয়, তালিকা (tables) ব্যবহার এবং কেবলমাত্র সংজ্ঞার জ্ঞান থাকলেই সমাধান করা যাবে এমন সমস্ত সমস্যা। এগুলো অবশ্য সবগুলিই সমকোণী ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্য পড়ানোর আগেই এগুলি সম্বন্ধে আলোচনা করা যেতে পারে।

(২) লগারিদমের তত্ত্ব ও তার ব্যবহার। এটি বীজগণিতের সঙ্গে অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধযুক্ত, কাজেই Exponential Series পড়ানোর সময় এটি পড়ানো যেতে পারে।

(৩) সাধারণ ত্রিভুজের সমাধান (লগারিদমের সাহায্যে এবং সাহায্য ছাড়াও) সূত্রগুলি জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যেতে পারে।

(৪) অনুপাতগুলির মধ্যে মূলগত সম্বন্ধ নির্ণয়, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রয়োগ, একটি অনুপাতকে অন্যের তুলনাতে প্রকাশ করা, সহজ অভেদাবলী।

(৫) কোণের বিস্তৃত সংজ্ঞা : ঋণাত্মক ও ধণাত্মক কোণ। এই সমস্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের বিস্তৃত ব্যাখ্যা, সহজ সমীকরণ, যথা—cos $x = \frac{1}{2}$ ইত্যাদি অভেদাবলী।

(৬) sin (270 – A) = cos A এই জাতীয় সূত্র।
(৭) ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।
(৮) Addition Theorem এবং তার ফলাফল।

এই সমস্ত অংশগুলির পরস্পরের সঙ্গে সম্বন্ধ অত্যন্ত ক্ষীণ এবং এগুলিকে যে কোনভাবে সাজিয়ে পড়ানো যেতে পারে। অংশগুলির সঙ্গে জ্যামিতি ও বীজগণিতের একটা প্রত্যক্ষ সংযোগ আছে। প্রথম তিন-চারটি অংশ অত্যন্ত সহজ এবং এগুলি স্কুলের নবম-দশম শ্রেণীতে আরম্ভ করা যেতে পারে। বাকীগুলি অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং উচ্চমাধ্যমিক (Classes XI—XII), একাদশ, P. U. বা U. E-তে পড়ানো যেতে পারে।

ত্রিকোণমিতির বৈশিষ্ট্য হল একে খুব সহজে এবং প্রত্যক্ষভাবে কতকগুলি ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব। আর এই ব্যবহারের ক্ষেত্র বা সীমানাও বেশ ব্যাপক। গণিতের বিভিন্ন শাখার মধ্যে এই শাখাটির ব্যবহারিক মূল্যই বোধহয় সবচেয়ে বেশী।

বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে ত্রিকোণমিতি আরম্ভ করা উচিত। ত্রিকোণমিতির মূল তত্ত্ব হল একটি সূক্ষ্মকোণ বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজগুলি সদৃশ। এই কোণটি এবং বাহুগুলির ছয় প্রকার অনুপাত—এই সাতটি জিনিস এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত যে, একটি জানা থাকলে বাকীগুলি সব জানা সম্ভব। এই অনুপাতের মাপ দিয়েই বিষয়টি শুরু করা যায় কিংবা কোণটি বা অন্য কোন অনুপাত দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ অঙ্কন দিয়েও শুরু করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি হল a, b ও c, আর কোণগুলি হল A, B, C। এখন যদি $\frac{a}{c}$ এই অনুপাতটি জানা থাকে, তবে অন্য অংশগুলি জানা যাবে। কিংবা যদি A-এর মান জানা থাকে তবে অন্য অংশগুলি নির্ণয় করা যাবে। অনুপাতগুলির পরিমাপ নিয়ে কিছুদিন চর্চা করার পর এদের প্রচলিত নামগুলি শেখানো যেতে পারে। বর্তমান মত হল, ত্রিকোণমিতিকে কেবলমাত্র অনুপাতের হিসাবেই ব্যাখ্যা করতে হবে।

এরপর ছাত্রদিগকে 0° থেকে 5° করে বাড়িয়ে 90° পর্যন্ত মাপের বিভিন্ন কোণ এঁকে তাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি মাপ করতে বলা যেতে পারে। এই মাপগুলি গ্রাফ কাগজেও সাজানো যেতে পারে। এইখানেই তালিকা (Natural Value) ব্যবহার করানো যেতে পারে। তারপর সহজ অথচ চিত্তাকর্ষক বাস্তব সমস্যার সমাধানে (যেমন নদীর বিস্তৃতি মাপ করা, পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা) ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা যেতে পারে। তেমনি কতকগুলি লম্ব, অভিক্ষেপ, Parallelogram of motion প্রভৃতি ক্ষেত্রেও ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা যেতে পারে। দুপুর বেলাতে সূর্যের উন্নতি কোণ (angle of elevation) কত, তা নির্ণয় করা যায় খাড়াভাবে পুঁতে রাখা একটি কাঠির সাহায্যে। এখানেও কিন্তু ত্রিকোণমিতির সাহায্য নেওয়া হচ্ছে। এই ভাবে সহজ, সরল ও চিত্তাকর্ষক সমস্যার সাহায্যে

ছাত্রের কৌতূহল ও অনুসন্ধিৎসা সৃষ্টি করে তাকে কঠিন সমস্যার সমাধানের দিকে পরিচালিত করা যেতে পারে।

॥ প্রশ্নগুচ্ছ ॥

1. What are the aims of teaching Geometry at different stages of School education ?

2. Describe different stages of teaching Geometry to the beginners. When should reasoning be introduced ? How can the teaching of Geometry be made more interesting and effective ?

3. Write an exhaustive essay on the teaching of Geometrical theorems.

4. Discuss the aims and methods of teaching Trigonometry. When and how ot begin it ?

5. Discuss the origin and Development of Geometry.

6. What are the drawbacks of the Euclidean mode of presentation of Geometry for School children ? Discuss in this connection the changes that have taken place in recent years in the organisation and treatment of the subject-matter and their pedagogical implication.

7. Discuss the place of intuition, observation and experience in the teaching of Geometry.

8. Compare and contrast the essential of modern methods of approach to Geometry with the older method of teaching the subject and state your views regarding the effectiveness of the former for the achievement of the goals of teaching Geometry.

তৃতীয় খণ্ড

গণিতে পাঠটীকা প্রস্তুতিকরণ

(Planning of Lessons)

গণিতে কোন পাঠ দিতে গেলে একটা পূর্ব-পরিকল্পনার প্রয়োজন। উপযুক্ত পরিকল্পনার ফলে সময় এবং পরিশ্রমের অনেক সাশ্রয় হয়। এর জন্যে যে ফল পাওয়া যায় তাও বেশ সন্তোষজনক হয়। পরিকল্পনা না থাকলে পাঠদানে কতকগুলি ত্রুটী দেখা যায়। পাঠের স্তরবিন্যাস উপযুক্ত হয় না, বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের সামনে ঠিকমত উপস্থাপিত করা যায় না, নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে পাঠ দেওয়া সম্ভব হয় না এবং পাঠদান কার্যটিকে বেশ সজীব ও প্রাণবন্ত করে তোলা যায় না। এইজন্য পাঠদান কার্যে শিক্ষকের একটা পূর্ব-পরিকল্পনা অনুযায়ী নির্দিষ্ট পাঠটীকা প্রস্তুত করা একান্ত প্রয়োজন। এর জন্য শিক্ষকের পক্ষে একটা প্রস্তুতির প্রয়োজন। এখন সেই সম্বন্ধে সংক্ষেপে কিছু আলোচনা করা যাক।

শিক্ষকের প্রস্তুতি—

শ্রেণী-কক্ষে পাঠদানের উদ্দেশ্য হল সহজভাবে ছাত্রদিগকে উপযুক্ত ও কার্যকরী জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করা। এর জন্য শিক্ষকের একটি মুহূর্তও অপব্যয় করা উচিত নয়। কোন শিক্ষকের পক্ষেই শ্রেণীর পাঠ উপযুক্ত ভাবে তৈরী না করে শ্রেণীতে যাওয়া উচিত নয়। শিক্ষকের জ্ঞান ও অভিজ্ঞতা যথেষ্ট থাকতে পারে, কিন্তু তার স্মৃতির বিস্তার বা ক্ষমতা সীমাবদ্ধ। তাছাড়া ভুল করা মানুষের স্বাভাবিক ধর্ম। ঠিক সময়ে ঠিক জিনিসটি মনে না পড়লে যেমন সময়ের অপব্যয় হয়, তেমনি শ্রেণীতে শিক্ষকের মর্যাদাও ক্ষুণ্ণ হয়। এর ফলে শিক্ষককে বিষয়বস্তু মনে করার কাজেই ব্যাপৃত থাকতে হয়। কোন শ্রেণীতে শিক্ষকের কাজ হওয়া উচিত ছাত্রদের সামগ্রিক প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা। সু-শিক্ষকের বিষরবস্তুর উপর একটা দখল থাকবে—যাতে তিনি সুষ্ঠুভাবে বিষয়বস্তুটি শ্রেণীকক্ষে উপস্থাপিত করতে পারেন। তবে কেবলমাত্র বই থেকে মুখস্থ করে শ্রেণীকক্ষে ভালো ভাবে পড়ানো যায় না—যতক্ষণ না বিষয়বস্তুটি সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করা যায়। বিষয়বস্তুটি স-মনোযোগ পাঠ এবং ব্যাপক চিন্তনের ফলেই তাতে পরিপূর্ণ জ্ঞান লাভ করা সম্ভব। আবার কেবলমাত্র বিষয়বস্তুটি জানা থাকলেই শিক্ষকের দায়িত্ব শেষ হয়ে যাচ্ছে না। কিভাবে সেই বস্তুটিকে ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা হবে, কি করলে ছাত্রদের বিষয়বস্তু উপলব্ধি করা সহজ হবে, কি ভাবে প্রশ্নের অবতারণা করা যেতে পারে, এ সম্বন্ধেও শিক্ষককে উপযুক্তভাবে তৈরী হতে হবে। পাঠ-পবিকল্পনাতে শিক্ষকের কাজকে আমরা এইভাবে ভাগ করতে পারি :—

১। কি পড়াতে হবে, তা স্থির করা।

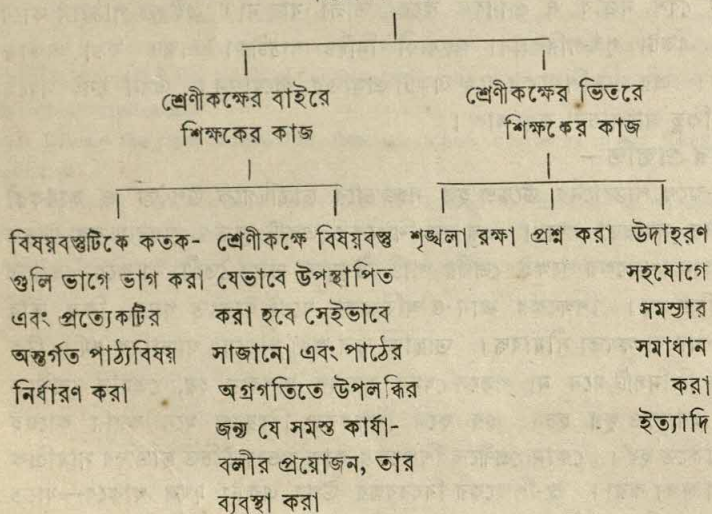
২। ছাত্রদের বয়স, মানসিক ক্ষমতা, পাঠদানের জন্য নির্ধারিত সময়, বিষয়বস্তুর প্রকৃতি ইত্যাদি বিবেচনা করা এবং শিক্ষকের পাঠদানের ক্ষমতা যাচাই করা।

৩। যুক্তিযুক্ত পদ্ধতিতে বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত করা।

৪। পাঠ-টীকা প্রস্তুত করা।

৫। শ্রেণীতে যে সমস্ত অসুবিধা সৃষ্টি হতে পারে, সেগুলির কথা চিন্তা করা এবং উপযুক্ত প্রতিকারের ব্যবস্থা করা।

পাঠ-টীকা প্রস্তুতিকরণ :

পাঠটীকা প্রস্তুত করার কাজটিকে আমরা কতকগুলি অংশে ভাগ করতে পারি। এই ভাগগুলির একটি ছক নীচে দেওয়া হল :

বিষয়বস্তুর ভাগগুলিকে 'একক' (Unit) বলে আখ্যা দিতে পারি। গণিতের এককগুলিতে কতকগুলি সূত্র ও নিয়মের ব্যাখ্যা করা হয় এবং সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ঐ সমস্ত সূত্র ও নিয়মগুলি প্রয়োগ করা হয়। অনেক সময় আবার এককগুলিকে 'বৃহত্তর একক' (Major Unit), ক্ষুদ্রতর একক (Minor Unit)—এই দু'ভাবেও ভাগ করা হয়। বলা বাহুল্য, বৃহত্তর এককের অন্তর্ভুক্ত বিষয়বস্তুর পরিমাণ, ক্ষুদ্রতর এককের অন্তর্ভুক্ত বিষয়বস্তুর পরিমাণ অপেক্ষা বেশী। শ্রেণীকক্ষের এক ঘণ্টার (Period) পাঠ কিন্তু ক্ষুদ্রতর এককের অন্তর্ভুক্ত হয়। প্রতিটি একক যেন স্বয়ংসম্পূর্ণ হয়। পাঠের শেষে ছাত্রের যেন মনে হয়, সে নূতন কিছু শিখতে পেরেছে।

একক নির্বাচনে যে সমস্ত বিষয়বস্তুর সমাবেশ করতে হয়, সেগুলির জন্যই শিক্ষককে বিশেষ ভাবে প্রস্তুত হতে হয়। এককটি বৃহত্তরই হোক আর ক্ষুদ্রতরই হোক্, সেটি শেষ করতে একটি মাত্র পিরিয়ডের প্রয়োজন হয় বা কতকগুলির প্রয়োজন হয়, সব ক্ষেত্রেই তার একটি শুরু থাকবে, শেষ থাকবে, আর শুরু থেকে শেষে পৌছাবার একটা সুনির্দিষ্ট পথ বা উপায় থাকবে। শুরুটিকে বলা যেতে পারে ভূমিকা বা সূচনা বা আয়োজন। শেষ হল পুনরালোচনা বা অভিযোজন। আর মাঝখানের অংশটি হল আসল পাঠ বা উপস্থাপন। এই উপস্থাপনটি কেমনভাবে করা হবে—তা নির্ভর করছে পাঠের বিষয়বস্তুর প্রকৃতির উপর। পাঠদানের কাজটি কি ভাবে অগ্রসর হবে—তা আবার নির্ভর করে পাঠদানের পদ্ধতির উপর। তবে যে পদ্ধতিই অবলম্বন করা হোক না কেন, আবিষ্কার করার প্রবণতাটি যেন পাঠদানে আনয়ন করা সম্ভব হয়। এইভাবে শ্রেণীকক্ষের বাইরে বিভিন্ন ভাবে প্রস্তুত হয়ে শিক্ষক শ্রেণীকক্ষের ভিতরে প্রবেশ করবেন।

শ্রেণীকক্ষের ভিতরে শ্রেণীকক্ষ পরিকল্পনার বা পরিচালনার কথা স্বাভাবিক ভাবেই আসে। শ্রেণী-পরিকল্পনা কিন্তু পাঠ পরিকল্পনার চেয়ে অনেক কঠিন। প্রতিটি ছাত্রের মানসিক বৃদ্ধি বা বিকাশের দিকে শিক্ষককেও বিশেষ মনোযোগ দিতে হবে। প্রতিটি ছাত্রের উন্নতি-অবনতির খবর নিতে হবে এবং প্রত্যেককে প্রয়োজনমত সাহায্য করতে হবে। কোন সূত্র বা নিয়ম বোঝাবার সময় লক্ষ্য রাখতে হবে, যেন সকলে সেই সূত্র বা নিয়মটি ভালো করে উপলব্ধি করার আগে কোন সমস্যা যেন তাদের সামনে উপস্থিত করা না হয়। আবার প্রথম সমস্যাটি যেন অতিমাত্রায় সহজ না হয়। সেক্ষেত্রে বিষয়বস্তু সম্বন্ধে ছাত্রের মনে একটা তাচ্ছিল্য বা অবহেলার ভাব আসতে পারে, ফলে পাঠের গুরুত্বটি সম্পূর্ণ নষ্ট হবার সম্ভাবনা অনেক বেশী। পিরিয়ডের সমস্ত সময়টি যেন বিষয়বস্তুর বিভিন্ন অংশের জন্য উপযুক্ত ভাগে ভাগ করে দেওয়া হয়। সচরাচর ৪০ মিনিটে এক পিরিয়ড হয়। এই ৪০ মিনিটের মধ্যে ১০ থেকে ১৫ মিনিট নেওয়া যেতে পারে আয়োজন ও অভিযোজন স্তরের জন্য। বাকী সময়টিতে উপস্থাপন করা চলতে পারে। এভাবে যেমন সময় ভাগ করা যায়—তেমনি প্রত্যেক ছাত্রের জন্য যাতে সমান সময় ব্যয় করা হয়, সেদিকেও দৃষ্টি দিতে হবে। কোন একজন ছাত্রের জন্য বেশী সময় ব্যয় করা চলবে না। আবার একজন ছাত্রও যেন নিষ্ক্রিয়ভাবে শ্রেণীতে বসে থাকতে না পায়। ভালো, মাঝারী, মন্দ সবরকম ছাত্রই যাতে শ্রেণীতে মনোযোগী থাকে তারা ব্যবস্থা করতে হবে। ছাত্রদের প্রেষণা উদ্বুদ্ধ করতে পারলে তারা স্বাভাবিক ভাবেই শ্রেণীতে মনোযোগী হবে। কোন ছাত্রের অসুবিধা হলে শিক্ষক তাকে ব্যক্তিগত ভাবেও সাহায্য করতে পারেন, আবার শ্রেণীতে অন্যান্য ছাত্রদের মাধ্যমে, প্রশ্নোত্তরের সাহায্যে তার অসুবিধাটি দূর করতে পারেন। এ ব্যাপারে যারা ভালো ছেলে তারা মাঝারী ও মন্দ ছেলেদের সাহায্য করতে পারে। এক কথায়, শিক্ষক শ্রেণীতে বিশ্বস্তভাবে ও দক্ষতার সঙ্গে এমনভাবে পাঠ-পরিচালনা করবেন, যাতে ছাত্ররা প্রকৃতপক্ষে উপকৃত হতে পারে।

এবার **পাঠটীকার** কথা আলোচনা করা যাক।

অন্যান্য বিষয়ের মতো গণিতে পাঠটীকা প্রস্তুত করার সময় হার্বাটীয় সোপান-গুলিরই সাহায্য নেওয়া হয়ে থাকে। অবশ্য হার্বাটের স্তরগুলি যেভাবে ছিল, ঠিক সেইভাবে নেওয়া হয় না। এ প্রসঙ্গে প্রথমে হার্বাটের মূল স্তরগুলি এবং তার পরিবর্তিত রূপগুলির কথা সংক্ষেপে আলোচনা করা যেতে পারে।

* হার্বটের মূল স্তরগুলি (Formal Steps) ছিল এই প্রকার :—

১। স্পষ্টতা বা Clearness.

২। সাদৃশ্য বা অনুবন্ধ বা Association,

৩। সু-সংবদ্ধতা বা System.

৪। পদ্ধতি বা অনুশীলনের ফলে উন্নতি বা Method.

এর পরিবর্তিত রূপগুলি হল—

১। আয়োজন বা অবতারণা (Preparation) } হার্বাটের 'স্পষ্টতা'
২। উপস্থাপন (Presentation) } স্তরের বদলে।

৩। বিষয়-সম্মিলন (Comparison or Association)—সাদৃশ্য বা অনুবন্ধের বদলে।

৪। সূত্র-নির্ধারণ (Generalisation)—সু-সংবদ্ধতা স্তরের বদলে।

৫। প্রয়োগ বা অভিযোজন (Application)—পদ্ধতির বদলে।

এই স্তরগুলিকেই 'পঞ্চ-সোপান' বলা হয়। এই পরিবর্তিত রূপ হার্বাটের প্রিয় শিষ্য জিলারের (Ziller) দেওয়া। পরে রেড (Reid) আয়োজন স্তরে পাঠের উদ্দেশ্য নামে আর একটি ছোট্ট স্তরের অবতারণা করেন।

গণিতের পাঠটীকা প্রস্তুত করার ব্যাপারে সচরাচর নীচের স্তরগুলি ব্যবহার করা উচিত।

প্রথম স্তর : আয়োজন (Introduction)।

এই স্তরের উদ্দেশ্য হল ছাত্রদের মন নূতন জ্ঞান গ্রহণ করার উপযোগী করে তোলা। এই স্তরের ছাত্রের পূর্বজ্ঞান সম্বন্ধে শিক্ষক একটা ধারণা অর্জন করে নিতে পারেন। পূর্বজ্ঞান সম্বন্ধে ধারণা না থাকলে নূতন জ্ঞান দেওয়া সম্ভব নয়। আয়োজন স্তরে পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে ছাত্রকে প্রশ্ন করা হয়। এতে ছাত্র যেমন প্রেষণা বোধ করে তেমনি তার নিজের ক্ষমতা সম্বন্ধেও একটা ধারণা অর্জন করে।

দ্বিতীয় স্তর : উদ্দেশ্যের বর্ণনা (Statement of Aim)।

পাঠের উদ্দেশ্যটি পরিষ্কারভাবে ছাত্রদের নিকট ব্যক্ত করতে হবে। উদ্দেশ্য দু'রকমের হতে পারে—প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষ। প্রতিটি পাঠেরই এই দু'টি উদ্দেশ্য থাকে। উদ্দেশ্যটি জানা থাকলে পাঠদানের গতি সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব।

---

* হার্বাটের স্তরবিন্যাস ভালোভাবে জানতে হলে Prof. K. K. Mookherjee প্রণীত Some Great Educators পাঠ করা বাঞ্ছনীয়।

তৃতীয় স্তর : উপস্থাপন (Presentation)।

বিষয়বস্তুটি ছাত্রদের নিকট যুক্তিযুক্তভাবে এবং মনোবিজ্ঞানসম্মতভাবে উপস্থাপিত করতে হবে। পাঠের উদ্দেশ্য অনুযায়ী বিষয়বস্তু উপস্থাপিত করার পদ্ধতিটি নির্ধারণ করতে হবে। শিক্ষককে এই স্তরে স্থির করতে হবে, তিনি কতটুকু কাজ করবেন, আর ছাত্ররা কতটা কাজ করবে। বাস্তব, মূর্ত ও বিশেষ বিশেষ উদাহরণের মাধ্যমে শিক্ষককে অগ্রসর হতে হবে। বিষয়বস্তুটি দীর্ঘ হলে কতকগুলি ছোট ছোট ভাগে সেটিকে ভাগ করে নিয়ে পড়াতে হবে। পরে সবগুলিকে একত্রিত করতে হবে। সাধারণতঃ প্রশ্ন এবং উত্তরের মাধ্যমে বিষয়বস্তুটির পাঠ এগিয়ে নিয়ে গেলে ভালো হয়।

চতুর্থ স্তর : সূত্র নির্ধারণ (Formulation or Generalisation)।

এই স্তরে শিক্ষক মূর্ত স্তর থেকে বিমূর্ত স্তরে অগ্রসর হবেন। তুলনা করা, সাদৃশ্য-বৈসাদৃশ্য নির্ণয় করা প্রভৃতির মাধ্যমে বিমূর্ত স্তরে উপনীত হওয়া যায়। তবে শিক্ষককে মনে রাখতে হবে, যে সমস্ত উদাহরণ বা ঘটনার মধ্যে তুলনা করা হবে সেগুলি যেন ছাত্রের জানা থাকে। আর এ রকমভাবে তুলনা করা উচিত, যাতে ছাত্রের চিন্তা-শক্তি বৃদ্ধি পায়। এর থেকে কোন একটা সাধারণ সূত্রে উপনীত হওয়া যায়। কোন সূত্র গঠন করতে হলে সুকৌশলে প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহায়তায় সূত্রটি গঠন করতে হবে।

পঞ্চম স্তর : অভিযোজন (Recapitulation)।

জ্ঞানকে তখনই একটা শক্তি বলা যেতে পারে যখন জ্ঞানের প্রয়োগ সম্ভব হয়। উপযুক্ত ব্যবহারের ফলেই জ্ঞান পাকা হয়। উপস্থাপন স্তরে ছাত্র যা শিখল, সে যেভাবে সূত্র নির্ধারণ করল, সেগুলি যে সত্য তা যাচাই করা উচিত। অভিযোজন স্তরে ব্যবহারের মাধ্যমে জ্ঞানের সত্যতা যাচাই করা হয়। এই স্তরকে পরবর্তী স্তরে উচ্চতর জ্ঞানলাভের প্রারম্ভিক সোপান বলা যেতে পারে। বৃহত্তর এককের ক্ষেত্রে অভিযোজন বলতে সমস্ত অংশটি সম্বন্ধে অর্জিত জ্ঞানের সূক্ষ্ম সমালোচনা বোঝায়। আর ক্ষুদ্রতর এককের ক্ষেত্রে অভিযোজন বলতে পাঠ্য বিষয়ের জ্ঞান ছাত্র আয়ত্ত করতে পেরেছে কিনা তার পরীক্ষা করা এবং ঐ জ্ঞানকে বাস্তব ক্ষেত্রে ব্যবহার করতে সাহায্য করাতে বোঝায়।

শিক্ষকরা পাঠদানের জন্য শ্রেণীকক্ষে সাধারণতঃ হার্বার্টের পদ্ধতি অনুসরণ করেন। এই পদ্ধতির বৈশিষ্ট্যই হ'ল জানা থেকে অজানায় যাওয়া এবং পূর্বজ্ঞানের ভিত্তির উপর নতুন জ্ঞান দান করা। যুক্তি অনুসরণ করে আরোহী পদ্ধতিতে ক্রমশঃ স্তরে স্তরে পাঠটি এগিয়ে নিয়ে যেতে হয়। কিন্তু সব সময় যে এই পদ্ধতিটি অনুসরণ করতেই হবে এমন ধরা-বাঁধা কোন নিয়ম নেই। অন্য কোন পদ্ধতি অবলম্বন করলে যদি শিক্ষাদান কার্যটি সহজ ও সুফলদায়ক হয়, তবে সেই পদ্ধতিটি অনুসরণ করতে হবে। মাঝে মাঝে একাধিক পদ্ধতি একসঙ্গে প্রয়োগ করার প্রয়োজনও দেখা দিতে পারে।

তবে হার্বার্টের পদ্ধতি অনুসরণ করে শিক্ষা দিতে হলে কতকগুলি বিষয় সম্বন্ধে সচেতন থাকা প্রয়োজন। সেগুলি হল :—

১। গণিতে সূত্র বা নিয়ম গঠন করতে হয় আবার পূর্ব-গঠিত সূত্র বা নিয়ম শিক্ষা করতেও হয়। এক্ষেত্রে গোড়ার দিকে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করাই শ্রেয়ঃ

২। ঠিক একই কারণে সংশ্লেষণ পদ্ধতির পরিবর্তে বিশ্লেষণ পদ্ধতি ব্যবহার করা উচিত।

৩। গণিত মুখস্থ করার বিষয় নয়—উপলব্ধি করার বিষয়। এর প্রত্যেকটি স্তরে যুক্তির প্রয়োজন। এজন্য আবিষ্কারকের পদ্ধতি অবলম্বন করলে ফল ভালো পাওয়া যায়।

৪। গণিত বিষয়টি ধারাবাহিক। এর কোন অংশই সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন নয়। কেবলমাত্র পাঠদান কার্য সুপরিচালিত করার জন্য এটিকে বিভিন্ন অংশে ভাগ করা হয়। একদিনের একটি পাঠ সম্পূর্ণ একটি অংশও হতে পারে আবার সম্পূর্ণ অংশের একটি খণ্ডও হতে পারে। বৃহত্তর অংশটিকে "সাধারণ পাঠ" (Major Lesson Unit) এবং দৈনন্দিন পাঠটিকে "বিশেষ পাঠ" (Minor Lesson Unit) হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। কিন্তু প্রত্যেকদিন যেন বিশেষ পাঠের এককটি সম্পূর্ণ হয় সে বিষয়ে দৃষ্টি দিতে হবে।

৫। প্রত্যেক পাঠের একটি উদ্দেশ্য থাকে। উদ্দেশ্যটিকে আবার অনেকে মুখ্য-গৌণ বা প্রত্যক্ষ-পরোক্ষ এই ভাবে ভাগ করেন। বিষয়বস্তু সম্বন্ধে শিক্ষাদান করাই হল মুখ্য বা প্রত্যক্ষ উদ্দেশ্য। বিষয়বস্তুর পাঠদানের মাধ্যমে প্রাসঙ্গিকক্রমে যে সমস্ত শিক্ষা ছাত্ররা লাভ করে সেগুলি হ'ল গৌণ বা পরোক্ষ উদ্দেশ্য। তবে উদ্দেশ্যকে ঠিক এইভাবে ভাগ করা উচিত নয়। উভয়ের সমন্বয়ে একটি উদ্দেশ্য স্থির করা উচিত এবং তা যেন ছাত্ররা উপলব্ধি করে।

৬। সব শ্রেণীতে শিক্ষাদানের উদ্দেশ্য এক হবে না। ছাত্রদের মানসিক বয়স, যুক্তি ও বিচারকরণ ক্ষমতা, বিষয়বস্তুর প্রকৃতি ইত্যাদির উপর নির্ভর করে উদ্দেশ্যটিও পরিবর্তিত হবে।

৭। আয়োজন স্তরে পূর্বজ্ঞান নির্ধারণ করতে হবে এবং প্রকৃতপক্ষে আগে যা পড়ানো হয়েছে তার উপর প্রশ্ন করতে হবে। এই স্তরে অনুমানের উপর ভিত্তি করে কিছু করা উচিত নয়।

৮। উপকরণ স্তরে প্রকৃতপক্ষে যে সমস্ত চার্ট, মডেল বা প্রদীপন ব্যবহার করা হবে, তারই উল্লেখ থাকবে। এমন কোন উপকরণের উল্লেখ থাকবেনা যা দেখানো হবে না বা দেখানো সম্ভব নয়।

৯। পাঠঘোষণাটি হঠাৎ এসে যাওয়া উচিত নয় এবং এটি নাটকীয়ভাবে ঘোষণা করাও উচিত নয়। কিন্তু কি বিষয়ে নতুন পাঠ দেওয়া হচ্ছে ছাত্রদের তা সুস্পষ্ট-ভাবে বুঝিয়ে না বললে তাদের প্রস্তুতি ও মনোযোগ আশানুরূপ হবে না।

১০। বিষয়বস্তুর উপস্থাপনে সবিশেষ যত্ন নিতে হবে। এটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ স্তর। উপস্থাপন যেন ছাত্রদের বুদ্ধি, আগ্রহ ও মানসিক বয়স অনুযায়ী হয় এবং এর মান (Standard) উচ্চ হলেও বিপজ্জনক, নিম্ন হলেও ক্ষতিকর। ছোট ছোট প্রশ্নোত্তর, চিত্র, পরীক্ষা-নিরীক্ষা প্রভৃতির মাধ্যমে পাঠটি এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে। এই স্তরের

প্রশ্নগুলি কিন্তু পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার প্রশ্ন হয় (নতুন জ্ঞান সে উপলব্ধি করতে পারছে কিনা তা দেখার জন্য)। ঠিকমত প্রশ্ন করার উপর পাঠের সাফল্য অনেকাংশে নির্ভর করে। দ্ব্যর্থবোধক বা হ্যাঁ না জাতীয় প্রশ্ন বাদ দিতে হবে। প্রশ্নের উত্তর দিতে যেন ছাত্রকে একটি সম্পূর্ণ বাক্য ব্যবহার করতে হয়। আবার প্রশ্নের মধ্যেই উত্তরের সংকেত থাকলেও খারাপ—কারণ সেক্ষেত্রে ছাত্রদের চিন্তা করতেই হয় না। 'কি, কখন, কোথায়' ইত্যাদি জাতীয় প্রশ্নের মাধ্যমে ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের পরিচয় পাওয়া যায়; আর 'কেন, কিভাবে, কেমন করে'—ইত্যাদি জাতীয় প্রশ্নের মাধ্যমে তাদের চিন্তাশক্তি জাগ্রত করা সম্ভব।

১১। সামান্যীকরণ ও সূত্র প্রয়োগের ক্ষেত্রে আরোহী পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে। উপস্থাপন স্তরেই মূর্ত স্তর থেকে অমূর্ত স্তরে অগ্রসর হতে হয়।

১২। অভিযোজন স্তরের প্রশ্নগুলি হবে প্রয়োগমূলক (Testing)। সে দিনের পাঠটি কতদূর আয়ত্ব বা উপলব্ধি করল তা পরীক্ষা করা হয় এই স্তরে।

১৩। গৃহ কাজ দিতে হবে শ্রেণীর পাঠটিকে অভ্যাস করানোর জন্য। এটি যেন পরের দিনের পাঠের প্রস্তুতি না হয়। গৃহকাজ যেন ঠিকমত শিক্ষক কর্তৃক পরীক্ষিত হয়। তা না হলে গৃহকাজের কোন গুরুত্বই থাকবেনা—আর ছাত্ররাও গৃহকাজে হয় ফাঁকি দেবে, নয়তো অন্য কারো খাতা থেকে টুকবে।

১৪। দিনের পাঠটির দৈর্ঘ এমনভাবে স্থির করতে হবে যেন নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে তা শেষ হয়। ৪০ মিনিটের পিরিয়েড আয়োজন স্তরের জন্য ৫—৭½ মিঃ, অভিযোজন স্তরের জন্যও ৫—৭½ মিঃ এবং উপস্থাপন স্তরের জন্য ২৫—৩০ মিঃ সময় দেওয়া উচিত।

যাই হোক এই সমস্ত কথা মনে রেখেই বিষয়ের এবং বিভিন্ন অধ্যায়ের পাঠটীকা প্রস্তুত করতে হয়। পাঠটীকা প্রস্তুত করার ক্ষেত্রে যে যে স্তরগুলি অনুসরণ করতে হয় এবং যে ভাবে পাঠটীকা লিখতে হয় তার নমুনা আর একবার দেওয়া হল :—

পাঠটীকা

বিদ্যালয়……	বিষয় : …
শ্রেণী……	সাধারণ পাঠ :…
ছাত্র/ছাত্রী সংখ্যা	বিশেষ পাঠ :…
*গড়বয়স :……	পাঠক্রম : (১)
সময় : (সাধারণতঃ ৪০ মিঃ)	*(২)
তারিখ :……	(৩)
শিক্ষক/শিক্ষিকা : ……	(৪)
	*অদ্যকার পাঠ

* সাধারণতঃ ৫ম শ্রেণীতে গড় বয়স ১০+ধরে উঁচু ক্লাসের গড় বয়স হিসাব করতে হয়। ১০+এর অর্থ বয়স ১০ বছরের চেয়ে দু-একমাস বেশীও হতে পারে।

১ম স্তরঃ উদ্দেশ্য (Aim)
২য় স্তরঃ উপকরণ (Aids)
৩য় স্তরঃ আয়োজন (Preparation)
৪র্থ স্তরঃ পাঠঘোষণা (Announcement)
৫ম স্তর ঃ উপস্থাপন (Presentation)
৬ষ্ঠ স্তর ঃ অভিযোজন (Application)
৭ম স্তরঃ বাড়ীর কাজ (Home work)

এই স্তরগুলি মনে রাখলে পাঠটীকা প্রস্তুত করা সহজ হবে। বাড়ীর কাজ দেবার সময় অঙ্কের ক্ষেত্রে 'অমুক প্রশ্নমালার…নং,…নং অঙ্ক করে আনবে', বা জ্যামিতির ক্ষেত্রে '…নং উপপাদ্য লিখে আনবে', এভাবে না বলে অঙ্কগুলি বা জ্যামিতির সাধারণ সূত্রটি লিখে দিতে হবে। ছাত্র বাড়ীর কাজ আনলে সেগুলি ঠিকমত সংশোধিত করে ছাত্রকে ফেরত দিতে হবে।

[বিঃ দ্রঃ পঞ্চম শ্রেণীতে গড় বয়স 10+ধরা হয় ; সেইভাবে অন্য শ্রেণীর গড় বয়স নির্ণয় করা হয়। ছাত্র সংখ্যা যেন 40-এর বেশী না হয় এবং সময় ধরা হয় 40—45 মিনিট।]

পাঠটীকা নং—১

বিদ্যালয়—	বিষয়—পাটীগণিত
শ্রেণী—VI	সাধারণ পাঠ—দশমিক ভগ্নাংশ
ছাঃসংখ্যা—	
গড় বয়স—11+	বিশেষ পাঠ—দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে প্রথম পাঠ।
সময়—40 মিনিট	
তারিখ—	অদ্যকার পাঠ—ঐ।
শিক্ষক—	

উদ্দেশ্য—ছাত্রদিগকে দশমিক ভগ্নাংশের প্রকৃতি ও নিয়মের সঙ্গে পরিচিত করা এবং তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধন করা, যাতে তারা ভবিষ্যতে দশমিক ভগ্নাংশ সম্বন্ধে লব্ধ জ্ঞান প্রয়োগ করতে পারে।

উপকরণ—একটি স্কেল ও শ্রেণীকক্ষের সাধারণ সরঞ্জাম।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করে তাদের নূতন পাঠে আগ্রহী করবার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হবে—

(১) ভগ্নাংশের কয়টি অংশ ? কি কি ?
(২) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশে লব ও হরগুলি কি কি ?
(৩) তোমাদের স্কেলটি কত ইঞ্চি লম্বা ?
(৪) প্রতি ইঞ্চি আবার কত ভাগে বিভক্ত ?

(৫) 8 জন লোককে 200 টাকা সমান ভাগে ভাগ করে দিলে একজন কত পায় ?
(৬) 25 টাকা 200 টাকার কত অংশ ?
(৭) 100 টাকাকে কত ভাগে ভাগ করলে এক ভাগ = 1 টাকা হবে ?
(৮) 1-কে সমান 10 ভাগ করলে এক ভাগ কত হবে ?
(৯) $\frac{1}{10}$-কে সমান 10 ভাগে ভাগ করলে এক-এক ভাগ কত হয় ?
(১০) $\frac{1}{100}$-কে যদি আবার সমান 10 ভাগে ভাগ করা যায়, তবে এক ভাগ কত হবে ?

পাঠ-ঘোষণা | অতঃপর শিক্ষক মহাশয়, "আজ আমরা দশমিক ভগ্নাংশ শিক্ষা করব," এই বলে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে কতকগুলি সরলরেখা টানবেন এবং ছাত্রদের সেগুলির দৈর্ঘ্য মাপ করে খাতায় লিখে রাখতে বলবেন। মনে করা যাক, রেখাগুলির দৈর্ঘ্য নিম্নরূপ হল—

১ম রেখা $3\frac{4}{10}$ ইঞ্চি
২য় ,, $4\frac{7}{10}$,,
৩য় ,, 5 ,,
৪র্থ ,, $6\frac{6}{10}$,, + কিছু ভগ্নাংশ
৫ম ,, $7\frac{5}{10}$,, + কিছু ভগ্নাংশ

শিক্ষক মহাশয় ৪র্থ ও ৫ম রেখা দুইটির দৈর্ঘ্য আলোচনার জন্য বোর্ডে লিখবেন এবং প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে নিম্নানুরূপ ভাবে অগ্রসর হবেন—

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
৪র্থ রেখাটির দৈর্ঘ্য কত ?	$6\frac{6}{10}$ ইঞ্চি + কিছু ভগ্নাংশ।
এই ভগ্নাংশটি কি জাতীয় ?	দশক স্থানীয় ভগ্নাংশ (fraction of tenth)
যদি স্কেলে ইঞ্চির ভাগগুলিকে 100 ভাগে ভাগ করা থাকত, তবে ভগ্নাংশটি কি ভাবে লেখা চলত ?	$6\frac{6}{10}$ ইঞ্চি + শতক স্থানীয় কোন ভগ্নাংশ।
মনে করা যাক, দৈর্ঘ্যটি হতে পারত $6\frac{6}{10}$ ইঃ + $\frac{3}{100}$ + শতক স্থানীয় ভগ্নাংশের কোন ভগ্নাংশ। সে ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যটি কি ভাবে লেখা চলত।	$6\frac{6}{10}+\frac{3}{100}$ + সহস্র স্থানীয় কোন ভগ্নাংশ বা $6+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+$ এমন কোন ভগ্নাংশ যার হর 1000।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় ভগ্নাংশগুলি কি ভাবে লেখা যেতে পারে তা বুঝিয়ে দেবেন। প্রতিটি ভগ্নাংশ এইভাবে লেখা চলতে পারে—

$$P+\frac{Q}{10}+\frac{R}{100}+\frac{S}{1000}+\cdots\cdots$$

P, Q, R, S……প্রভৃতি 0, 1, 2, 3……9 পর্যন্ত যে কোন সংখ্যা হতে পারে।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় বলবেন যে প্রতি ক্ষেত্রে বার বার ভগ্নাংশের হরগুলি লিখতে হয় না বা বার বার যোগ চিহ্নও দিতে হয় না। সংক্ষিপ্ত উপায়েও ভগ্নাংশ প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন—

$6+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1000}$ এই ভগ্নাংশটি বিভিন্নভাবে লেখা যায়। যথা—

$\frac{6}{637}, 6\frac{637}{1000}, 6{\cdot}6'' 3''' 7''''$ বা $6{\cdot}637'$

এর মধ্যে 6·637 এই রূপটিই ব্যাপকভাবে গ্রহণ করা হয়েছে। কোন ভগ্নাংশকে এইভাবে লেখার নামই দশমিক প্রথা এবং ভগ্নাংশটি সব সময় 1-এর থেকে কম, অংশগুলিও 10 বা 10-এর কোন গুণিতকের অংশ।

এর পর শিক্ষক মহাশয় দশমিক বিন্দু (·) সম্বন্ধে ছাত্রদের ধারণা দেবেন। এর জন্য $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{1000}$ ইত্যাদি জাতীয় ভগ্নাংশের সাহায্যে তিনি অগ্রসর হতে পারেন। তারপর কি ভাবে দশমিক ভগ্নাংশ পড়তে হয় তা বুঝিয়ে দিতে হবে। 3·75-কে তিন দশমিক পঁচাত্তর না বলে কেন তিন দশমিক সাত পাঁচ বলা হয়, তা বুঝিয়ে দিতে হবে। এরপর একটি ছকের সাহায্যে দশমিকের স্থানাঙ্কগুলি সম্বন্ধে একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। যেমন 5555·555 এই ভগ্নাংশটি এইভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে—

সহস্র	শতক	দশক	একক	দশাংশ	শতাংশ	সহস্রাংশ
5	5	5	5	5	5	5

তারপর দশমিক বিন্দুর সঙ্গে 10-এর সম্বন্ধটি ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে। 10 দিয়ে গুণ করলে দশমিক বিন্দু ডানদিকে এক ঘরে সরে যায় অর্থাৎ এর মান দশগুণ বেড়ে যায়। আবার 10 দিয়ে ভাগ করলে দশমিক বিন্দু বামদিকে এক ঘর সরে আসে অর্থাৎ এর মান দশগুণ কমে যায়।

এর পর অভিযোজন স্তর। তারপর বাড়ীর কাজ দেওয়া চলবে।

২নং পাঠটীকা—সপ্তম শ্রেণীর জন্য

বিষয়-পাটীগণিত

অঙ্কের পাঠ : লাভক্ষতি সংক্রান্ত সমস্যা সমূহের সমাধান

উদ্দেশ্য—ছাত্রদিগকে পাটীগণিতের লাভ-ক্ষতি সংক্রান্ত সমাধানে জ্ঞান আহরণ করতে সহায়তা করা এবং তাদের চিন্তাশক্তি, কল্পনাশক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধন করে সক্রিয়ভাবে অঙ্কের পাঠে আকৃষ্ট করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় উপকরণাদি।

আয়োজন—অদ্যকার পাঠে ছাত্রদিগকে মনোযোগী করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা করবেন।

(১) একটি কলম দশ টাকায় কিনলে আর পনের টাকায় বিক্রী করলে, তুমি কম না বেশী পেলে?
(২) কলমটি বিক্রী করে তুমি কয় টাকা বেশী পেলে?
(৩) এই পাঁচ টাকা বেশী পাওয়ায় তোমার কি হল?
(৪) বিক্রী করে এই দশ টাকার চেয়ে কম পেলে তোমার কি হ'ত?

পাঠ-ঘোষণা—"অদ্য আমরা লাভ-ক্ষতি সংক্রান্ত সমস্যাসমূহ সম্বন্ধে আলোচনা করব",—এই বলে শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে অদ্যকার পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীর মধ্যে ছাত্রদের সহযোগিতায় একটি দোকানের অনুরূপ পরিস্থিতির সৃষ্টি করবেন। তাতে কলম বিক্রয় হবে। শিক্ষক মহাশয় প্রথমে দুজন ছাত্রকে ডাকবেন। তাদের মধ্যে একজন ছাত্র কলমের দোকানের ক্রেতা হবে ও অপরজন বিক্রেতা হবে। ক্রেতা ছাত্র বিক্রেতা ছাত্রকে জিজ্ঞাসা করবে, "তোমার এই কলমটির মূল্য কত?" তখন বিক্রেতা ছাত্র উত্তর দেবে, "এই কলমটির দাম পাঁচ টাকা।" তারপর ক্রেতা ছাত্র পাঁচ টাকা দিয়ে কলমটি নেবে।

তারপর ক্রেতা ছাত্রটি বিক্রেতা ছাত্র হবে এবং শিক্ষক মহাশয় অপর একটি ছাত্রকে ডাকবেন। এই ছাত্রটি বর্তমানে ক্রেতা হবে। এবার এই ক্রেতা ছাত্রটি বিক্রেতা ছাত্রকে জিজ্ঞাসা, করবে "তোমার এই কলমটির মূল্য কত?" তখন এই বিক্রেতা ছাত্রটি বলবে, "এই কলমটির মূল্য 6 টাকা।" এরপর ক্রেতা ছাত্রটি 6 টাকা মূল্য দিয়ে কলমটি ক্রয় করবে।

তখন শিক্ষক মহাশয় বলবেন, এই কলমটি পূর্বে ক্রয় করা হয়েছিল পাঁচ টাকায় ও বিক্রী করা হল ছয় টাকায়, তা হলে কত টাকা বেশীতে বিক্রয় করা হয়েছে? তারপর শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে কতকগুলি সাধারণ প্রশ্নের অবতারণা করবেন এবং ছাত্রদের সহযোগিতায় উত্তর তৈরী করবেন।

প্রশ্ন	উত্তর
(1) কোন জিনিসের ক্রয়-মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়-মূল্য বেশী হলে কি হয়?	(1) লাভ হয়।
(2) কোন জিনিসের বিক্রয়-মূল্য অপেক্ষা ক্রয়-মূল্য বেশী হলে কি হয়?	(2) ক্ষতি হয়।

(3। একজন দোকানদার একটি পুস্তক 10 টাকায় ক্রয় করে পরে ঐ পুস্তক 15 টাকায় বিক্রয় করেছিল।

(i) পুস্তকটির ক্রয়-মূল্য কত? — (i) 10 টাকা

(ii) পুস্তকটির বিক্রয়-মূল্য কত? — (ii) 15 টাকা

(iii) তাহলে বিক্রয়-মূল্য বেশী, না ক্রয়-মূল্য বেশী? — (iii) বিক্রয়-মূল্য বেশী।

(iv) বিক্রয়-মূল্য বেশী হলে কি হয়? — (iv) লাভ হয়।

(v) পুস্তকটি বিক্রয় করে কত লাভ হয়েছে? — (v) $15-10=5$ টাকা। পাঁচ টাকা লাভ হয়েছে।

অভিযোজন ছাত্রদের অন্তকার নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা করবেন এবং প্রয়োজনবোধে ছাত্রদিগকে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করবেন।

(1) কোন জিনিসের ক্রয়-মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়-মূল্য বেশী হলে কি হয়?

(2) কোন জিনিসের বিক্রয়-মূল্য অপেক্ষা ক্রয়-মূল্য বেশী হলে কি হয়?

(3) কোন ব্যবসায়ী 15টি গরু 200 টাকায় ক্রয় করেছিল। কিন্তু 5টি গরু হঠাৎ মরে গেল। তারপর সে প্রত্যেকটি গরু 15 টাকা করে বিক্রয় করেছিল। তাহলে তার কত লাভ বা ক্ষতি হয়েছিল?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় বাড়ীতে ছাত্রদিগকে করে আনবার জন্য নিম্নানুরূপ অঙ্কটি বোর্ডে লিখে দেবেন।

কোন জিনিসের ক্রয়-মূল্য 50 টাকা, কিন্তু বিক্রয়ের সময় তার মূল্য হল 59·20 টাকা। তাহলে জিনিসটা বিক্রয় করে কত লাভ হল?

৩ নং পাঠটীকা—অষ্টম শ্রেণীর জন্য

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—সূত্র (Formula)

বিশেষ পাঠ $(a+b)^3$

উদ্দেশ্য—(1) $(a+b)^3$ সূত্র নির্ণয় করতে ছাত্রদিগকে সহায়তা করা।

(2) ত্রি-আয়তন বস্তু সম্বন্ধে ধারণা দেওয়া ও বীজগণিত শিক্ষার মাধ্যমে ছাত্রদের চিন্তাশক্তি, বিচারশক্তি, ও যুক্তিশক্তির বিকাশ সাধনে সাহায্য করা।

উপকরণ—ত্রি-আয়তন (ঘনক) বস্তুর একটি মডেল ও শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জাম।

আয়োজন—পাঠে ছাত্রদের আগ্রহ সৃষ্টি করবার জন্য তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে :—

(1) $a\times a$ এর গুণফল কত ?
(2) $a^2\times b$ এর গুণফল কত ?
(3) $a^2b+a^2b+a^2b=$ কত হবে ?
(4) $a\times a\times a$ এর গুণফল কত ?
(5) a এর বর্গ কত ?
(6) a এর ঘন কত ?
(7) $(a+b)(a+b)$ আর কিভাবে লেখা যায় ?
(8) $(a+b)(a+b)(a+b)$ আর কি ভাবে লেখা যায় ?
(9) $(a+b)^3=$ কত হবে ?

পাঠ ঘোষণা—'আজ আমরা $(a+b)^3$ সূত্র নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করব', এই বলে পাঠ ঘোষণা করা হবে।

উপস্থাপন—ছাত্রদের সক্রিয় সহযোগিতায় প্রশ্ন-উত্তরের মাধ্যমে পাঠ পরিচালনা করা হবে।

বিষয়

(1) $(x+2)(x+2)=(x+2)^2=x^2+2x.2+4$
(2) $(x+2)(x+2)(x+2)=(x+2)^2(x+2)=(x+2)^3$
$=x^3+3x^2.2+3.x.4+8$
(3) $(x+3)(x+3)(x+3)=(x+3)^2(x+3)=(x+3)^3$
$=(x^2+6x+9)(x+3)=x^3+3(x)^2.3+3(x)(3)^2+(3)^3$
(4) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)=(a+b)^3$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=(a)^3+3(a)^2b+3(a)(b)^2+b^3$

এখন ছাত্রদের সহায়তায় $(a+b)^3$-এর সূত্র বোর্ডে লিখে দেওয়া হবে। (প্রথম পদ + দ্বিতীয় পদ)^3 = (প্রথম পদ)^3 + 3 (প্রথম পদ)^2. দ্বিতীয় পদ + 3 প্রথম পদ. (দ্বিতীয় পদ)^2 + (দ্বিতীয় পদ)^3

পদ্ধতি

(1) $(x+2)(x+2)$ এর গুণফল কত ?
(2) $(x+2)(x+2)(x+2)$ এর গুণফল কত ?
(3) $(x+3)(x+3)(x+3)$ এর গুণফল কত ?
(4) $(a+b)(a+b)(a+b)$ এর গুণফল কত ?

অভিযোজন—ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(1) $(x+4)$ এর ঘনফল নির্ণয় কর।
(2) $(x+5)$ এর ঘনফল কত ?
(3) মান নির্ণয় কর, $(a+1)^3$, $(abc+1)^3$

গৃহকাজ—নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে।

(1) $(x+a)^3=$ কত হবে ? (2) $(3x+4y)$ এর ঘনফল নির্ণয় কর।
(3) $(a+5)^3=$ কত ? (4) মান নির্ণয় কর :—$(ab+bc)^3$, $(cd+ab)^3$, $(x+4)^3$

৪ নং পাঠটীকা—অষ্টম শ্রেণীর জন্য

বিষয়—জ্যামিতি

অদ্যকার পাঠ—ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ

উদ্দেশ্য—শিক্ষার্থীদের তিনটি কোণের সমষ্টি নির্ণয়ে সহায়তা করা এবং তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জাম, জ্যামিতি অঙ্কনের যন্ত্র (Instrument Box) এবং একটি ত্রিভুজের মডেল।

আয়োজন—শিক্ষার্থীদের কৌতূহল ও আগ্রহ জাগ্রত করে পাঠাভিমুখী করবার জন্য আনুষঙ্গিক পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করবেন।

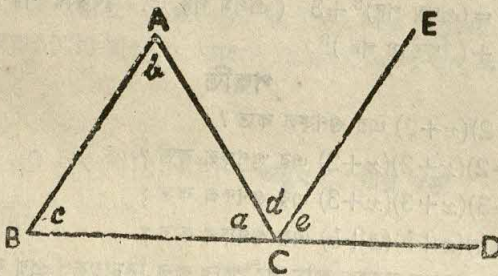
(১) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হলে সন্নিহিত কোণ দু'টির সমষ্টি কত ?

(২) দু'টি সমান্তরাল সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে যে (1) একান্তর কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের কি সম্বন্ধ ? (2) যে অনুরূপ কোণগুলি উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যেই বা কি সম্বন্ধ ?

(৩) সরল কোণের পরিমাপ কত ডিগ্রী ?

(৪) ত্রিভুজের কয়টি কোণ ? কোণগুলির সমষ্টি কত ?

(৫) চাঁদা ব্যতীত কি ভাবে ত্রিভুজের কোণ সমষ্টি পরিমাপ করা যায় ?

পাঠ ঘোষণা : আজ আমরা ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি নির্ণয় করবার পদ্ধতি। সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করব।

বিষয়	পদ্ধতি
উপস্থাপন—	
(১) একটি ত্রিভুজ।	(১) চিত্রটি কি ?
(২) ABC ত্রিভুজ।	(২) ত্রিভুজটির কি নাম দেওয়া যেতে পারে ?
(৩) তিনটি কোণ—a, b, c,	(৩) ABC ত্রিভুজের কয়টি কোণ এবং কি কি ?

বিষয়	পদ্ধতি
(৪) $\angle a+\angle b+\angle c=2$ সমকোণ।	(৪) কি প্রমাণ করতে হবে ?
(৫) CE সরলরেখা BA-র সমান্তরাল করে আঁকা যায়।	(৫) C বিন্দুতে AB-র সমান্তরাল করে কোণ সরল রেখা আঁকা যায় ?
(৬) d এবং e কোণ।	(৬) C বিন্দুতে কি কি নতুন কোণ উৎপন্ন হয় ?
(৭) $\angle b=\angle d$ কারণ $\angle b$ ও $\angle d$ একান্তর। একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান।	(৭) CE ও BA সমান্তরাল এবং AC ছেদক হলে কোন্ কোণগুলি সমান হবে? কেন ?
(৮) $\angle c=\angle e$ কারণ $\angle c$ ও $\angle e$ অনুরূপ কোণ। অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান।	(৮) আবার CE ও BA সমান্তরাল এবং BCD ছেদক হলে কোন্ কোণগুলি সমান হবে? কেন ?
(৯) $\angle d+\angle e=\angle b+\angle c$	(৯) $\angle d+\angle e=$ কত ?
(১০) $\angle d+\angle e+\angle a$ $=\angle b+\angle c+\angle a$ $=2$ সমকোণ	(১০) উভয়দিকে $\angle a$ কোণ যোগ করলে কি হয় ?
(১১) $\angle a+\angle b+\angle c$ $=2$ সমকোণ $=180^\circ$ $\therefore$ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।	(১১) অতএব $\angle a+\angle b+\angle c=$ কত ?
মডেল ত্রিভুজটির তিনটি কোণ কাটিয়া বোর্ডে একটি বিন্দুতে স্থাপন করবেন এবং তিনটির সমষ্টিতে একটি সরলরেখা পাওয়া যাবে। এক সরল কোণের পরিমাণ দুই সমকোণ।	অতঃপর শিক্ষক মহাশয় ত্রিভুজের মডেলটি নিয়ে বিশ্লেষণ করবেন।

অভিযোজন—শিক্ষার্থীদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় অতঃপর প্রশ্ন করবেন।

(১) $\angle e=\angle c$ কেন ?

(২) $\angle b+\angle c=\angle d+\angle e$ কেন ?

(৩) ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দু'টির সমষ্টির সমান, প্রমাণ কর।

(৪) ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী ?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত প্রশ্ন শিক্ষার্থীদের বাড়ী থেকে তৈরী করে আনতে বলবেন।

(১) একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে তাদের প্রত্যেক কোণের পরিমাপ কর।
(২) একটি সমকোণী ত্রিভুজের কোণসমষ্টি দুই সমকোণ। প্রমাণ কর এবং দেখাও যে অঙ্কিত স্থূলকোণী ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি পরস্পর সমান।

৫ নং পাঠটীকা—নবম শ্রেণীর জন্য

বিষয়—জ্যামিতি

সাধারণ পাঠ—পিথাগোরাস উপপাদ্যের বিস্তৃতি। একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র, ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ে এবং উহাদের এক বাহু ও উহার উপর অন্য বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ, এই দুইয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টি সমান।

উদ্দেশ্য—ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে অপর বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের কি সম্বন্ধ আছে তা শেখানো।

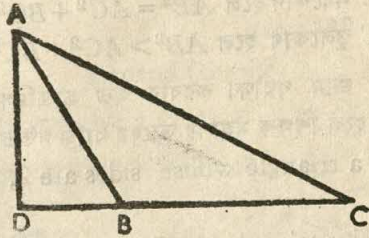
ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচারশক্তির উন্মেষ সাধন করা ও গণিত শাস্ত্র পাঠে তাদের আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের পাঠাভিমুখী করার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(১) AB^2 বলতে কি বুঝায়?
(২) $AB.BC$ দ্বারা কি সূচিত হয়?
(৩) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সঙ্গে উহার অপর বাহুগুলির মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে বলে মনে কর।
(৪) ঐ সম্বন্ধটি কে আবিষ্কার করেন?
(৫) লম্ব অভিক্ষেপ বলতে কি বুঝ।

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC =$ স্থূলকোণ, A বিন্দু থেকে CB-এর বর্ধিত অংশের উপর AD লম্ব টানা হয়েছে। AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সহিত অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং BC বাহু ও ঐ বাহুর উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ BD-র

অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে তা আজ আমরা নির্ণয় করব।

উপস্থাপন—অদ্যকার পাঠ্য বিষয়ের সম্বন্ধটি নির্ণয় করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহযোগিতায় অগ্রসর হবেন।

প্রশ্ন	উত্তর
(১) চিত্রে স্থুলকোণ কোন্‌টি ?	(১) $\angle ABC$ = স্থুলকোণ
(২) ADC সমকোণী ত্রিভুজের AC^2 = কত ?	(২) $AC^2 = AD^2 + CD^2$
(৩) CD^2 = কত ?	(৩) $CD^2 = (BD+BC)^2$ $= BC^2 + BD^2 + 2BC.BD$
(৪) $AD^2 + CD^2$ = কত হবে ?	(৪) $AD^2 + CD^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BD.BC = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$
(৫) এখন AC^2 = কত ?	(৫) $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD.BC$
(৬) BC বাহুর উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ কি ?	(৬) BD
(৭) $2BD.BC$ বলতে কি বুঝায় ?	(৭) BD এবং BC বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ
(৮) $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD.BC$ এই সম্বন্ধটি থেকে তোমার কি সিদ্ধান্ত হল ?	(৮) স্থুলকোণী ত্রিভুজে স্থুলকোণের সন্মুখীন বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং উহাদের যে কোন একটি বাহু ও তদুপরি অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেত্রের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হবে।

উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি ছাত্রদিগকে তাদের নিজ খাতায় লিখে রাখতে বলা হবে।

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত সম্বন্ধটির উপর ছাত্রদের দৃষ্টি আকর্ষণ করবেন।

কোন ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ হলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$
$\angle C$ স্থূলকোণ হলে $AB^2 > AC^2 + BC^2$

অভিযোজন—নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করবার জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজন হলে শিক্ষক মহাশয় তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করবেন।

1. Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an———

2. In an isosceles triangle ABC, $AC = BC = 4''$
$\angle ACB = 120^\circ$. Find the length of AB.

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত প্রশ্নটির সমাধান বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে।

1. Prove that in an isosceles triangle of which the vertical angle is 120°, the square of the base is three times on either side.

৬নং পাঠটীকা—নবম শ্রেণীর জন্য

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—ঘাত নির্ণয়
অদ্যকার—বিস্তৃতি নির্ণয়

উদ্দেশ্য—(১) ছাত্রদিগকে রাশির ঘাত নির্ণয়ে সাহায্য করা। (২) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি বৃদ্ধি করা। (৩) গণিতশাস্ত্র পাঠে তাদের উৎসাহিত করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের অদ্যকার পাঠাভিমুখী করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন।

(১) $(a) =$ কত ?
(২) $(a)^3$ বলিতে কি বুঝ ?
(৩) $(+x)^2 =$ কত ?
(৪) $(-x)^2 =$ কত ?
(৫) $(-a)^4 =$ কত ?
(৬) $(-x)^5 =$ কত ?
(৭) $(a+b)^2 =$ কত ?
(৮) $(a-b)^2 =$ কত ?

পাঠ ঘোষণা—অদ্য আমরা ঘাত নির্ণয়ের নিয়মগুলি আলোচনা করব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় নিম্নানুরূপ অঙ্কগুলি করে দেখাবেন।

Raised to the required power $(-2a^3b^2)^5$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) $(-2)^5 =$ কত ?	(১) -32
(২) $(a^3)^5 =$ কত ?	(২) a^{15}
(৩) $(b^2)^5 =$ কত ?	(৩) b^{10}

Expand $(x-y)^7$

(১) বিস্তৃতির মোট সংখ্যা কত ?	(১) 8
(২) বিস্তৃতির প্রথম পদ = কত ?	(২) x^7
(৩) দ্বিতীয় পদ = কত ?	(৩) $\frac{-7\times1}{1}x^6y = -7x^6y$
(৪) তৃতীয় পদ = কত ?	(৪) $\frac{7\times6}{2}x^5y^2 = 21x^5y^2$
(৫) চতুর্থ পদ = কত ?	(৫) $\frac{-21\times5}{3}x^4y^3 = -35x^4y^3$
(৬) পঞ্চম পদ = কত ?	(৬) $\frac{35\times4}{4}x^3y^4 = 35x^3y^4$
(৭) ষষ্ঠ পদ = কত ?	(৭) $\frac{-35\times3}{5}x^2y^5 = -21x^2y^5$
(৮) সপ্তম পদ = কত ?	(৮) $\frac{21\times2}{6}xy^6 = 7xy^6$
(৯) শেষ পদ = কত ?	(৯) $\frac{-7\times1}{7}y^7 = -y^7$

এবার অঙ্কটি শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে করবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ ছাত্রেরা কতটা অনুধাবন করেছে তা জানবার জন্য নিম্নানুরূপ অঙ্কগুলি করতে দেওয়া হবে এবং প্রয়োজন হলে তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করা হবে।

Expand the following

(a) $(a+b)^6$, (b) $(1-x)^6$, (c) $(x^2+1)^5$

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদের নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে।

Expand the following

1. $(2a+b)^5$ 2. $(a^2-b^2)^4$

৭নং পাঠটীকা—নবম শ্রেণী

বিষয়—ত্রিকোণমিতি

সাধারণ পাঠ—সূক্ষ্ম কোণের ত্রিকোণানুপাত
অদ্যকার পাঠ—ত্রিকোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা

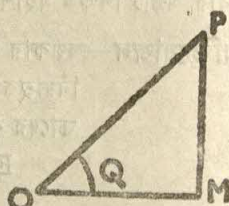
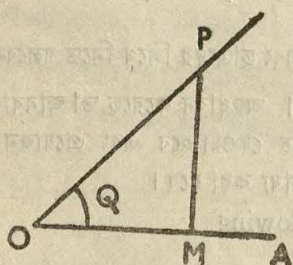
উদ্দেশ্য—(১) ছাত্রদিগকে ত্রিকোণানুপাতগুলির সহিত পরিচয় করিয়ে দেওয়া, যাতে তারা ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী এবং ত্রিভুজের সমাধান করার সময় ঐ অনুপাতগুলির ব্যবহার করতে পারে। (২) ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচারশক্তির উন্মেষ সাধনে সহায়তা করা। (৩) গণিত শাস্ত্র-পাঠে আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদিগকে পাঠ্যাভিমুখী করার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করবেন এবং প্রয়োজন হলে তাদের সাহায্য করবেন।

(১) অনুপাত ও সমানুপাত বলতে কি বুঝায়? (২) একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে উহার লম্ব, ভূমি এবং অতিভুজ চিহ্নিত কর। (৩) সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রত্রয়ের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে?

পাঠ ঘোষণা – আজ আমরা ত্রিকোণানুপাতগুলির সংজ্ঞা এবং ঐ অনুপাতগুলির মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে তা নির্ণয় করব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে AOB একটি কোণ অঙ্কন করে OB-র উপর যে কোন বিন্দু P থেকে OA-র উপর PM লম্ব অঙ্কন করবেন এবং বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির সংজ্ঞা নির্দেশ করবেন এবং ছাত্রদিগকে তা অভ্যাস করাবেন।

কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করবার জন্য শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে POM একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন :—

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) $\sin\theta =$ কত?	(১) $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(২) cosec θ = কত ?	(২) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$
(৩) sin θ. cosec θ = কত ?	( ) $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1 \cdots (a)$

অনুরূপভাবে শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় প্রমাণ করবেন যে,
$\cos\theta.\sec\theta = 1 \cdots\cdots (b)$ এবং $\cot\theta.\tan\theta = 1 \cdots\cdots (c)$

তারপর ছাত্রদিগকে $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ = কত জিজ্ঞাসা করা হলে তারা চিত্র থেকে sin θ এবং cos θ-এর মান বসিয়ে সিদ্ধান্ত করবে যে :—$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

অনুরূপভাবে তারা $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ এইটা প্রমাণ করবে।

এখন শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলি বোর্ডে লিখে দেবেন এবং ছাত্রদের নিজ নিজ খাতায় লিখে নিতে বলবেন।

(i) $\sin\theta.\operatorname{cosec}\theta = 1 \therefore \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta.\sec\theta = 1 \therefore \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\tan\theta.\cot\theta = 1 \therefore \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ শিক্ষার্থী কতটা অনুধাবন করেছে তা জানবার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্নের সাহায্য নেওয়া হবে।

(১) কোন কোণের কোট্যানজেন্ট অনুপাত বলতে কি বুঝ ? (২) cos θ এবং sec θ-র মধ্যে কি সম্পর্ক ? (৩) tan θ cos θ = কত ?
(৪) cot θ. sec θ. sin θ = কত ?

বাড়ীর কাজ—নবলব্ধ জ্ঞানের অভ্যাসের জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে।

(১) tan θ. cosec θ = কত ? (২) $\frac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}$ = কত ?

(৩) cosec θ. cos θ. tan θ = কত ?

৮নং পাঠটীকা—দশম শ্রেণী

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—প্রগতি
অদ্যকার পাঠ—সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়।

উদ্দেশ্য—(১) সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করতে সাহায্য করা। (২) ছাত্রদের মৌলিক চিন্তা ও বিচারশক্তির উন্মেষ সাধনে সহায়তা করা। (৩) গণিত শাস্ত্রপাঠে আগ্রহ বৃদ্ধি করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে এবং তাদের পাঠাভিমুখী করবার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজন হলে তাদের সাহায্য করা হবে।

(১) সমান্তর শ্রেণী বলতে কি বুঝায়? (২) সাধারণ অন্তর বলতে কি বুঝায়? (৩) xতম পদ বলতে কি বুঝায়?

পাঠ ঘোষণা—অদ্য আমরা সমান্তর শ্রেণীর যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করব।

উপস্থাপন—অদ্যকার পাঠ্যবিষয়ের সম্বন্ধটি নির্ণয় করার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হবেন :—

শিক্ষক মহাশয় সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b ধরবেন, উহার যোগফল S এবং শেষ পদ l ধরবেন।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) $S=$ কত?	(১) $S=a+(a+b)+(a+2b)\cdots(l-2b)+(l-b)+l\cdots(1)$
(২) S-কে উল্টে লিখলে কত হবে?	(২) $S=l+(l-b)+(l-2b)\cdots+(a+2b)+(a+b)+a\cdots(2)$
(৩) (1) ও (2) যোগ করে কি পাই?	(৩) $2S=(a+l)+(a+l)\cdots(a+l)$ $=(a+l)+(a+l)+\cdots x$ সংখ্যক পর্যন্ত $=x(a+l)$ $\therefore\ S=\frac{x}{2}(a+l)$

অভিযোজন—অদ্যকার পাঠ শিক্ষার্থীগণ কতটা অনুধাবন করেছে তা জানবার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং প্রয়োজন হলে ব্যক্তিগত ভাবে সাহায্য করা হবে।

1. Find the sum of the series $5+7+9+\cdots+65$.
2. Find, without assuming any formula, the sum of $1+3+5\cdots\cdots$ to 40 terms.
3. The first term of an A.P is 9 and the last term is 96. If the sum be 1575, find the common difference.
4. Find the numbers of terms of the series $17, 5, -7\cdots$ whose sum is -78.

বাড়ীর কাজ—নবলব্ধ জ্ঞান অভ্যাসের জন্য ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে।

1. The sum of 10 terms of an A.P. is 120 and the sum of 15 terms is 255 ; find the sum of n terms.
2. The sum of n terms of an A. P. is 40, the common difference is 2, and the last term is 13. Find n.

৯নং পাঠটীকা—দশম শ্রেণী

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—অপনয়ন

বিশেষ পাঠ (১) অপনয়নের সাধারণ নিয়ম।

উদ্দেশ্য—(১) ছাত্রদিগকে অপনয়ন সম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলীর উত্তর করতে সাহায্য করা। (২) ছাত্রদের চিন্তাশক্তি বৃদ্ধি করা। (৩) গণিত শাস্ত্রে তাদের উৎসাহিত করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ উপকরণসমূহ।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষার্থে ও তাদের অদ্যকার পাঠাভিমুখী করার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে এবং তাদের নিকট থেকে মৌখিক উত্তর গ্রহণ করা হবে।

(১) সমীকরণ বলতে কি বুঝায় ? (২) অপনয়ন অর্থে কি বুঝায় ?

পাঠঘোষণা—অদ্য আমরা অপনয়নের সাধারণ নিয়মগুলি আলোচনা করব।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সহযোগিতায় নিম্নরূপ অঙ্কগুলি করে দেখাবেন।

(a) Eliminate x from the equations :—

$a_1x+b_1=o\cdots$(i) $\qquad a_2x+b_2=o\cdots$(ii)

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) (i) সমীকরণ থেকে $x=$ কত পাই ?	(১) $x=-\frac{b_1}{a_1}$
(২) (ii) সমীকরণ থেকে $x=$ কত পাই ?	(২) $x=-\frac{b_2}{a_2}$
(৩) (iii) x-এর উভয় মান থেকে আমরা কি পাই ?	(৩) $-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$ $\therefore\ a_1b_2-a_2b_1=0$

এইবার অঙ্কটি শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে করবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

(b) Eliminate x and y from the equations :—

$a_1x+b_1y=o\cdots(i)=a_2x+b_2y=o\cdots$(ii)

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে y দ্বারা ভাগ করলে কি পাব ?	(১) $a_1\frac{x}{y}+b_1=0\cdots(iii)$ $a_2\frac{x}{y}+b_2=0\cdots(iv)$
(২) (iii) সমীকরণ থেকে $\frac{x}{y}=$ কত পাই ?	(২) $\frac{x}{y}=-\frac{b_1}{a_1}$
(৩) $\frac{x}{y}$-এর মান (iv) সমীকরণে বসিয়ে কি পাই ?	(৩) $a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)+b_2=0$ $a_1b_2-a_2b_1=0$

এইবার শিক্ষক মহাশয় অঙ্কটি বোর্ডে করবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

(c) Eliminate m and n from the equations :—

$mx\times ny=a,\ nx-my=b,\ m^2+n^2=1$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
(১) প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণকে বর্গ করে কি পাই ?	(১) $mx^2+n^2y^2+2mnxy=a^2\cdots(1)$ $m^2y^2+n^2x^2-2mnxy=b^2\cdots(2)$
(২) (1) ও (2) যোগ করে কি পাই ?	(২) $(m^2+n^2)x^2+(m^2+n^2)y^2=a^2+b^2$

$$\therefore\ x^2+y^2=a^2+b^2.$$

এইবার শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে অঙ্কটি করবেন এবং ছাত্রদের লিখে নিতে বলবেন।

অভিযোজন—অঙ্কের পাঠ ছাত্ররা কতটা অনুধাবন করেছে তা জানবার জন্য নিম্নরূপ অঙ্কগুলি করতে দেওয়া হবে এবং প্রয়োজন হলে তাদের ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করা হবে।

Eliminate x from the following equations :—

1. $x+b=0,\ 3x+2a=a$ 2. $x+\frac{1}{x}=a+b,\quad x-\frac{1}{x}=a-b$
3. $x^2+x+a=o,\quad bx+c=o$

Eliminate x and y from the following equations :—

4. $2x+ay=0,\ bx+3y=0$
5. $x+y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ x^4+y^4=c^4$

বাড়ীর কাজ—ছাত্রদিগকে নিম্নলিখিত অঙ্কগুলি বাড়ী থেকে করে আনতে বলা হবে :—

Eliminate x and y from the following equations :—

(a) $x-y=a,\ x^2+y^2=b^2,\ xy=c$

১০ নং পাঠটীকা—দশম শ্রেণী

বিষয়—বীজগণিত

সাধারণ পাঠ—লগারিদম্

অন্তকার পাঠ—লগারিদম্ এর উপর প্রাথমিক পাঠ।

উদ্দেশ্য—(1) লগারিদ্ম ও ইহার ব্যবহারিক জ্ঞানানুশীলনে ছাত্রদের সহায়তা করা।

(2) লগারিদ্ম ও ইহার ব্যবহারিক জ্ঞানার্জনে ছাত্রদের বিচারশক্তি ও চিন্তাশক্তির উন্মেষসাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সাজসরঞ্জাম।

আয়োজন—ছাত্রদের মন পাঠাভিমুখী করার জন্য তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নের মাধ্যমে সম্ভাব্য উত্তর পাবার চেষ্টা করবেন।

(1) বর্গ বা স্কোয়ার (square) বলতে কি বুঝায়? (?) স্কোয়ারের ঘাত কত? (3) 2-এর কিউব কত? (4) 2 ও 3-এর বিশেষ নাম কি কি? (5) 8-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে কি কি মৌলিক সংখ্যা পাওয়া যায়? (6) $2^3=8$, এই অভেদে 8-এর সহিত 2-এর কি সম্বন্ধ? (7) 8-এর সহিত 3-এর কি সম্বন্ধ?

পাঠঘোষণা—আজ আমরা লগারিদ্ম-এর প্রাথমিক পাঠ সম্বন্ধে আলোচনা করব।

উপস্থাপন—'ক শীর্ষ'

বিষয়	পদ্ধতি
$2^3=8$	
(1) এখানে 3 ও 8-এর সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হলে লগারিদ্ম-এর সাহায্য নিতে হবে।	(1) 3 ও 8-এর সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হলে কি করতে হবে?
(2) এখানে 2-কে বলা হয় নিধান (Base)।	(2) 2-কে কি বলা হয়?
(3) 3-কে বলা হয় ঘাতের সূচক (Power of Index)।	(3) 3-কে কি বলা হয়?
(4) কোন নিধানকে (Base) কোন ঘাতে উন্নীত করতে হলে যে রাশির সহিত সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানের জন্য লগারিদ্ম বলে।	(4) লগারিদ্ম কাকে বলে?
(5) $3=\log 2^8$	(5) এ কি ভাবে লেখা হয়?
'খ' শীর্ষ $3^2=9$,	(1) নিধান কত?
	(2) এর ঘাতের সূচক কত?
(1) 3, (2) 2, (3) 9-এর	(3) 2 কার লগারিদ্ম?

$a^n=m$

'গ' শীর্ষ

(1) a	(1) নিধান কত ?
(2) n	(2) এর ঘাতের সূচক কত ?
(3) m-এর	(3) n কার লগারিদ্‌ম ?
(1) x অথবা y ধরা হয়	(1) বীজগণিতে যখন কোন লুপ্ত সংখ্যা বা অজানা রাশি থাকে তখন সাধারণতঃ কি করা হয় ?
(2) $x=\log a^m$ $y=\log a^n$ ধরতে হবে।	(2) $\log a^{mn}=\log a^m+\log a^n$ প্রমাণ করতে হলে কি করতে হবে ?
(3) $a^x=m,\ a^y=n$	(3) m ও n-এর মান কি হবে ?
(4) ঘাতের যোগ হয়	(4) সমান নিধানবিশিষ্ট রাশি গুণ করার সময় ঘাতের কি পরিবর্তন হয় ?
(5) a^{x+y}	(5) $a^x\times a^y$-এর গুণফল কত ?
(6) $a^{x+y}=mn$	(6) নূতন অভেদ কি দাঁড়াল ?
(7) $\log a^{mn}=x+y$	(7) উভয় পক্ষে লগ বসালে কি পাওয়া যায় ?
(8) $\log a^{mn}=\log a^m+\log a^n$	(8) x ও y-এর মান বসালে কি পাওয়া যায় ?
(1) $x=\log a^m$ $y=\log a^n$	(1) $\log a\left(\frac{m}{n}\right)=\log a^m-\log a^n$ কি ভাবে প্রমাণ করবে ?
(2) $a^x=m$ $a^y=n$	(2) m ও n-এর মান কি হবে ?
(3) বিয়োগ হবে।	(3) সমান ঘাতবিশিষ্ট রাশির ভাগ করবার সময় ঘাতের কি পরিবর্তন হবে ?
(4) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$	(4) a^x ও a^y-এর ভাগফল কত ?
(5) $a^{x-y}=\frac{m}{n}$	(5) অভেদটি কি দাঁড়াল ?
(6) $\log a\frac{m}{n}=x-y$	(6) উভয় পক্ষে লগ্‌ বসালে কি পাওয়া যায় ?
(7) $\log a\frac{m}{n}=\log a_m-\log a$	(7) x ও y-এর মান বসালে কি পাওয়া যায় ?

ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নরূপ প্রশ্ন করবেন :—

অভিযোজন—(1) $a^0=1$ হলে, 0 কার লগ্ হবে ? (2) $5^2=25$ হলে, 2 কার লগ্ হবে ? (3) $9^2=81$ হলে, 81-এর লগ্ কত হবে ? (4) $\log_2 81=$ কত ?

বাড়ীর কাজ—(1) log 324-এর মান বাহির কর, যখন নিধান $=3\sqrt{2}$

(2) দেখাও যে $7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$

(3) যদি $\log\frac{x}{y-z}=\frac{\log y}{z-x}=\frac{\log z}{x-y}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $xyz=1$

১১নং পাঠটীকা—একাদশ শ্রেণী

বিষয়—ত্রিকোণমিতি

সাধারণ পাঠ—ত্রিভুজের গুণাবলী

বিশেষ পাঠ—কোন ত্রিভুজের বাহু ও বিপরীত কোণের সাইনের সম্বন্ধ বা অনুপাত নির্ণয়।

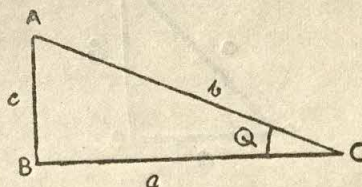
উদ্দেশ্য—ত্রিভুজের বাহুগুলির ও বিপরীত কোণগুলির সাইনের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ে সহায়তা করা এবং ছাত্রদের চিন্তাশক্তি, কল্পনাশক্তি ও বিচার-ক্ষমতার বিকাশ সাধন করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জামাদি।

আয়োজন—অদ্যকার পাঠে ছাত্রদিগকে আকৃষ্ট ক'রার জন্য শিক্ষক মহাশয় তাদের পূর্বজ্ঞানের ভিত্তিতে শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নের অবতারণা করবেন :—

১। ত্রিভুজের বাহু কয়টি ? ২। ত্রিভুজের কোণ কয়টি ? ৩। ত্রিভুজের বাহুগুলিকে কিভাবে প্রকাশ করা হয় ? ৪। ত্রিভুজের কোণগুলিকে সংক্ষেপে কিভাবে প্রকাশ করা হয় ? ৫। ত্রিভুজের বাহুগুলির সঙ্গে কোণগুলির সম্পর্ক আছে কি ?

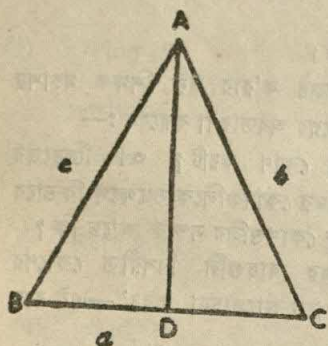
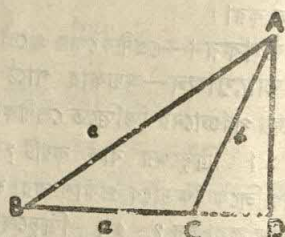
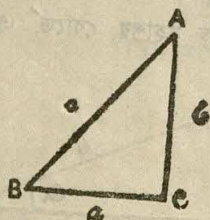
পাঠঘোষণা—"অদ্য আমরা কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণের সাইনগুলির সমানুপাতী—এই সমস্যার সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করব"—এই বলে শিক্ষক মহাশয় পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—প্রথমে শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন

করবেন এবং ছাত্রদের সহায়তায় কয়েকটি সাধারণ প্রশ্নের উত্তর তৈরী করবেন।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. ABC ত্রিভুজের কোন্ কোণটি এক সমকোণ ?	1. $\angle ABC = 1$ সমকোণ
2. ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ কোন্‌টি ?	2. AC বাহু অতিভুজ।
3. লম্ব কোনটি ?	3. AB বাহু লম্ব।
4. ভূমি কোন্‌টি ?	4. BC বাহু ভূমি।
5. θ কোণের সাইনকে ত্রিভুজের কি কি বাহুর অনুপাতে প্রকাশ করা যায় ?	5. $\sin\ \theta = \dfrac{AB}{AC}$
6. θ কোণের কোসাইনকে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?	6. $\cos\ \theta = \dfrac{BC}{AC}$
7, θ কোণের ট্যানজেণ্টকে কি ভাবে প্রকাশ করা যায় ?	7. $\tan\ \theta = \dfrac{AC}{BC}$

এর পর শিক্ষক মহাশয় বলবেন, "আমরা দেখতে পেলাম ত্রিভুজের কোণগুলির সহিত বাহুগুলির একটা সম্পর্ক আছে। এখন আমরা প্রমাণ করব যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণগুলির সাইনের সমানুপাতী অর্থাৎ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

অতঃপর শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে নিম্নানুরূপ তিনটি চিত্র অঙ্কন করবেন এবং

১নং চিত্র

২নং চিত্র

৩নং চিত্র

ছাত্রদের সহায়তায় উপরোক্ত সমস্যাটির সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করবেন।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
উপরের চিত্রে ত্রিভুজগুলির কোন্‌টি কি জাতীয় ত্রিভুজ?	১নং চিত্রে ABC সূক্ষ্মকোণী, ২নং চিত্রে স্থূলকোণী এবং ৩নং চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ।
A বিন্দু থেকে কাহার উপর লম্ব অঙ্কিত করা হয়েছে?	১নং চিত্রে BC-র উপর, ২নং চিত্রে BC-র বর্ধিতাংশের উপর এবং ৩নং চিত্রে AC বাহু নিজেই লম্ব।
প্রথম চিত্রে ABD ত্রিভুজে $\sin ABD$-কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\sin ABD=\frac{AD}{AB}$
এর থেকে AD-র মান কি ভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে?	$AD=AB \sin ABD$ বা $c \sin B$
ঐ চিত্রে ACD ত্রিভুজে $\sin ACD$ কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\sin ACD=\frac{AD}{AC}$
এর থেকে AD-র মান কিভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে?	$AD=AC \sin ACD$ বা $b \sin c.$
AD-র যে দু'টি বিভিন্ন মান পাওয়া গেল, সেই দু'টি কি কি এবং কেমন?	$AD=c \sin B$ এবং $AD=b \sin c$ এবং $c \sin B=b \sin C$
সমীকরণটিকে কোণ বা বাহুর অনুপাতে কি ভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
এইভাবে B হইতে AC-র উপর লম্ব টানিয়া কি প্রমাণ করা যায়?	$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$
তাহলে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির অনুপাত কি রকম পাওয়া গেল?	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
দ্বিতীয় চিত্রে ABD ত্রিভুজে $\sin ABD$-কে কিভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\sin ABD=\frac{AD}{AB}$ বা $AD=AB \sin ABD=c \sin B$
ACD ত্রিভুজে $\sin ACD$-কে কি ভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\sin ACD=\frac{AD}{AC}$ বা $AD=AC \sin ACD=b \sin (\pi-c)=b \sin c$
AD-র এই দু'টি মান হতে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়?	$c \sin B=b \sin c$ বা $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
এভাবে B হতে ACর উপর লম্ব টানিয়া কি প্রমাণ করা যায়?	$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$
তাহলে স্থূলকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির অনুপাত কি রকম পাওয়া গেল?	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{}{\sin C}$
তৃতীয় চিত্রে ABC ত্রিভুজে $\sin A$-কে কিভাবে প্রকাশ করা যায়?	$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}$ বা $\frac{a}{\sin A}=C$

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
$\sin B =$ কত ?	$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ বা $\frac{b}{\sin B} = C$
$\sin c =$ কত ?	$\sin C = \sin 90^\circ = 1$
তাহলে $\sin A$, $\sin B$ ও $\sin C$-র মানের মধ্যে কি সম্বন্ধ আছে ?	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}$ [$\therefore \sin C = 1$]
তাহলে সমকোণী ত্রিভুজে কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে কি রকম অনুপাত পাওয়া গেল ?	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
এর থেকে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সম্ভব ?	যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি বিপরীত কোণগুলির সাইনের সমানুপাতী।

অভিযোজন ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার নিমিত্ত শিক্ষক মহাশয় শ্রেণীকক্ষে নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা করবেন এবং প্রয়োজন বোধে ছাত্রদিগকে ব্যক্তিগতভাবে সাহায্য করবেন।

(১) যে কোন ত্রিভুজের কোণগুলির সহিত বাহুগুলির কি রকম সম্পর্ক আছে ? (২) কোন কোণের সাইন বলতে কি বোঝায় ? (৩) ত্রিভুজের কোণগুলির সহিত উহাদের বিপরীত বাহুগুলির কি রকম সম্পর্ক আছে ?

বাড়ীর কাজ—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদিগকে বাড়ী থেকে উপরোক্ত সমস্যাটির সমাধান লিখে আনতে বলবেন।

পাঠটীকা সংকেত : বিষয়-জ্যামিতি

বিশেষ পাঠ—একই সরলরেখায় অবস্থিতি নয়, এমন তিনটি বিন্দুর ভিতর দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

আয়োজন—ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি অঙ্কন করে কোন্‌টির কি নাম তা জিজ্ঞাসা করা চলবে। শেষ প্রশ্ন হবে—

তেপান্তরের মাঠে, তাল তেঁতুল বটে
সমান্ দূরে রেখে, গুপ্তধনে দেখে।

উপস্থাপন—এই স্তরে প্রথমে ছড়াটির উপর ভিত্তি করে গুপ্তধনের স্থান নির্ণয় করতে হবে। যেমন—গুপ্তধন থেকে তাল ও তেঁতুল গাছের দূরত্ব কেমন ?

যদি দু'টি গাছকে একটি সরলরেখা দ্বারা যোগ করা যায়, তবে ঐ রেখার উপর কোন্ বিন্দু দু'টি গাছ থেকে সমান দূরে অবস্থিত ?

লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর কোন্ বিন্দুর দূরত্ব কেমন ?

তেমনি তেঁতুল ও বটের দূরত্ব ও সমদূরবর্তী বিন্দু ?

দু'টি সরলরেখার (তাল—তেঁতুল, তেঁতুল—বট) লম্বদ্বিখণ্ডক দুটি যে বিন্দুতে ছেদ করেছে, সেই বিন্দু থেকে গাছ তিনটির দূরত্ব ? গুপ্তধন কোথায় আছে ?

এরপর জ্যামিতিক অঙ্কন ও প্রমাণ। [এ উপপাদ্যটি ব্যবহারিক প্রয়োগের সাহায্যেও বোঝানো সম্ভব]

বিষয়—বীজগণিত

বিশেষ পাঠ—সহজ সমীকরণ।

উপস্থাপন—এই স্তরে দাঁড়ি পাল্লা, চায়ের প্যাকেট, বাটখারা প্রভৃতির সাহায্যে ভারসাম্যের নীতিটি বোঝানো সম্ভব। দু'টি পাল্লাতে সমান সমান ওজন যোগ করলে বা পাল্লাগুলি থেকে সমান ওজনের বাটখারা বাদ দিলে ভারসাম্য বজায় থাকে—এই দৃষ্টান্ত থেকেই সমীকরণের নিয়ম বোঝানো সম্ভব।

বিষয়—পাটীগণিত

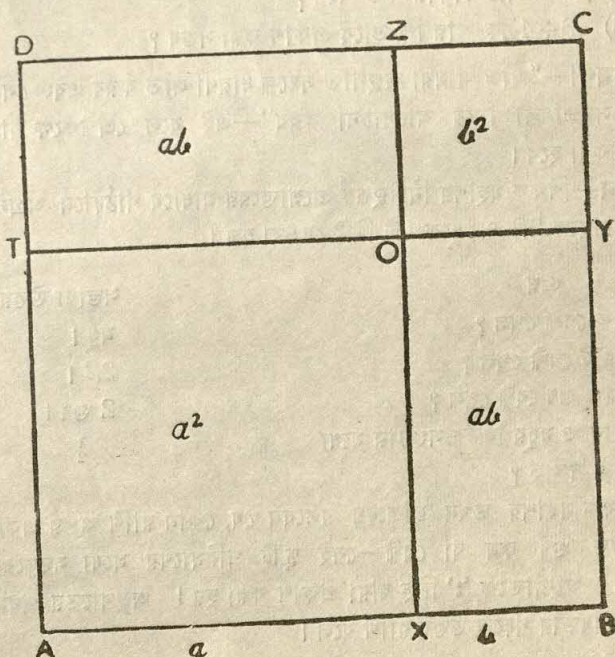
বিশেষ পাঠ—চার দেওয়ালের ক্ষেত্রফল।

উপস্থাপন—কার্ডবোর্ডের মডেল বা চকের বাক্সের সাহায্যে চারটি আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাবে। সেগুলির ক্ষেত্রফলের যোগফলই চার দেওয়ালের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

দৈর্ঘ্যের দিকের দেওয়াল	প্রস্থের দিকের দেওয়াল	দৈর্ঘ্যের দিকের দেওয়াল	প্রস্থের দিকের দেওয়াল

বিষয়—বীজগণিত

বিশেষ পাঠ—$(a+b)^2$

উপস্থাপন—কার্ডবোর্ডের মডেলের সাহায্যে ও ছবি এঁকে এভাবে বোঝানো সম্ভব।

১২ নং পাঠটীকা—নবম শ্রেণী

বিষয়—পাটীগণিত
বিশেষ পাঠ—অনুপাত

সাধারণ পাঠ-অনুপাত ও সমানুপাত
অদ্যকার পাঠ—ঐ

উদ্দেশ্য—ছাত্রদের অনুপাত সম্বন্ধে ধারণা অর্জনে সহায়তা করা ও তৎসম্বন্ধীয় সমস্যাবলীর জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করা। ছাত্রদের গণিত পাঠে আগ্রহী করা, তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তিকে উন্নত করতে সাহায্য করা এবং গণিতকে দৈনন্দিন জীবনে কাজে লাগানোর দক্ষতা অর্জনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সাজসরঞ্জাম।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করার নিমিত্ত ও তাদের অদ্যকার পাঠে আগ্রহী করার জন্য নিম্নরূপ প্রশ্ন করা হবে।

(1) যে কোন একটি ভগ্নাংশের উদাহরণ দাও।
(2) 3-কে লব ও 4-কে হর ধরলে ভগ্নাংশটি কত হবে?
(3) যদি $\frac{1}{3}=\frac{?}{6}=\frac{?}{9}$ হয়, তবে '?' চিহ্নিত স্থানগুলিতে কি বসবে?
(4) 10 টাকা 2 টাকার কত গুণ?
(5) 1 টাকা 5 টাকার কত অংশ?
(6) 3÷4 কে-আর কি ভাবে প্রকাশ করা সম্ভব?

পাঠ ঘোষণা—"আজ আমরা অনুপাত সম্বন্ধে ধারণা লাভ করব এবং সেই সম্বন্ধীয় সমস্যাবলী নিয়ে আলোচনা করব"—এই বলে শ্রেণীকক্ষে পাঠ ঘোষণা করা হবে।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে পাঠদানে অগ্রসর হবেন।

সমস্যা—রামকে 2টি ও মধুকে 4টি মিষ্টি দেওয়া হল।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. কে বেশী পেল?	মধু।
2. ক'টি বেশী পেল?	2টি।
3. কত গুণ বেশী পেল?	2 গুণ।
4. রাম ও মধুর মিষ্টির সংখ্যার মধ্যে কি সম্পর্ক?	$\frac{1}{2}$

● শিক্ষক মহাশয় তখন ছাত্রদের বলবেন যে, কোন রাশি অপর একটি রাশির তুলনায় কত গুণ কম বা বেশী—সেই দু'টি পরিমাণের মধ্যে সম্বন্ধকে বলা হয় **অনুপাত**। অনুপাতকে ':' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনুপাতের প্রথম পদকে পূর্ব রাশি ও দ্বিতীয় পদকে উত্তর রাশি বলে।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. 3 টাকা ও 5 টাকার অনুপাত কি ভাবে প্রকাশ করবে ?	$\frac{3 \text{ টাকা}}{5 \text{ টাকা}} = \frac{3}{5} = 3 : 5$
2. 5 গজ ও 7 গজের অনুপাত কত ?	5 : 7
3. 5 : 7-কে আর কি ভাবে লেখা যায় ?	$\frac{5}{7}$
4. $\frac{5}{7}$—এটি কি জাতীয় ?	ভগ্নাংশ।
5. $\frac{5}{7}$ এর একক কি ?	এর কোন একক নেই।
6. 5 : 7-এর একক কি ?	এরও কোন একক নেই।
7. 3 টাকা ও 5 টাকার অনুপাত কত হয়েছিল ?	3 : 5
8. 5 গজ ও 10 টাকার মধ্যে কি সম্পর্ক ?	কোন সম্পর্ক নেই।
9. এদের অনুপাতে প্রকাশ করা যাবে কি ?	না।
10. অনুপাতে প্রকাশ করতে হলে রাশি দু'টিকে কি রকম হতে হবে ?	সমজাতীয় বা একই এককে প্রকাশিত হতে হবে।
11. $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{10}$ ও $\frac{8}{20}$—এগুলির মধ্যে কে বড় ?	সকলে সমান।
12. অনুপাতকে গুণ বা ভাগ করলে এর মানের কিরূপ পরিবর্তন হয় ?	একই থাকে।

● শিক্ষক মহাশয় তখন ছাত্রদের বলবেন যে, অনুপাতগুলির প্রত্যেকেই একটি ভগ্নাংশ, বস্তুর প্রথম পরিমাণকে দ্বিতীয় পরিমাণ দিয়ে ভাগ করে অনুপাত নির্ণয় করা হয় ; সেইজন্য অনুপাত বস্তুর কোন পরিমাণ নয়—একটি সংখ্যা, পূর্ণ বা ভগ্নাংশ। অনুপাতের কোন একক নেই—এটি একটি শুদ্ধ সংখ্যা। অনুপাতে প্রকাশ করতে হলে রাশি বা বস্তুগুলিকে একই এককে থাকতে হবে বা তাদের একই এককে নিয়ে যেতে হবে। অনুপাতের উভয় রাশিকে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে মানের কোন পরিবর্তন হয় না। অনুপাতের প্রথম পদকে পূর্ব রাশি ও দ্বিতীয় পদকে উত্তর রাশি বলে।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. 3 : 4 এবং 4 : 3—এই অনুপাত দু'টিতে পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি কি কি ?	প্রথম অনুপাতে পূঃ রাঃ 3 এবং উঃ রাঃ 4 ; দ্বিতীয় অনুপাতে পূঃ রাঃ 4 এবং উঃ রাঃ 3
2. প্রথম অনুপাতের রাশিগুলি দ্বিতীয় অনুপাতে কি ভাবে আছে ?	পরস্পর বিপরীত ভাবে।

● শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বলবেন—যখন প্রথম অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশি দ্বিতীয় কোন অনুপাতে গিয়ে যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব রাশিতে পরিবর্তিত হয়ে যায়, তখন দ্বিতীয় অনুপাতকে প্রথমটির ব্যস্তানুপাত বলে।

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. 5 : 7-এর ব্যস্তানুপাত কি ?	7 : 5
2. 8 টাকা ও 16 টাকার যে সম্পর্ক, 10 টাকার সঙ্গে কত টাকার সেই সম্পর্ক ?	20 টাকার।
3. 8 টাকা ও 16 টাকার অনুপাত কত ?	8 : 16 বা 1 : 2
4. 10 টাকার : ?=1 : 2 ?	20 টাকা।
5. তাহলে 10 টাকা : 20 টাকা=?	1 : 2
6. 8 : 16 এবং 10 : 20—এ দু'টির মধ্যে কোন্‌টি বড় ?	দু'টিই সমান।

● যখন দু'টি অনুপাতের মান একই হয়, তখন সেগুলিকে সমানুপাতী বলে।

সমস্যা—ক ও খ-এর বয়সের অনুপাত 10 : 11 এবং ক-এর বয়স 40 বৎসর। খ এর বয়স কত ?

বিষয়	পদ্ধতি
10 : 11	ক ও খ-এর বয়সের অনুপাত কত ?
40 বৎসর	ক-এর বয়স কত ?
$\frac{10}{11}=\frac{40}{x}$ Or, $10x=11\times40$ $\therefore\ x=\frac{11\times40}{10}=44$	10 ও 11-এর মধ্যে যে সম্পর্ক, 40-এর সঙ্গে সেই সম্পর্ক কার—কি ভাবে করবে ?
44 বৎসর	তাহলে খ-এর বয়স কত ?

শিক্ষক মহাশয় এই জাতীয় কতকগুলি সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে অনুপাত ও সমানুপাতের সাধারণ নিয়মগুলি ব্যাখ্যা করবেন।

অভিযোজন--ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে।

১। অনুপাত কাকে বলে ? ২। সমানুপাত ও ব্যস্তানুপাতে কি পার্থক্য ? ৩। মধ্য সমানুপাতী কাকে বলবে ? ৪। 5 জন লোক যে কাজ 15 দিনে করবে, 10 দিনে করতে হলে সেই কাজ কত জন লোকে করবে ? ৫। 5 দিনে তুমি 250 পৃষ্ঠা পড়তে পার ; 750 পৃষ্ঠা পড়াতে কত দিন সময় লাগবে ?

গৃহকাজ—ছাত্রদের নিম্নানুরূপ গৃহকাজ দেওয়া হবে :—

১। 7·50 টাকা ও 10·50 টাকার অনুপাত কত ? ২। 5 গজ ও 11 ফুটের অনুপাত কত ? ৩। ক-এর টাকা : খ-এর টাকা :: 4 : 5 ; ক-এর 400 টাকা থাকলে খ-এর কত আছে ? ৪। পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত 7 : 3, পিতার বয়স 49 বৎসর হইলে পুত্রের বয়স কত ? ৫। রাম ও হরির বয়সের অনুপাত 5 : 6 হরির বয়স 36 বৎসর হলে, রামের বয়স কত ?

১৩নং পাঠটীকা—অষ্টম শ্রেণীর জন্য

বিষয় : বীজগণিত। সাধারণ পাঠ : উৎপাদক বিশ্লেষণ।

বিশেষ পাঠ : x^2+px+q জাতীয় রাশিমালায় px-কে দু'টি পদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

পাঠক্রম :

*(1) p ও q উভয়েই $^{+ve}$ (2) p^{-ve} এবং q^{+ve} (3) p^{+ve} এবং q^{-ve} (4) p ও q উভয়েই$^{-ve}$

* অদ্যকার পাঠ।

উদ্দেশ্য— x^2+px+q আকারবিশিষ্ট রাশিমালায় মধ্যপদটিকে দু'টি পদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করে তার উৎপাদক বিশ্লেষণে ছাত্রদের সহায়তা করা এবং তাদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ—শ্রেণীকক্ষের প্রয়োজনীয় সরঞ্জাম।

আয়োজন—ছাত্রদের পূর্বজ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য ও তাদের অদ্যকার পাঠে আগ্রহী করার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হবে :—

(1) $9a$—এর উৎপাদক কি কি ?

(2) $(a+3)(a+4)$—এর উৎপাদকগুলি কি কি ?

(3) $(x+a)(x+b)$—এর গুণফল কত হবে ?

(4) এই গুণফলকে x^2+px+q আকারে সাজাও।

(5) $x^2+(7+6)x+7.6$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

পাঠঘোষণা—"আজ আমরা x^2+px+q আকারের রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণ করব"—এই বলে শিক্ষক মহাশয় পাঠ ঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের সক্রিয় সহযোগিতায় ব্ল্যাকবোর্ডে কয়েকটি দ্বিপদ রাশির গুণ করবেন।

(1) $(x+3)(x+4)=x^2+7x+12=x^2+(3+4)x+3.4$

(2) $(a+5)(a+6)=a^2+11a+30=a^2+(5+6)a+5.6$

(3) $(x+2)(x+y)=x^2+(2+y)x+2y=x^2+(2+y)x+2\,y$

(4) $(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn=x^2+(m+n)x+m.n$

এবার শিক্ষক মহাশয় বামপক্ষ ও ডানপক্ষের রাশিমালার মধ্যে যে সম্পর্ক আছে, সেগুলি প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের নিকট হতে আদায় করবেন :—

1. বামপক্ষের উৎপাদক দু'টির প্রথম পদের বর্গ এবং ডানপক্ষের প্রথম পদ সমান।

2. বামপক্ষের উৎপাদক দু'টির দ্বিতীয় পদগুলির যোগফল × প্রথম পদ = ডানপক্ষের দ্বিতীয় পদ।

3. বামপক্ষের উৎপাদক দু'টির দ্বিতীয় পদগুলির গুণফল = ডানপক্ষের তৃতীয় পদ।

শিক্ষক মহাশয় এখন ছাত্রদের বলবেন যে, যদি $x^2+10x+16$ বা x^2+6x+8 প্রভৃতিকে ডানপক্ষের লিখিত আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহলে উহাদের উৎপাদকগুলি পর্যবেক্ষণের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়। এই রাশি দু'টির উৎপাদক প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমেও নির্ণয় করা যায়। যেমন—

বিষয়	পদ্ধতি
(i) $x^2+10x+16$-এর উৎপাদক নির্ণয়।	রাশিমালা দু'টির তৃতীয় পদ 16-এর উৎপাদক কি কি?
4 এবং 4 অথবা 2 এবং 8	
10	রাশিমালাটির দ্বিতীয় পদের সহগ কত?
$2+8=10$	তৃতীয় পদ 16-এর দু' জোড়া উৎপাদকের মধ্যে কোন জোড়ার সমষ্টি 10?
$(x+2)$ ও $(x+8)$	$x^2+10x+16$-এর উৎপাদকগুলি কি কি?
(ii) x^2+6x+8-এর উৎপাদক নির্ণয়।	
1 ও 8, 2 ও 4	রাশিমালার তৃতীয় পদ 8-এর উৎপাদক কি কি?
$2+4=6$	
$x^2+6x+8=x^2+2x+4x+8$	কোন্ কোন্ জোড়ার সমষ্টি দ্বিতীয় পদের সহগ 6-এর সমান?
$=x(x+2)+4(x+2)$	
$=(x+2)(x+4)$.	$x+6x+8$-এর উৎপাদকদ্বয় কি হবে?

[আরো কতকগুলি সমস্যা নিয়ে শিক্ষক মহাশয় উৎপাদক বিশ্লেষণের সাধারণ নীতিটি ব্যাখ্যা করবেন]

অভিযোজন—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার নিমিত্ত নিম্নানুরূপ প্রশ্নাবলীর অবতারণা করবেন। প্রয়োজনবোধে তিনি ব্যক্তিগতভাবে ছাত্রদের সহায়তা করবেন।

(1) $x^2+8x+15$ (2) $x^2+9x+20$

(3) $x^2+12x+36$ এবং (4) $x^2+13x+36$—এগুলির উৎপাদক নির্ণয় কর।

গৃহকাজ—নিম্নানুরূপ সমস্যাগুলি ছাত্রদের বাড়ী থেকে সমাধান করে আনতে বলা হবে:—

(1) a^2+5a+4. (2) $m^2+9m+14$.

(3) $x^2+(7+y)x+7y$. (4) $21+10a+a^2$.

১৪ নং পাঠটীকা—নবম শ্রেণীর জন্য

বিষয় : পরিমিতি সাধারণ পাঠ : বৃত্ত

অদ্যকার পাঠ : বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ও ক্ষেত্রফল ঘটিত সমস্যার সমাধান।

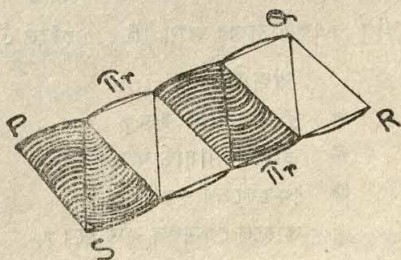
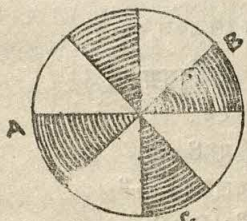
উদ্দেশ্য :—বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও তার সূত্র নির্ণয়ে ছাত্রদের সহায়তা করা, সূত্রাবলীর বাস্তব প্রয়োগ সম্বন্ধে ছাত্রদের অবহিত করা এবং ছাত্রদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তির বিকাশ সাধনে সহায়তা করা।

উপকরণ :—একটি বৃত্তের মডেল, (বিভিন্ন বৃত্তকলাতে বৃত্তটি ভাগ করা থাকবে এবং বিপরীত বৃত্তকলাগুলি একই রঙের হবে।), রঙীন চক্ প্রভৃতি।

আয়োজন :—ছাত্রদের মন পাঠাভিমুখী করার জন্য ও তাহাদের আগ্রহ ও কৌতূহল জাগ্রত করার জন্য নিম্নানুরূপ প্রশ্ন করা হইবে :

- গাড়ীর চাকার আকৃতি কি রকম ?
- আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রে পার্থক্য কি ?
- আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কিভাবে নির্ণয় করা হয় ?
- পরিধি বৃত্তের কোন অংশ ? কিভাবে নির্ণয় করা হয় ?
- ব্যাস আর ব্যাসার্দ্ধে পার্থক্য কি ?
- বৃত্তকে কয়েক অংশে ভাগ করলে সেগুলিকে কি বলে ? (মডেল দেখিয়ে)
- π এর মান কত ?
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল বলতে কি বোঝায় ? কিভাবে নির্ণয় করবে ?

পাঠ-ঘোষণা :—"আজ আমরা বৃত্তের ক্ষেত্রফল কিভাবে নির্ণয় করা হয় সে সম্বন্ধে শিক্ষা লাভ করব এবং সূত্রের সাহায্যে বৃত্ত সম্বন্ধীয় সমস্যার সমাধান করতে চেষ্টা করব"—এই বলে শিক্ষক মহাশয় পাঠঘোষণা করবেন।

উপস্থাপন :—এইবার শিক্ষক মহাশয় বৃত্তের রঙীন মডেলটি ছাত্রদের দেখাবেন এবং প্রশ্নোত্তরের মাধ্যমে ছাত্রদের সহায়তায় পাঠদান কার্যে অগ্রসর হবেন :—

প্রশ্ন	সম্ভাব্য উত্তর
1. মডেলটি কি জাতীয় ক্ষেত্র ?	1. বৃত্ত
2. ABC বৃত্তটিকে যে সমস্ত ভাগে ভাগ করা হয়েছে সেগুলিকে কি বলে ? [শিক্ষক মহাশয় বৃত্তকলাগুলিকে কাঁচি দিয়ে কেটে চিত্র অনুযায়ী এমনভাবে বসাবেন যেন PQRS নবগঠিত ক্ষেত্রটি আয়তক্ষেত্রের মত দেখায়]	2. বৃত্তকলা
3. PQRS কি জাতীয় ক্ষেত্রের অনুরূপ ?	3. আয়তক্ষেত্রের
4. পূর্ণাঙ্গ আয়তক্ষেত্র কখন হতে পারত ?	4. যখন PQ ও RS সম্পূর্ণ সরল রেখা হত।
5. PQ ও RS কে কিভাবে সরলরেখা করা সম্ভব ?	5. বৃত্ত চাপগুলি যত ছোট করা হবে অর্থাৎ বৃত্তকলার সংখ্যা যত বাড়ানো হবে।
6. বৃত্তের ব্যাস r ধরলে পরিধি কত ?	6. $2\pi r$
7. PQRS আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ ABC বৃত্তের পরিধির কত অংশ ?	7. পরিধির অর্ধেক
8. সেক্ষেত্রে PQ বা RS এর দৈর্ঘ কত ?	8. $\frac{1}{2}\times 2\pi r$ বা πr.
9. ঐ আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ কার সমান ?	9. বৃত্তের ব্যাসার্ধ বা r এর সমান
10. তাহলে PQRS আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?	10. দৈ $\times$ প্র $=\pi r\times r=\pi r^2$.
11. PQRS ক্ষেত্রটি কোন ক্ষেত্রের নূতন রূপ ?	11. ABC বৃত্তের
12. তাহলে PQRS এর ক্ষেত্রফলের সমান কোন ক্ষেত্রফলটি হবে ?	12. বৃত্ত ABCর
13. ABC বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত হবে ?	13. πr^2

সামান্যীকরণ :—শিক্ষক মহাশয় বোর্ডে সূত্রটি পরিষ্কার করে লিখে দিবেন। এইবার ঐ সূত্রটির সাহায্য নিয়ে দু-একটি সমস্যার সমাধান করবেন :—

সমস্যা :— একটি বৃত্তের ব্যাস 16 cm হইলে ঐ বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

পদ্ধতি	বিষয়
● বৃত্তটির ব্যাস কত ?	16 cm.
● তাহলে ব্যাসার্দ্ধ কত ?	$\frac{16}{2}$ বা 8 cm.
● ক্ষেত্রফলের সূত্রটি কি ?	ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$.
● তাহলে ক্ষেত্রফল কত হবে ?	$\frac{22}{7}\times 8\times 8$ sq. cm. $=201{\cdot}14$ sq. cm. (আসন্ন)

অভিযোজন :—ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান পরীক্ষা করার জন্য শিক্ষক মহাশয় নিম্নানুরূপ প্রশ্নের অবতারণা করিবেন :—

- পুরাতন তামার পয়সার ব্যাস ছিল $1''$, ক্ষেত্রফল কত ছিল ?
- একটি চাকার ব্যাসার্দ্ধ 21 cm ; চাকাটির ক্ষেত্রফল কত ?
- দুটি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অনুপাত 1 : 2, ক্ষেত্রফলের অনুপাত কি রকম হবে ?

বাড়ীর কাজ :—শিক্ষক মহাশয় ছাত্রদের বাড়ী থেকে নিম্নানুরূপ অংক করে আনবার জন্য দিবেন এবং তাদের সেগুলি লিখে নিতে বলবেন :

1. একটি বৃত্তাকার উঠোনের ব্যাস 42 মিটার। প্রতি বর্গমিটার পাকা করতে 20 পঃ হিসাবে মোট কত খরচ পড়বে ?
2. একটি 14 cm. ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তাকার কার্ডবোর্ড থেকে মাঝখানে আংটির মত 7 cm. ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তাকার (সমকেন্দ্রিক) অংশ কেটে নেওয়া হল। যে কার্ডবোর্ড পড়ে রইল, তার ক্ষেত্রফল কত ?
3. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 2 বর্গমিটার 464 বর্গ সে.মিঃ ; ঐ বৃত্তের পরিধি কত হবে ?

১৫ নং পাঠটীকা—একাদশ শ্রেণী

[বিস্তৃত সংকেত]

শ্রেণী—একাদশ

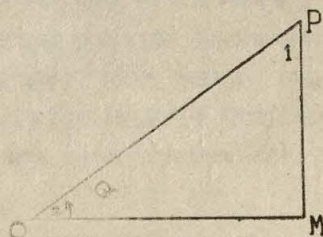
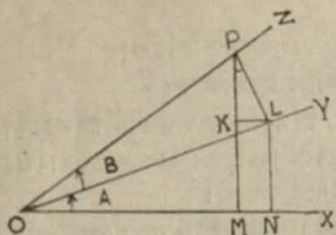
বিষয়—ত্রিকোণামিতি
সাধারণ পাঠ—যৌগিক কোণ
(Compound Angles)
বিশেষ পাঠ/অন্তকার পাঠ :

$\sin (A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$ প্রমাণ করা।

উদ্দেশ্য :—যৌগিক কোণ সম্বন্ধে ছাত্রদের জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করা, তাহাদের ত্রিকোণামিতি শিক্ষণে আগ্রহী করা ও তাহাদের চিন্তা-যুক্তি ও বিচার-শক্তির বিকাশ সাধন করা।

উপকরণ :—শ্রেণীকক্ষের সাধারণ সরঞ্জাম, রঙীন চক্ প্রভৃতি।

আয়োজন :—[ধরে নেওয়া হল ছাত্রদের $\sin \theta$, $\cos \theta$ ইত্যাদি সম্বন্ধে পূর্বজ্ঞান আছে।]

1. OPM সমকোণী ত্রিভুজে
$\sin \theta=?$ $\cos \theta=?$ $\tan \theta=?$
2. দুটি সমান্তরাল রেখা অপর একটি ছেদক দ্বারা ছিন্ন হ'লে কোন্ কোন্ কোণ সমান হয় ?

3. সমকোণী ত্রিভুজটি $<1+<2$ এর পরিমাণ কত ?

পাঠ-ঘোষণা :—'আজ আমরা যৌগিক কোণের পর্যায়ে sin (A+B) জাতীয় কোণের পরিমাণ নির্ণয় করার চেষ্টা করব"—এই বলিয়া শিক্ষক মহাশয় পাঠ-ঘোষণা করিবেন।

উপস্থাপন :—

পদ্ধতি	বিষয়
1. $\angle XOY = \angle A$ কি করে পাবে ?	...
2. $\angle A$ কোণ থেকে কি করে $\angle(A+B)$ পাবে ?	...
3. $\angle A$, $\angle B$ এবং $\angle(A+B)$ কোণকে সমকোণী ত্রিভুজের কোণ হিসাবে কি করে অঙ্কন করবে ?	... ...
4. $\angle KPL = \angle A$ কি করে প্রমাণ করবে ?	...
5. OPM সমকোণী ত্রিভুজে sin (A+B) = কোন্ কোন্ বাহুর অনুপাত ?	... ...
6. সেই অনুপাতগুলির কোন্ কোন্ কোণ সূচিত করছে ?	...
7. তাহলে sin (A+B) এর মান কি পেলে ?	...

অভিযোজন :—ছাত্রদের নবলব্ধ জ্ঞান এইভাবে পরীক্ষা করা হবে :

- চিত্রটিতে $\angle XOZ$=কোন কোণ ? কি ভাবে পেলে ?
- KPL কি জাতীয় ত্রিভুজ ? এর কোণটি কি জাতীয় কোণ ?
- sin (A+B)=কত পাওয়া গেল ?

বাড়ীর কাজ :—ঐ সূত্র প্রয়োগ করে মান নির্ণয় কর :

sin 75°, sin 135°, sin 150°

———

চতুর্থ খণ্ড

॥ পরিশিষ্ট ॥

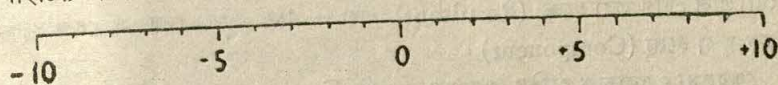
—ক বিভাগ—

বীজগণিত সম্বন্ধীয়

দিক-নির্দেশক সংখ্যা (Directed Numbers) :—

গণিত শাস্ত্রের উদ্ভবের পর প্রায় এক হাজার বৎসরের মধ্যে গণিতবিদেরা দিক-নির্দেশক সংখ্যা ব্যবহার করতে শেখেননি। সংখ্যার গুণ ও ভগ্নাংশের ব্যবহার তাঁরা শিখেছিলেন। ধীরে ধীরে জমা ও খরচ বোঝবার জন্য ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নের উদ্ভব হল। এই ঋণাত্মক সংখ্যার থেকেই দিক-নির্দেশক সংখ্যার ধারণা অর্জিত হয়।

ভারতবর্ষে এই ঋণাত্মক সংখ্যার সর্বপ্রথম উল্লেখ পাওয়া যায় ব্রহ্মগুপ্তের লেখার মধ্যে। তিনি ধনাত্মক রাশিকে সম্পত্তি বা আয় এবং ঋণাত্মক রাশিকে ঋণ বা ব্যয় বলে আখ্যা দিয়েছিলেন। তাছাড়া কোন একটি সরলরেখার একটি প্রান্ত যদি ধনাত্মক হয়, তবে তার বিপরীত দিকটি ঋণাত্মক হবে বলে তিনি ধরে নিয়েছিলেন। Diophantus, ভাস্কর—এঁরাও ঋণাত্মক রাশির কথা উল্লেখ করেছেন। হিন্দুরা ঋণাত্মক রাশিকে বিয়োজ্য হিসাবে ব্যবহার করতেন। আরবদেশে ফিবোনেক্কিও ঋণাত্মক রাশিকে লাভের পরিবর্তে ক্ষতি হিসাবে ব্যাখ্যা করেছিলেন। ষ্টিফেল-এর মত ছিল যে ঋণাত্মক সংখ্যা 0 (শূন্য) থেকেও ছোট এবং এ-ধারণা এখনও চলে আসছে।

সাধারণতঃ পাটীগণিতে কেবলমাত্র ধনাত্মক (positive) সংখ্যাই ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতেই ছাত্র ঋণাত্মক রাশির সঙ্গে পরিচিত হয়। সংখ্যার সাহায্যে বিভিন্ন ক্ষেত্রে যে সমস্ত জটিল কাজ সুসম্পন্ন করা সম্ভব হচ্ছে, তা আর সম্ভব হ'ত না যদি ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করা না হ'ত। কাজেই দেখা যাচ্ছে, সংখ্যার ব্যবহার দু'রকমের হতে পারে—(১) ধনাত্মক ও (২) ঋণাত্মক। নির্দেশ অনুসারে সংখ্যাটি কি জাতীয় তা উপলব্ধি করতে হয় বলে এগুলিকে **দিক-নির্দেশক সংখ্যা** বলে। দিক-নির্দেশক সংখ্যাগুলিকে একটি মূল রেখার উপর (axis of reference) বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন :—

কাজেই দেখা যাচ্ছে, নির্দেশক সংখ্যাগুলি একই সঙ্গে দিক (direction) এবং বিস্তার বা প্রসার (magnitude) সূচিত করে। এই সংখ্যাগুলিকে সাধারণতঃ বন্ধনীর মধ্যে রেখে প্রকাশ করা হয়, যেমন—(+3), (−5), $(+x)$, $(-y)$, ইত্যাদি। যে সরলরেখার সাহায্যে নির্দেশক সংখ্যাগুলি সূচিত করা হয়, তাকে Vector বলে।

নির্দেশক সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা দিতে হলে বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নিলেই ভালো হয়। ঋণাত্মক রাশির ধারণাটি ছাত্রেরা সহজে বুঝে উঠতে পারে না। এজন্য নির্দেশক সংখ্যা শিক্ষা দেবার সময় কেবলমাত্র কম-বেশীর ধারণাটিই না শিখিয়ে লাভ-ক্ষতি, উত্তর-দক্ষিণ, আগে-পরে, অক্ষাংশ-দ্রাঘিমাংশ, এ সমস্ত ধারণাও ব্যবহার করা উচিত। এর ফলেই ঋণাত্মক রাশি সম্বন্ধে ছাত্র পরিষ্কার জ্ঞান অর্জন করতে পারবে। কয়েকটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা সহজ হবে।

5 টাকা লাভ = (+5), তাহলে 5 টাকা ক্ষতি = (−5)

উত্তর দিকে 3 মাইল = (+3), তাহলে দক্ষিণ দিকে 3 মাইল = (−3)

10 দিন আগে = (−10), তা হলে 10 দিন পরে = (+10) ইত্যাদি।

এরপর ছোট ছোট প্রশ্নের সাহায্যে ছাত্রদের নির্দেশক সংখ্যার জ্ঞান অর্জিত হয়েছে কিনা তা পরীক্ষা করা যেতে পারে। যেমন :—

(1) আমি প্রথম ঘণ্টায় উত্তর দিকে 4 মাইল গেলাম এবং তার পরের ঘণ্টায় দক্ষিণ দিকে 3 মাইল ফিরে এলাম। যেখান থেকে যাত্রা করেছিলাম, সেখান থেকে এখন আমি কতদূর?

(2) আমি প্রথম ঘণ্টায় উত্তর দিকে 4 মাইল গেলাম এবং তার পরের ঘণ্টায় উত্তর দিকে আরো 3 মাইল গেলাম। যাত্রার স্থান থেকে এখন আমি কতদূরে আছি?

এখন আমরা দু'রকমের সংখ্যার সঙ্গে পরিচিত হলাম এবং +3 ও −3 চিহ্নের বিভিন্ন ব্যবহারও লক্ষ্য করলাম। এই দু'টি চিহ্ন সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত মতামত হল :—

(ক) + এবং − চিহ্ন দু'টি বিভিন্ন জাতীয় সংখ্যা সূচিত করে—ধনাত্মক ও ঋণাত্মক। সংখ্যা দু'টিকে (a, a^1) বলে চিহ্নিত করলে $a = -a^1$ এবং $a^1 = -a$ হবে।

(খ) + এবং − চিহ্ন দিক-নির্দেশ করে থাকে।

(গ) + এবং − চিহ্ন পরস্পর বিপরীত। সমান সমান সংখ্যার বিপরীত সংখ্যাগুলির যোগফল 0 হয়। অর্থাৎ $(+a)+(-a)=0$

(ঘ) + এবং − চিহ্ন কার্যপ্রণালীও সূচিত করে। + চিহ্ন বলে দেয় যে সংখ্যাগুলি যোগ করা হচ্ছে (Resultant) এবং − চিহ্ন বলে দেয় সে সেগুলিকে পৃথক করা হচ্ছে (Component)।

কেবলমাত্র ধনাত্মক রাশির গুণ করার সময় চিহ্ন ব্যবহার করা অপরিহার্য হয়ে

পড়ে। একেই বলা হয় "Rule of Signs", যেটিকে বীজগণিতে এভাবে প্রকাশ করা হয় :—

$$(+a)\times(+b)=+ab, \qquad (-a)\times(+b)=-ab,$$
$$(+a)\times(-b)=-ab, \qquad (-a)\times(-b)=+ab.$$

এখন প্রশ্ন হল—এই নিয়ম চারটিকে কিভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে ? সত্য কথা বলতে কি, এর প্রমাণ করা যায় না। Young-এর মতে,—"There can be no such thing as an 'a priori' proof of these laws of Signs ; there are pure conventions, finding their justification on the logical side in their consistency with previous assumptions and on the practical side in their serviceableness." (Fundamental Concepts of Algebra and Geometry—J. W. Young)

যাহোক প্রমাণ করা সম্ভব না হলেও নিয়মগুলি ব্যাখ্যা করা সম্ভব। চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়মগুলি দৈর্ঘ্য-প্রস্থ, লাভ-ক্ষতি প্রভৃতির সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝানো যাক।

(১) কোন একটি স্কুলে 3 জন ছাত্র ভর্তি হল। এরা প্রত্যেকে 3 টাকা করে বেতন দেয়। ছাত্র তিনটি ভর্তি হওয়াতে স্কুলের ছাত্রসংখ্যা বেড়ে গেল। সুতরাং ছাত্রসংখ্যা (নূতন ভর্তি) হল (+3)। তারা বেতন দেয় অর্থাৎ স্কুলের আয় হয়। সুতরাং বেতনকেও আমরা (+3) বলতে পারি। এখন এই তিনজন ছাত্রের জন্য স্কুলের মোট আয় হচ্ছে 9 টাকা যা এই ভাবে প্রকাশ করা যায় :—

$$(+3)\times(+3)=+9$$

(২) যদি ঐ 3 জন ছাত্র ভর্তি হ'ত, কিন্তু কোন বেতন দিত না (অর্থাৎ ফ্রী হ'ত) তাহলে নূতন ছাত্র হ'ত (+3)। ছাত্ররা ফ্রী থাকাতে স্কুলের আয় হ'ত না, বরং ক্ষতি হ'ত এবং তা প্রকাশ করা যেত (−3) এভাবে। এই তিনজন ছাত্রের জন্য মোট ক্ষতি হ'ত 9 টাকা এবং তা এভাবে প্রকাশ করা যায়।

$(+3)\times(-3)=-9$ [লাভ যদি + হয়, ক্ষতি তবে − হবে।]

(৩) 3 টাকা করে বেতন দিত, এমন 3 জন ছাত্র যদি স্কুল ছেড়ে চলে যেত, তাহলে স্কুলের ছাত্র তিনজন কমে যেত। ছাত্ররা 3 টাকা করে বেতন দিত ; সুতরাং তারা চলে যাওয়াতে স্কুলের 9 টাকা ক্ষতি হ'ত। এখানে ছাত্রসংখ্যা (−3) এবং বেতন (+3)।

সুতরাং $(-3)\times(+3)=-9$

(৪) ফ্রী ছিল, এমন 3 জন ছাত্র যদি স্কুল ছেড়ে চলে যায়, সেক্ষেত্রে প্রকৃতপক্ষে স্কুলের 9 টাকা লাভই হবে। এখানে ছাত্রসংখ্যা (−3) এবং যেহেতু ছাত্ররা ফ্রী ছিল, সেইজন্য বেতন (−3)

সুতরাং $(-3)\times(-3)=+9$ হবে।

এইভাবে কতকগুলি উদাহরণের সাহায্যে ছাত্রদের গুণ যেমন শেখানো যাবে,

বিপরীত পদ্ধতিতে অনেক বেশি শেখানো সম্ভব। বেশ কিছু সাধারণ উদাহরণের পর তারা একটি সাধারণ সূত্র তৈরী করে নিতে পারে। যেমন—

$$\frac{+\text{চিহ্ন}}{+\text{চিহ্ন}} = +\text{চিহ্ন}, \quad \frac{+\text{চিহ্ন}}{-\text{চিহ্ন}} = -\text{চিহ্ন}, \quad \frac{-\text{চিহ্ন}}{+\text{চিহ্ন}} = -\text{চিহ্ন},$$

$$\frac{-\text{চিহ্ন}}{-\text{চিহ্ন}} = +\text{চিহ্ন}$$

সূত্র (Formulae) :—বীজগণিতের ক্ষেত্রে সূত্রের স্থান বেশ গুরুত্বপূর্ণ। সূত্রের সাহায্যে খুব সংক্ষিপ্ত উপায়ে কোন বহু তথ্যকে প্রকাশ করা সম্ভব (Compressed Information)। কোন একটি বিশেষ শ্রেণীভুক্ত সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে সূত্রকে একটি সাধারণ নিয়মের বিবৃতি বলা যেতে পারে। সূত্র ব্যবহারের ফলে চিন্তাশক্তি ও সময়ের অপচয় বন্ধ করা যায়।

সূত্র শিক্ষণের সময় বিশেষ যত্ন নিতে হবে। ছাত্ররা যেন অন্ধভাবে সূত্রগুলি মুখস্থ করা ও যান্ত্রিকভাবে সেগুলি প্রয়োগ করা থেকে বিরত থাকে। তারা যেন নিজেরাই সূত্রগুলি আবিষ্কার করতে পারে। এতে তারা যেমন আনন্দ লাভ করবে তেমনি তাদের আগ্রহও বৃদ্ধি পাবে। তাছাড়া আবিষ্কার করেছে বলে সূত্রগুলির বাস্তব উপকারিতা সম্বন্ধেও তারা অবহিত থাকবে।

সূত্র শিক্ষা দেবার সময় শিক্ষককে বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে। $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, এই সূত্রটি একেবারে ছাত্রদের সামনে উপস্থাপিত না করে পাটীগণিতের সাহায্যে বর্গের ধারণা দেওয়া যেতে পারে। তারপর $a+b$-কে $a+b$ দ্বারা গুণ করতে বলা যেতে পারে। উপযুক্ত প্রশ্নের সাহায্যে শিক্ষক ছাত্রদের এই সিদ্ধান্তে উপনীত করতে পারবেন যে দু'টি রাশির যোগফলের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ + রাশি দু'টির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ। সূত্র শিক্ষা দিবার পর সূত্রের প্রয়োগ ও প্রয়োজনীয়তা সম্বন্ধে শিক্ষা দিতে হবে। সূত্রের সাহায্যে হিসাব-পত্র বা গণনার কি রকম সুবিধা হয়, তার দু'একটা উদাহরণ দিলে ভালো হয়। যেমন—

$(517)^2=(500+17)^2$ এই ভাবে $(a+b)^2$-এর সূত্র এবং $(285)^2=(300-15)^2$ এই ভাবে $(a-b)^2$-এর সূত্রে প্রয়োগ করা যায়।

উৎপাদক (Factors) :—পাটীগণিতে অনুপাত সম্বন্ধীয় সমস্যা সমাধানের সময় প্রাসঙ্গিক ভাবেই উৎপাদক ব্যবহার করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে উৎপাদকের একটা গুরুত্বপূর্ণ স্থান আছে। কিন্তু অধিকাংশ ছাত্রের নিকট উৎপাদক ভীতির বস্তু! এর কারণ হিসাবে বলা যেতে পারে যে ছাত্ররা প্রথম থেকেই উৎপাদকের আকৃতিটি (Form) উপলব্ধি করার চেষ্টা করে না। বিভিন্ন উৎপাদকের মধ্যে যে একটা আকৃতিগত মিল আছে, তা খুঁজে দেখার চেষ্টাও তারা করে না। বিভিন্ন উৎপাদকের বিভিন্ন নাম দিয়ে জটিলতার সৃষ্টি করা হয়। $ma+nb$ যে জাতীয় উৎপাদক,

$5x+5y, (x+2y)(2a+1)+(2x+y)(2a+1), a(2a+1)+b(2a+1)$ ইত্যাদিও সেই জাতীয় উৎপাদক। তবে দেখা গেছে middle-term বা trinomial জাতীয় উৎপাদকে ছাত্রদের আগ্রহ অপেক্ষাকৃত বেশী। সেইজন্য এই জাতীয় উৎপাদকই ছাত্রদের ভালোভাবে শেখানো উচিত। তাছাড়া এ-জাতীয় উৎপাদক সমাধানের ক্ষেত্রেও বিশেষ কার্যকরী।

বিভিন্ন মডেল, নক্সা বা চিত্রের সাহায্যে ছাত্রদের উৎপাদক সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জনে সহায়তা করা সম্ভব। $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $ac+bc=(a+b)c$, $ax-bx=(a-b)x$ ইত্যাদি জাতীয় উৎপাদকের মডেল ও নক্সা করা সম্ভব। প্রথমে common factor দিয়ে শুরু করা বাঞ্ছনীয়। তারপর ধীরে ধীরে middle term factor, Harder factor ইত্যাদি শুরু করা যেতে পারে। লক্ষ্য রাখতে হবে, ছাত্ররা যেন নির্ভুলভাবে উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে শেখে। উৎপাদক নির্ণয় করা হয়ে গেলে মিল করার পদ্ধতিটিও তাদের শিখিয়ে দিতে হবে।

সমীকরণ (Equations) :—বীজগণিত-শিক্ষণ পদ্ধতিতে সমীকরণের কথা আগেই বলা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে বীজগণিতে সমীকরণের গুরুত্ব অনেকখানি। বীজগণিতের কঙ্কালে সমীকরণই রক্ত-মাংস যোগ করে সেটিকে প্রাণবন্ত করে তুলতে সক্ষম। সমীকরণ শেখাবার জন্য দাঁড়িপাল্লার সাহায্যে ভারসাম্য নিয়মটি (balance method) খুবই উপযোগী। কোন একটি দাঁড়িপাল্লার একদিকে চায়ের প্যাকেট বা অন্য কিছু রেখে অপর দিকে ওজন রেখে কি ভাবে ভারসাম্য বজায় রাখা হচ্ছে তার দৃষ্টান্তের সাহায্যে সমীকরণ শেখানো সহজ হয়। বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন জিনিসের ওজনের পর ঐ জাতীয় সহজ মৌখিক বা লিখিত সমস্যার সমাধান করতে দেওয়া উচিত। অবশ্য সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে ছাত্র যেন প্রত্যেকটি স্তর স্পষ্ট ভাবে বুঝতে পারে এবং যুক্তির সাহায্যে বোঝাতেও পারে। স্তরগুলিতে 'কেন' (why) এবং 'সুতরাং' (so) ইত্যাদির ব্যবহার যেন তার কাছে অর্থপূর্ণ হয়। কোন সমীকরণের সমাধান হয়ে যাবার পর যে সমাধানটি পাওয়া গেল, তা সমীকরণে বসিয়ে দেখতে হবে যে সত্যিই সমাধান ঠিক হয়েছে কি না।

সমীকরণ কথাটির অর্থ হল—সমান করা। সমীকরণের সমাধান করতে গেলে দু'টি দিককে সমান করতে হবে। যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ যাই করা হোক না কেন, দু'টি দিকেই যেন একই প্রণালী অনুসরণ করা হয়। আর একটি জিনিস সমীকরণের ক্ষেত্রে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। তা হল **অথবা** ও = চিহ্নের ব্যবহার। সমীকরণের প্রতিটি লাইনে একটিমাত্র = চিহ্ন থাকা বাঞ্ছনীয় এবং বিভিন্ন লাইনের চিহ্নগুলি যেন পর পর সাজানো থাকে। প্রথমে সহজ সমীকরণে ছাত্রদের অভ্যস্ত করে নিতে হবে। তবেই তাদের পক্ষে জটিল সমীকরণের সমাধান করা সম্ভব হবে। মৌখিক ভাবেও ছাত্রকে সমাধান করার সুযোগ দিতে হবে। যখন লিখিতভাবে সমাধান করা হবে, তখন প্রতিটি স্তর যেন লিপিবদ্ধ করা হয়। যেমন :—

$6x=36$ এই সমীকরণে একেবারে $x=6$ লিখলে চলবে না। লিখতে হবে :

উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করিয়া :— $\frac{6x}{6}=\frac{36}{6}$ or, $x=6.$

এ ভাবে সমাধান করার অনেক সুবিধা আছে এবং ভুল হবার সম্ভাবনা কম। প্রতিটি স্তর না লিখে মৌখিকভাবে সমাধান করতে গেলে ভুল হবার সম্ভাবনা বেশী থাকে। যেমন— $4x=6$, তাড়াতাড়িতে $x=2$ লিখে দেওয়া অসম্ভব নয়।

সমীকরণ শেখাতে গিয়ে প্রথমেই ছাত্রদের কতকগুলি ধারার সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া হয়। সেগুলি হল, দিক পরিবর্তন হলেই চিহ্নের পরিবর্তন এবং বজ্রগুণনের (cross multiplication) ধারণা। এগুলি পরিকল্পিত পদ্ধতিতে শেখাবার কোন প্রয়োজন নেই। ছাত্র নিজে নিজেই করতে গিয়ে এগুলি শিখে যাবে। ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান যখন পাওয়া যায়, তখন তা সমীকরণে বসিয়ে মিল করে দেখতে হয় সমাধান ঠিক হয়েছে কি না? মিল করার সময় সমীকরণটির বামদিক ও ডানদিকের মান পৃথকভাবে বের করে দেখতে হয়, সেই মান দু'টি সমান হচ্ছে কি না। যে ভাবে সমীকরণটি দেওয়া থাকে, সেটিকে ঠিক সেইভাবে রেখে সমাধানের মান বসিয়ে মিল করা উচিত নয়। এর কারণ হল, যা প্রমাণ করতে হবে সেটিকেই প্রথম লাইনে সত্য বলে ধরে নেওয়া হচ্ছে, এবং সমাধান করার পদ্ধতির মধ্যে যদি কোন ভুল হয়ে থাকে, তবে সেই ভুলটির পুনরাবৃত্তি করা হচ্ছে। কারণ এ ভাবে মিল করা আর সমাধান করা তো এক জাতীয় পদ্ধতিই! তাছাড়া সমীকরণটি মিল করতে গিয়ে হয়তো এই রকম একটি স্তর পাওয়া গেল :

$$\frac{4-1}{3}+4=9-\frac{2(12-2)}{5} \quad or \quad 1+4=9-4 \quad or \quad 5=5$$

(অর্থাৎ সমাধানটি ঠিক হয়েছে)

কিন্তু এখানে যুক্তি কি? যুক্তি হল $5=5$ হয়েছে। এ-জাতীয় যুক্তি দেখানো যুক্তিহীন।

সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations) :—সমীকরণ মাত্রেই কোন সমস্যা দিয়ে আরম্ভ করা ভালো। সহ-সমীকরণও সমস্যা দিয়ে আরম্ভ করলে ভালো হয়। যখন দু'টি অজানা সংখ্যা নির্ণয় করতে হয়, তখন একটি সমীকরণে সমাধান সম্ভব নয়। তার জন্য দু'টি সমীকরণ প্রয়োজন। সহ-সমীকরণ দু'ভাবে সমাধান করা যায়। একটিকে বলা হয় **Substitution Method**, আর অপরটি হল **Elimination Method**। দু'টি পদ্ধতিরই উদাহরণ দেওয়া হল। ধরা যাক সমীকরণ দু'টি হল :—

$7x-8y=6 \cdots\cdots\cdots (i) \qquad 6x+7y=19 \cdots\cdots\cdots (ii)$

প্রথমে Substitution Method-এর সাহায্যেই সমাধান করা যাক। এই পদ্ধতিতে প্রথমে দু'টি সমীকরণের মধ্যে যে কোন একটির থেকে অজ্ঞাত রাশি দু'টির

একটির মান অপরটির দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরে অন্য সমীকরণটিতে প্রথমে ঐ অজ্ঞাত রাশির স্থলে এই মান বসিয়ে একটি সমীকরণ গঠন করা হয় এবং পরে সেটি সমাধান করে অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা হয়। এরপর এই সমীকরণ দু'টির যে কোন একটিতে এই মান বসিয়ে অবশিষ্ট অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা হয়। যেমন :—

(i) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $x=\frac{+8y}{7}$,

(ii) নং সমীকরণে x-এর বদলে এই মান অর্থাৎ $\frac{6+8y}{7}$ বসাতে হবে।

ফলে সমীকরণটি দাঁড়াবে : $\frac{6(6+8y)}{7}+7y=19$ অর্থাৎ $y=1$.

এবার y-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে x-এর মান নির্ণয় করতে হবে। এবার Elimination Method-এর সাহায্যে সমাধান। Elimination কথাটি ল্যাটিন Limen (=threshold, উঠান) কথা থেকে উদ্ভূত। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক সমীকরণ থেকে অজ্ঞাত রাশি দু'টির যে কোন একটিকে বাদ দেওয়া হয়। এর জন্য দু'টি অজ্ঞাত রাশির যে কোন একটির সহগ দু'টিকে সমান করে (ভাগ বা গুণের সাহায্যে) তারপর যোগ বা বিয়োগ করা হয়। যেমন :—

(i) নং সমীকরণকে 6 দ্বারা গুণ করলে x-এর সহগ হবে 42, আবার (ii) নং সমীকরণে x-এর সহগ 42 করতে হলে তাকে 7 দ্বারা গুণ করতে হবে। তারপর বিয়োগ করলেই x বাদ যাবে এবং y-এর মান পাওয়া যাবে। তারপর যে কোন একটি সমীকরণে y-এর মান বসালেই x-এর মানও পাওয়া যাবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation) : দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে কোন একটি সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে কোন একটি সমীকরণের সাহায্য নিতে হবে। প্রথমে এমন ভাবে সমস্যাটি নির্বাচিত করতে হবে যেন সমীকরণটির Middle term উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করা সম্ভব হয়। দেখা গেল, হয়তো সমীকরণটি এই রকম হল : $x^2-12x-64=0$।

সুতরাং এখানে যে সমীকরণটি পাওয়া গেল, তার অজ্ঞাত রাশির বর্গ, অর্থাৎ দ্বিতীয় ঘাতবিশিষ্ট পদ আছে। এই রকম সমীকরণকেই দ্বিঘাত সমীকরণ বলে। এই জাতীয় সমীকরণ সমাধান করতে হলে প্রথমে সহজ সমীকরণ নিয়ে অগ্রসর হতে হবে। যেমন :—

যদি $x^2-16=0$ হয় $x=$ কত? এখানে দেখা যায় x-এর মান দু'টি, $+4$ অথবা -4

আবার $x^2-16=0$-কে অন্য ভাবেও লেখা যায়। যেমন :—

$$(x+4)(x-4)=0$$

দু'টি রাশির গুণফল যদি '0' হয়, তবে তাদের ভিতর অন্ততঃ একটি '0' হবেই। সুতরাং হয় $(x+4)=0$ অর্থাৎ $x=-4$, নয়তো $x-4=0$, অর্থাৎ $x=+4$।

আবার যখন $3x^2+5x-12=0$ এই জাতীয় সমীকরণ উৎপাদকের সাহায্যে সমাধান করতে হয়, তখন বিশেষ যত্ন নেওয়া প্রয়োজন ; কারণ

$3x^2+5x-12=0$ অথবা $(3x-4)(x+3)=0$

কাজেই 'হয় $3x-4=0$, নয়তো $x+3=0$'—এই স্তরটি লেখা একান্ত প্রয়োজন। ছাত্ররা এতে অভ্যস্ত হয়ে গেলে এই নীতি অনুসরণ করে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দিলে ভালো হয়। যেমন :—

যদি $ab=0$ হয় এবং $a=1$ হয়, তবে $b=$কত ?

যদি $(m+n)x=0$ হয়, তবে $x=$কত ?

যদি $(x-1)(y+2)=0$ হয়, $x=2$ হয়, তবে $y=$কত ? ইত্যাদি। এই প্রসঙ্গে ছাত্রদের আর একটি জিনিস শিখিয়ে দিতে হবে। তা হল :—

যদি $X \times Y \times Z=0$ হয় তবে হয় X, নয়তো Y, নয়তো $Z=0$ হবে। কিন্তু $X+Y+Z=0$ হলে এ রকম কিছু বলা যাবে না।

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করার আর একটি উপায় হচ্ছে, একটি সংখ্যাকে সম্পূর্ণ বর্গ করা। যখন সমীকরণটিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না তখনই এই নিয়মটি অনুসরণ করা উচিত। যেমন $x^2+4x=12$

অথবা $x^2+4x+4=12+4$ অথবা $(x+2)^2=16=(4)^2$ ইত্যাদি।

এই পূর্ণবর্গ নির্ণয় করার জন্য চর্চার প্রয়োজন হয়। যেমন x^2+4x-এর সঙ্গে আর কোন্ রাশি যোগ করলে তা পূর্ণবর্গ হবে, তা নির্ণয় করতে হলে চিন্তার প্রয়োজন। জ্যামিতি ও লেখচিত্রের সাহায্যেও এই রকম সমীকরণের সমাধান করা সম্ভব। অবশ্য জ্যামিতির সাহায্যে সমাধান করা একটু কষ্টকর।

দ্বিঘাত সমীকরণের দু'ভাবে সমাধান করা সম্ভব। যেমন :

(১) $(x-y)^2-c=0$

$\therefore \ (x-y+\sqrt{c})(x-y-\sqrt{c})=0$ হবে।

অর্থাৎ হয় $x-y+\sqrt{c}=0$, নয়তো $x-y-\sqrt{c}=0$ হবে।

(২) $(x-y)^2=c$

$\therefore \ x-y=\pm\sqrt{c}$ অর্থাৎ $x=y\pm\sqrt{c}$.

দু'টি পদ্ধতির মধ্যে দ্বিতীয়টিই অপেক্ষাকৃত সহজ। অবশ্য ছাত্রদের দু'টি পদ্ধতির সাহায্যেই সমাধান করতে শেখানো উচিত। বীজগণিতে অনেক নিয়মই শিখতে হয়। কিন্তু ঐ নিয়মগুলি শেখাই বীজগণিতের মূল উদ্দেশ্য নয়। ঐ নিয়মগুলির সাহায্য নিয়ে কিভাবে সহজে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করা যেতে পারে তা শেখাই বীজগণিতের উদ্দেশ্য হওয়া উচিত। বিদ্যালয়ে যে বীজগণিত শেখানো হয়, তারও উদ্দেশ্য হল সমস্যার সমাধান করা। এই সমস্যার সমাধান করার জন্য আবার সমীকরণ

অপরিহার্য। এই জন্যই সমীকরণকে বীজগণিতের কেন্দ্রীয় অধ্যায় বলা হয়ে থাকে। এই প্রসঙ্গে Young-এর বক্তব্য হল: The central topic of algebra is, beyond question, the equation and its applications. It is this that puts flesh and blood upon the dry bones of the skeleton of algebraic routine, and the latter should not be developed all in a lump, but as needed for the solution of equations." (The Teaching of Mathematics. J. W. A. Young. P. 302.

"The goal of school algebra is the equation." (Ibid—P. 302)

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers):—গণিতে আমরা দু'রকমের সংখ্যা ব্যবহৃত হতে দেখি—স্বাভাবিক ও অস্বাভাবিক। বিভিন্ন জাতীয় সমস্যা ও তার সমাধানের মধ্যে দিয়ে ধীরে ধীরে সংখ্যার ধারণার প্রসার লাভ ঘটেছে। প্রথম দিকে 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা গড়ে ওঠে এবং সেগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হ'ত। প্রকৃতপক্ষে তখন সংখ্যা বলতে ঐ সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাকেই বোঝাত এবং এও ধারণা করা হ'ত যে সংখ্যামাত্রই বস্তুবাচক। মূর্ত জিনিসের সাহায্য নিয়েই সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা গড়ে ওঠে। ক্রমশঃ বিমূর্ত সংখ্যার ধারণা জন্মায়। স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির সাহায্যে যোগ ও গুণের কাজ সব সময় করা যেতে পারে ঠিকই, কিন্তু বিয়োগ ও ভাগের কাজ সব সময় করা যায় না। একটি স্বাভাবিক সংখ্যাকে অপর একটি স্বাভাবিক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল সবসময় পূর্ণ হয় না। এর ফলে সৃষ্টি হল ভগ্নাংশের। তেমনি কতকগুলি ক্ষেত্রে বিয়োগের কাজে জটিলতা দেখা দেবার ফলে ঋণাত্মক সংখ্যার উদ্ভব হল। কিন্তু প্রচলিত সংখ্যার ধারণা নিয়ে ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যাখ্যা করা যেত না। তখন সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণাকে আরো বিস্তৃত করার প্রয়োজনীয়তা দেখা গেল। সংখ্যাকে দিক-নির্দেশক বলে অভিহিত করা শুরু হল। এই জাতীয় সংখ্যাগুলিকে (দিক-নির্দেশক) একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি মূলবিন্দু (origin) থেকে দু'টি বিপরীত দিকে বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থিত বিন্দু বলে মনে করা হল। যাবতীয় স্বাভাবিক সংখ্যা, ভগ্নাংশ, ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যাকে এই সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুর সাহায্যে প্রকাশ করা হল। কিন্তু সংখ্যাটি জানা থাকলে তাকে সরলরেখার উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুতে কল্পনা করতে পারলেও সরলরেখার উপরিস্থ সমস্ত বিন্দুকেই কিন্তু স্বাভাবিক বা ভগ্নাংশসূচক সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হ'ত না। একটা উদাহরণ দিলে ব্যাপারটি পরিষ্কার হবে। একক বর্গের কর্ণের (2-এর বর্গমূল $\sqrt{2}$) দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্বে অবস্থিত যে বিন্দু, সেটিকে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা বা ভগ্নাংশের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। মূলবিন্দু থেকে দু'দিকে অবস্থিত সমস্ত বিন্দুকেই যদি এক-একটি সংখ্যা কল্পনা করা হয়, তবে যে সমস্ত বিন্দু $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ প্রভৃতিকে পরিমাপ করে, তারাও এক-একটি সংখ্যা সূচিত করে। আমরা আগেই সংখ্যাগুলিকে সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দু বলে কল্পনা করে নিয়েছি। কাজেই এক্ষেত্রে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ প্রভৃতিকে সংখ্যা বলেই

ধরে নিতে নিতে হবে, কারণ ঐগুলিও কোন-না-কোন বিন্দুর উপর অবস্থিত। তাহলে দেখা গেল, প্রথম দিকে সংখ্যা সম্বন্ধে যে সংকীর্ণ ধারণা ছিল, এখন তা আরো বিস্তৃত হয়ে গেল। এখন আমরা দু'রকমের সংখ্যা দেখতে পাচ্ছি। এক রকম হল স্বাভাবিক সংখ্যা ও ভগ্নাংশ এবং আর এক রকম হল $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি জাতীয় সংখ্যা, যাদের রৈখিক দৈর্ঘ্যে প্রকাশ করা সম্ভব, কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যা বা ভগ্নাংশের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। প্রথম জাতীয় সংখ্যাগুলিকে বলা হয় **মূলদ সংখ্যা** (Rational Number) এবং দ্বিতীয় জাতীয় সংখ্যাগুলিকে বলা হয় **অমূলদ সংখ্যা** (Irrational Number)। মূলদ সংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায়, কিন্তু অমূলদ সংখ্যাকে স্বাভাবিক সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না। অবশ্য এদের অনুপাত হিসাবে প্রকাশ না করা গেলেও অমূলদ সংখ্যার কাছাকাছি অবস্থিত মূলদ সংখ্যার সাহায্যে এগুলিকে প্রকাশ করা যায়। $\sqrt{2}$ এই রকম একটি দৃষ্টান্ত। $\sqrt{2}$ কোন ভগ্নাংশ দিয়ে প্রকাশ না করে আমরা $\sqrt{2}$-র কাছাকাছি কোন মূলদ সংখ্যা নিয়ে ক্রমশঃ এগিয়ে যেতে পারি। যে মান পাওয়া যাবে তা নিকটস্থ মূলদ সংখ্যার চেয়ে বড় হবে কিন্তু $\sqrt{2}$-র চেয়ে ছোট হবে। যেমন— 1·4, 1·41, 1·414 ইত্যাদি। তেমনি আমাদের প্রচলিত ধারণা অনুযায়ী কোন রাশির বর্গ কখনও ঋণাত্মক হয় না। কিন্তু i^2 (Imaginary quantity) এর মান ঋণাত্মক হওয়াতে এটিকেও অস্বাভাবিক বা অমূলদ সংখ্যা বলা যেতে পারে। বর্গ, ঘন, প্রভৃতির অবঘাতন (evolution) যদি সব সময় সম্ভাবনাময় করতে হয়, তবে অমূলদ সংখ্যার একান্ত প্রয়োজন।

যে সমস্ত গ্রীক পীথাগোরাসের মতবাদে বিশ্বাসী ছিলেন, তাঁরা এ কথাও বিশ্বাস করতেন যে কোনও বর্গক্ষেত্রে কর্ণের সঠিক মাপ পাওয়া যায় না। তাঁরা শেষ পর্যন্ত এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন যে সংখ্যামাত্রেরই দু'টি প্রকার ভেদ আছে। সেটি হয় মূলদ হবে, নতুবা অমূলদ হবে। আর এই অমূলদ সংখ্যা হল এমন সংখ্যা যাকে দু'টি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব হয় না। পূর্ণ সংখ্যা বা সামান্য ভগ্নাংশকে জ্যামিতিতে একটি রেখার উপর **একটি বিন্দুর অবস্থিতি** দিয়ে প্রকাশ করা যায়। কিন্তু অমূলদ সংখ্যা প্রকাশ করা যেতে পারে **দৈর্ঘ্যের সাহায্যে**। প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ হচ্ছে বাহুর $\sqrt{2}$ গুণ। কোন ভগ্নাংশের সাহায্যেই $\sqrt{2}$-র সঠিক মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। $\sqrt{2}$-এর ঠিক কাছাকাছি পৌছাবার জন্য পর পর ভগ্নাংশ নিয়ে একটু একটু করে ক্রমে বাড়ানো যেতে পারে। কিন্তু সে ক্ষেত্রেও $\sqrt{2}$-র সঠিক মান পাওয়া যায় না। এই রকম অনুপাতকে গ্রীকরা অমেয় বা অপরিমেয় (incommensurable) বলে আখ্যা দিয়েছিলেন। প্রকৃত সংখ্যারাশি বলতে যা বোঝায়, তা হল এই সমস্ত অমেয় সংখ্যা, ভগ্নাংশ, পূর্ণ সংখ্যা প্রভৃতির সমষ্টি। বীজগণিতে আর একটি কথার বা আর এক শ্রেণীর সংখ্যা প্রচলিত আছে যেটিকে বলা যেতে পারে Surd। কথাটির কি করে উৎপত্তি হল, তার ইতিহাস পড়লে জানা যায় Al-khowarizmi মূলদ সংখ্যাদের বলতেন 'audible' বা শ্রুতিগোচর ; আর Surd-

দের সম্বন্ধে বলতেন inaudible বা শ্রবণাতীত। এই inaudible শব্দ থেকেই Surd শব্দটি এসেছে বলে মনে হয়। আবার Surd কথাটির অর্থ হল মূক (dumb)। অনেকে, যেমন—আরব ও হিব্রুরা, আবার এই Surd-কে বলতেন 'non-expressible numbers' বা এমন সমস্ত সংখ্যা যা প্রকাশ করা যায় না।

করণী (Surds) :—যে কোন সংখ্যার বর্গমূল বলতে আমরা এমন একটি সংখ্যা বুঝি যার বর্গ করলেই প্রদত্ত সংখ্যাটি ফিরে পাওয়া যাবে। যেমন $\sqrt{16}=\pm4$, $\sqrt{36}=\pm6$ ইত্যাদি ; কিন্তু সঠিক বর্গমূল পাওয়া যাবে, এ জাতীয় সংখ্যার সংখ্যা খুব বেশী নয়। অনেক সংখ্যাই আছে যার সঠিক বর্গমূল পাওয়া যায় না। যেমন $\sqrt{2}$। এটির বর্গমূল অনন্ত কাল ধরে করে গেলেও বর্গমূলের সঠিক মান পাওয়া যাবে না। এই জাতীয় সংখ্যাকে, যাদের অন্য কোন আকারে বা রূপে সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না, তাদের **করণী** (Surd) বলা হয়। Surd কথাটির অর্থ হল মূক (dumb)। কথাটির উৎপত্তি ও অর্থ সম্বন্ধে একটু আগেই (অমূলদ সংখ্যায়) আলোচনা করা হয়েছে। করণীকে যদিও মূলদ সংখ্যার আকারে প্রকাশ করা যায় না, তবুও কখনো কখনো এগুলিকে একটি মূলদ সংখ্যা ও একটি করণীর গুণফলের আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। যেমন $\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\sqrt{4}.\sqrt{5}=2\sqrt{5}$, ইত্যাদি। আবার কোন ভগ্নাংশে হরে যদি করণীসংখ্যা থাকে, তখন হরটিকে করণী-মুক্ত করলে বা সেটিকে মূলদ সংখ্যার (নিকটতম) সাহায্যে প্রকাশ করলে ভগ্নাংশটির আসন্ন মান নির্ণয় করার সুবিধা হয়। এইভাবে হরকে করণী-মুক্ত করার নাম হল হরের **করণী নিরসন**।

লেখচিত্র (Graphs) :—বর্তমান যুগে বিভিন্ন ক্ষেত্রে লেখচিত্র বহুল ব্যবহৃত। বলতে গেলে লেখচিত্র বর্তমান সভ্যতার ও কৃষ্টির একটি অপরিহার্য অঙ্গ হয়ে পড়েছে। লেখচিত্র হল কোন বিবৃতির একটি সুস্পষ্ট চিত্ররূপ। আবহাওয়া, বৃষ্টিপাত, তাপমাত্রা, আয়-ব্যয়, জাতীয় আয়, পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনার ব্যয়বরাদ্দ, জন্ম-মৃত্যুর হার, পরীক্ষাতে পাশ-ফেলের হিসাব ইত্যাদি সম্বন্ধে লেখচিত্র প্রায় প্রত্যহই খবরের কাগজের পাতাতেই দেখা যায়। লেখচিত্রটি এক নজর দেখেই এর আভ্যন্তরীণ বক্তব্যটুকু পরিষ্কার ভাবে বোঝা যায়। এই পৃথিবীতে বিভিন্ন দিকে প্রতিনিয়ত কোন-না-কোন পরিবর্তন হচ্ছে। সেই পরিবর্তনের রূপটিকে যখন চিত্রের মাধ্যমে ফুটিয়ে তোলা সম্ভব হয়, তখনই সেই পরিবর্তন সম্বন্ধে একটা স্পষ্ট ধারণা লাভ করা সম্ভব।

লেখচিত্র প্রথম কে বা কারা আবিষ্কার করেন, সে বিষয়ে মতবিরোধ আছে। অনেকে বলেন, লেখচিত্র Descartes-ই প্রথম আবিষ্কার করেন। আবার অনেকে বলেন, গ্রীকরা তাঁর বহু পূর্বেই এই সম্বন্ধে কিছু কিছু ধারণা অর্জন করেছিলেন, কিন্তু বীজগণিত সম্বন্ধে তাঁদের জ্ঞান সীমিত ছিল বলে তাঁরা বেশীদূর অগ্রসর হতে পারেননি।

বীজগণিতের মূল উদ্দেশ্য হল **বিশ্লেষণ** ও **সামান্যীকরণ**। লেখচিত্রের সাহায্যে এই দু'টি উদ্দেশ্যই বিশেষভাবে সাধিত হয়। লেখচিত্রের সাহায্যে অনেকগুলি দৃষ্টান্ত বা ঘটনার থেকে সামান্যীকরণের মাধ্যমে একটি নিয়ম আবিষ্কার করা সম্ভব।

প্রত্যেকটি মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের পাঠ্যক্রমে লেখচিত্রকে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এর পশ্চাতে অবশ্য যথেষ্ট যুক্তিসঙ্গত কারণ আছে। এর মধ্যে যে কারণগুলি প্রধান কারণ বলে মনে করা হয়, সেগুলির উল্লেখ করা হল।

১। লেখচিত্র মূর্ত ও বাস্তব। এর ফলে বীজগণিতের প্রয়োগ কেবলমাত্র যান্ত্রিক স্তরেই সীমাবদ্ধ থাকে না। তাছাড়া লেখচিত্রের সাহায্যে কোন তথ্য বা বিবৃতির সামান্যীকরণ করা সম্ভব। এক কথায় লেখচিত্র বীজগণিত তথা গণিত শাস্ত্রকে অবাস্তব পর্যায় থেকে বাস্তব পর্যায়ে উন্নীত করে।

২। লেখচিত্রের ব্যবহার সার্বজনীন প্রকৃতির। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ও বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন লেখচিত্র ব্যবহার করা হয় এবং লেখচিত্রের উপলব্ধি সাধারণ জ্ঞান ব্যবহারের পর্যায়ে এসে গেছে।

৩। লেখচিত্রের সাহায্যে কোন বিবৃতিকে সংক্ষেপে অথচ পরিষ্কারভাবে প্রকাশ করা সম্ভব।

৪। গণিতের যে সমস্ত অংশ জটিল বা অমূর্ত, লেখচিত্রের সাহায্যে সেগুলির একটি বাস্তব ও মূর্ত রূপ চোখের সামনে পরিষ্কারভাবে তুলে ধরা সম্ভব।

৫। লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার বা সমীকরণের সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা সম্ভব। সাধারণভাবে যে সমস্ত সমস্যার সমাধান করা অত্যন্ত জটিল বলে মনে হয়, লেখচিত্রের সাহায্যে সেই সমাধান অপেক্ষাকৃত সহজে করা সম্ভব।

৬। লেখচিত্রই হল উচ্চতর গণিতের ভিত্তি স্বরূপ।

৭। লেখচিত্রের সাহায্যে সহজেই ছাত্রদের মনোযোগ আকর্ষণ করা সম্ভব।

৮। মনোবিজ্ঞান বলে—ছাত্ররা যত বেশী ইন্দ্রিয় ব্যবহার করবে, জ্ঞান তত পরিপক্ক হবে। লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় ছাত্ররা কান, চোখ, হাত ব্যবহার করে। ফলে তাদের জ্ঞান অর্জনের পথে যথেষ্ট সাহায্যই তারা পেয়ে থাকে।

৯। চোখে দেখে ও কানে শুনে যে জ্ঞান অর্জিত হয়, সেই জ্ঞানই স্থায়ী হয়। লেখচিত্রে কোন-না-কোন ছবি থাকে বলে পরবর্তীকালে তা মনে করা সহজ হয়।

১০। একটি রাশির পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপর রাশির কি রকম পরিবর্তন হয়, তা লেখচিত্রের সাহায্যে জানা যায়। দু'টি সম্বন্ধযুক্ত রাশি কিভাবে পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তাও জানা যায় লেখচিত্রের সাহায্যে।

১১। প্রদর্শনীর (display) কাজেও লেখচিত্র ব্যবহার করা সম্ভব। নীরস তথ্য বা সংখ্যাকেও লেখচিত্রের সাহায্যে সরস ও আকর্ষণীয় করে তোলা সম্ভব।

১২। কোন তথ্য, ঘটনা বা সংখ্যা সম্বন্ধীয় ফল উপলব্ধির ক্ষেত্রে লেখচিত্র যথেষ্ট সময় বাঁচায়।

১৩। লেখচিত্র সৌন্দর্যানুভূতি জাগ্রত করে।

১৪। গণিত যে একটি অবিচ্ছিন্ন বিষয় এবং এর বিভিন্ন অংশের মধ্যে যে সঙ্গতি আছে, তা লেখচিত্রের সাহায্যেই উপলব্ধি করা সম্ভব।

সংক্ষেপে বলা যেতে পারে যে, লেখচিত্রের সাহায্যে খুব সহজে এবং সার্থকভাবে

তথ্য উপস্থাপিত করা, তুলনামূলক বিচার করা এবং বিভিন্ন জাতীয় সম্বন্ধ তথা সহ-সম্বন্ধ প্রকাশ করা সম্ভব। কল্পনা শক্তির যথেষ্ট ব্যবহার, সৃজনীশক্তির মুক্ত প্রয়োগ, গণিতে উৎসাহব্যঞ্জক আগ্রহ সৃষ্টি এবং মূল ধারণাগুলির জ্ঞানমূলক উপলব্ধি এ সমস্তের বাধাহীন সুযোগ পাওয়া যায় লেখচিত্রের মাধ্যমে। এইজন্যই পাঠক্রমে লেখচিত্রের স্থান এত গুরুত্বপূর্ণ।

লেখচিত্র কখন শুরু করা যেতে পারে ? :—সাধারণতঃ সপ্তম শ্রেণী থেকেই লেখচিত্র শেখানো যেতে পারে। তবে এই সময় দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত এবং সুপরিচিত তথ্য নিয়েই লেখচিত্র অঙ্কন শুরু করা বাঞ্ছনীয়। শ্রেণীতে ছাত্রদের দৈনিক গড় উপস্থিতি, তাপমাত্রা, বৃষ্টিপাতের পরিমাণ, ছাত্রদের গড় ওজন প্রভৃতির প্রকাশে লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে। প্রথম প্রথম যে লেখচিত্র করানো হবে তা বিচ্ছিন্ন তথ্যধারা (discontinuous series) নিয়ে করানো যেতে পারে। এ সমস্ত ক্ষেত্রে মধ্যবর্তী মাপের কোন প্রশ্ন ওঠে না। অর্থাৎ অনুভূমিক রেখার (horizontal) উপর কোন মাপ নেবার প্রশ্ন এখানে থাকে না। ঐ রেখার উপর সমান দূরত্বে কয়েকটি বিন্দু নিয়ে সেই সব বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করে পরিমাণগুলি প্রকাশ করতে হয়। এইভাবে বিচ্ছিন্ন লেখচিত্র থেকে ধীরে ধীরে পরিসংখ্যানমূলক (Statistical) লেখচিত্রে যেতে হয়। এই জাতীয় লেখচিত্রে একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করে চলতে হয়। এইভাবে সহজ লেখচিত্র থেকে ক্রমশঃ জটিল লেখচিত্রের দিকে এগিয়ে যেতে হবে এবং তারপর লেখচিত্রের সাহায্যে বীজগণিতের সমস্যার সমাধান করার শিক্ষা ছাত্রদের দিতে হবে। গ্রাফ কাগজের সাহায্যে কিভাবে রেখচিত্র অঙ্কন করতে হয়, তা ছাত্রদের বুঝিয়ে দিতে হবে। আবার কেবলমাত্র লেখচিত্র অঙ্কন করেই তারা যেন ক্ষান্ত না হয়। লেখচিত্রগুলি ব্যাখ্যা করার মতো ক্ষমতা তারা যাতে অর্জন করে, সেদিকেও বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে। শিক্ষক ছাত্রদের বুঝিয়ে দেবেন যে, যদি দু'টি তথ্য বা পরিমাণ পরস্পর নির্ভরশীল হয়, তবে তাদের লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে, যেটি মূলবিন্দুর (origin) ভিতর দিয়ে যাবে। শ্রেণীতে গ্রাফ বোর্ডে শিক্ষক কতকগুলি লেখচিত্র অঙ্কন করে সেগুলির বৈশিষ্ট্য ও অঙ্কন কৌশল ছাত্রদের বুঝিয়ে দিবেন।

লেখচিত্র ও সূত্র (তা সে পাটীগণিত, বীজগণিত বা জ্যামিতি যারই হোক) পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত। এই সম্বন্ধটিকে দু'টি বিভিন্ন দিক থেকে দেখা সম্ভব। কোন একটি লেখচিত্রকে পরীক্ষা করার মূল উদ্দেশ্য হল কোন সূত্র খুঁজে বার করা এবং কোন একটি সূত্র অনুসরণ করে লেখচিত্র অঙ্কন করে সেই অন্তর্নিহিত তথ্যগুলি নির্ণয় করা। দু'টি পরিবর্তনশীল বস্তুর মধ্যে এমন কোন সম্পর্ক থাকতে পারে যাতে একটির কোন মান দেওয়া থাকলে অন্যটিরও একটি স্থির মান পাওয়া সম্ভব। এই সব ক্ষেত্রে এই পরিবর্তনের ধারণা লেখচিত্র থেকেই পাওয়া যায়। আবার লেখচিত্রকে Ready-reckoner হিসাবেও ব্যবহার করা যায়।

কিভাবে লেখচিত্র অঙ্কন শুরু করা যেতে পারে ? :—লেখচিত্রের ব্যবহার

থেকেই ছাত্ররা দেখতে পাবে যে, কোন একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে হলে দু'টি অক্ষরেখা (axis) থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করা প্রয়োজন। প্রথমে লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় অক্ষরেখা দু'টিকে একক দিয়ে চিহ্নিত করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, ওজন যদি হয় তবে কেজিতে, সময় হলে সেকেণ্ড, মিনিট বা ঘণ্টাতে, দূরত্ব হলে কিলোমিটার ইত্যাদি। পরে আর কোন একক না দিয়ে x, y, t, w প্রভৃতি দিয়ে অক্ষরেখাগুলি চিহ্নিত করা যেতে পারে।

কাগজের উপর (গ্রাফ কাগজ হলেই ভালো হয়) দু'টি রেখা লম্বভাবে টেনে অনুভূমিক রেখাকে X এবং তার উপর লম্ব রেখাটিকে Y অক্ষ বলে অভিহিত করা হয়। Y অক্ষ থেকে X অক্ষে সমান্তরাল যে দূরত্ব তাকে বলা হয় **ভুজ**, আর X অক্ষ থেকে Y অক্ষের সমান্তরাল যে দূরত্ব তাকে বলে **কোটি**। X ও Y অক্ষ যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে বলে **মূলবিন্দু**। ধীরে ধীরে ছাত্র বুঝতে পারবে যে X ও Y অক্ষে একটি মান (Scale) ঠিক করে নেওয়া প্রয়োজন। গ্রাফ কাগজের আকৃতি ও তথ্যের বিস্তৃতি অনুযায়ী সেই মানটি ঠিক করতে হবে। এই মান এমনভাবে নিতে হবে যেন মধ্যবর্তী কোন বিন্দুর অবস্থান সহজে নির্ণয় করা যায়। কিছুদিন অভ্যাস করলেই এই মান নির্ণয় করা সহজ হবে। লেখচিত্র অঙ্কনের স্তরগুলিকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যেতে পারে। যেমন :—

১। বাস্তব উদাহরণের লেখচিত্র, যেমন—তাপমাত্রা, জনসমষ্টি, স্কুলের ছাত্রসংখ্যা প্রভৃতির লেখচিত্র।

২। সংখ্যা তালিকার লেখচিত্র, যেমন—1 মিটার কাপড়ের দাম দেওয়া থাকলে 0 মিটার থেকে 10 মিটার পর্যন্ত কাপড়ের দামের লেখচিত্র।

৩। দু'টি পরিবর্তনশীল রাশি x ও y থাকলে $y=3x+2$ বা $y=x^2$ এইজাতীয় সমীকরণে y-এর মান পরিবর্তিত হলে x-এর মান যে হারে পরিবর্তিত হবে তার লেখচিত্র।

৪। বিজ্ঞান বা জ্যামিতির সূত্রাবলীর লেখচিত্র।

৫। সমস্যার সমাধানের জন্য লেখচিত্র।

লেখচিত্র অঙ্কনের সময়ে কতকগুলি দিকে বিশেষ লক্ষ্য রাখতে হবে। যেমন :—

* লেখচিত্র অঙ্কন করে তার ব্যাখ্যা করতে হবে।

* ছাত্রদের একথা মনে রাখতে হবে যে দু'টি সমানুপাতী চলকের (Proportional variables) লেখচিত্র হবে একটি সরলরেখা।

* লেখচিত্র অঙ্কন করার সময় গ্রাফ কাগজ ব্যবহার করা উচিত। X ও Y অক্ষ দু'টি বেশ মোটা দাগ দিয়ে চিহ্নিত করে নিতে হবে।

* বীজগণিতের তথ্য সমন্বিত লেখচিত্র অঙ্কন করার আগে পাটীগণিতের তথ্য সমন্বিত লেখচিত্র অঙ্কন করা বাঞ্ছনীয়।

পরিবর্তনশীল রাশি দু'টির মধ্যে একটিকে 'স্বাধীন চলক' (Independent

variable), অপরটিকে 'অধীন চলক' (dependent variable) ধরে নিতে হয়। স্বাধীন চলকটিকে X অক্ষে বামদিক থেকে ডানদিকে প্রসারিত করে দিতে হয়।

সমস্ত লেখচিত্র মূলবিন্দুর ভিতর দিয়ে যায় না। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে 'ইলেক্‌ট্রিক বিল'। আবার লেখচিত্র যে সবসময় সরলরেখা হয়, তাও নয়। $y=x^2-2x$ এই জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্র বক্ররেখা। তেমনি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক রাশির সাহায্যে লেখচিত্র অঙ্কন করতেও ছাত্রদের শেখাতে হবে। $y=x$ এবং $y=-x$, $x=y$ এবং $x=-y$ এই জাতীয় লেখচিত্র পাশাপাশি করলে তারা লেখচিত্রগুলির স্বরূপ ও গতি (direction and side) বুঝতে পারবে। তারপর লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার সমাধান তারা করতে শিখবে এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধানও তারা করবে।

সরলরেখা জাতীয় লেখচিত্র বিভিন্ন প্রকারের হতে পারে। এর জন্য সমীকরণও বিভিন্ন হবে। প্রকৃত পক্ষে যেটিকে আমরা **স্থানাঙ্ক জ্যামিতি** (Co-ordinate Geometry) বলে থাকি, তার মূল ভিত্তিই হল লেখচিত্র। লেখচিত্রের সাহায্যেই জ্যামিতিকে চোখের সামনে স্পষ্ট করে তুলে ধরা হয়। সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কন করার পর বৃত্ত, পরবলয় (Parabola), অতিপরবলয় (Hyperbola) প্রভৃতির লেখচিত্র অঙ্কন করা শেখাতে হবে। এগুলি প্রথম অবস্থায় সহজ উদাহরণ দিয়ে শুরু করা উচিত। যেমন—বৃত্তের জন্য $x^2+y^2=4$ (কেন্দ্র মূল বিন্দুতে) এই জাতীয় উদাহরণ, পরবলয়ের জন্য $y=x^2$ প্রভৃতি সমীকরণ নেওয়া যেতে পারে। আবার বাস্তব উদাহরণ দিয়েও এগুলি বোঝানো সম্ভব। যেমন—একটি ঢিল ছুঁড়লে তা অনেকটা পরবলয় জাতীয় পথ অতিক্রম করে মাটিতে পড়ে, বা একটি ছেলে দৌড়ে গিয়ে যদি কোন উঁচু জায়গা থেকে লাফ দেয়, তবে অর্ধ-পরবলয় উৎপন্ন হয়।

$xy=k$ জাতীয় সমীকরণের সাহায্যে অতিপরবলয় জাতীয় লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। অতিপরবলয় জাতীয় লেখচিত্র X ও Y অক্ষ দু'টির যথেষ্ট নিকট দিয়ে যায় অথচ তাদের স্পর্শ করে না। সেইজন্য অক্ষরেখা দু'টিকে বক্র লেখচিত্রটির 'অসমপথ' (Asymptote) বলা হয়।

এই সমস্ত লেখচিত্র শেখানোর পর পরিসংখ্যানের স্বাভাবিক বণ্টনের লেখচিত্রটি (Normal Distribution Curve) ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে। এর জন্য শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতা, ওজন বা তাদের পরীক্ষার নম্বরকে তথ্য হিসাবে ব্যবহার করা যেতে পারে। এইভাবে অভ্যস্ত হয়ে গেলে ছাত্ররা সহজ লেখচিত্র অঙ্কন করতেও পারবে, আবার কোন লেখচিত্র (যেমন—Bar-graph, pie-graph প্রভৃতি) দেখে ব্যাখ্যাও করতে পারবে।

॥ খ—বিভাগ ॥

(জ্যামিতি সম্বন্ধীয়)

সংজ্ঞা (Definitions) :—গণিতের বিভিন্ন অংশে বিভিন্ন জাতীয় সংজ্ঞার প্রচলন দেখা যায়। জ্যামিতিতে সংজ্ঞার প্রচলন সবচেয়ে বেশী বলে মনে হয়। এখন প্রশ্ন হতে পারে, সংজ্ঞা কাকে বলে ? এর উত্তরে সংক্ষেপে বলা যেতে পারে—শব্দ, বাক্য বা প্রতীকের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত হয়ে কোন একটি বিবৃতি বা বক্তব্যের অর্থকে যে স্পষ্ট করে তুলতে পারে, তাকেই সংজ্ঞা বলে। সংজ্ঞা হল নিয়মানুগ ও চিরস্থায়ী একটি বর্ণনা। এ ছাড়া আরো বলা যেতে পারে যে সংজ্ঞা নিকটতম বর্গ ও নির্দিষ্ট পার্থক্যের সূচক। কোন একটি পদের সংজ্ঞা দিতে গেলে তার নিকটতম বর্গের বা ঐ শ্রেণীভুক্ত নিকটতম পদের কথা যেমন বলতে হয়, তেমনি আবার নির্দিষ্ট পার্থক্য—যা ঐ শ্রেণীর অন্য পদ থেকে যে পদের সংজ্ঞা নির্ণয় করা হচ্ছে তাকে পৃথক করে চিহ্নিত করে, তার কথাও বলতে হয়। সব সময় মনে রাখতে হবে, সংজ্ঞাতে নিকটতম বর্গের কথাই বলতে হবে। উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে, পঞ্চভুজের সংজ্ঞা দিতে গিয়ে "পাঁচটি বাহুর দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্র" বললে ভুল হবে, কারণ পঞ্চভুজের নিকটতম বর্গ হল বহুভুজ। এর পর দেখতে হবে, সংজ্ঞাতে যে পার্থক্যের কথা বলা হয়েছে তা যেন প্রয়োজনের তুলনায় খুব বেশী না হয়, আবার খুব কমও না হয়। যে পার্থক্যের কথা না বললেই নয়, কেবল সেইটুকুই বলা প্রয়োজন। অবশ্য অনেক সময় বিভিন্ন কারণের জন্য পার্থক্যের সংখ্যা অনেক বেশীই হয়ে যায়। যেমন—আয়তক্ষেত্রের সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এভাবে বলা যেতে পারে যে আয়তক্ষেত্র হল একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ। এখানে প্রত্যেকটি কোণই সমকোণ বলাতে একটু বেশী বলা হয়—কারণ সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলেই বাকী কোণগুলি সমকোণ হবেই।

সমস্ত পদেরই যে সংজ্ঞা দিতে হয়, তা নয়। এমন কতকগুলি পদ আছে যেগুলির সংজ্ঞা দেবার কোন প্রয়োজন নেই। এ জাতীয় পদকে দু'ভাগে ভাগ করা হয়। যেমন—

(১) সাধারণ শ্রেণীবাচক পদ, যথা—গণিতের বিভিন্ন শাখার নাম। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ইত্যাদি পদের কোন সংজ্ঞা বিদ্যালয়ে শেখানোর প্রয়োজন নেই। এগুলি তাদের ক্ষমতার বাইরে।

(২) জ্যামিতি শেখানোর প্রাথমিক স্তরে যে সমস্ত পদের সঙ্গে পরিচিত হওয়া যায়, সেগুলির সংজ্ঞা দেবারও কোন প্রয়োজন নেই। তল, কোণ, বিন্দু, সরলরেখা, দিক বা গতি ইত্যাদির সংজ্ঞা না দিয়ে, বাস্তব উদাহরণের সাহায্যে এগুলির সঙ্গে পরিচিত করে দেওয়া বাঞ্ছনীয়। এর জন্য বিভিন্ন মডেল, চার্ট বা নকশা ইত্যাদি ব্যবহার করা যেতে পারে।

সংজ্ঞা সম্বন্ধে Pasbal (Del' Esprit geometrique) কয়েকটি নিয়মের কথা বলে গেছেন। সেগুলি বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। নিয়মগুলি হল—

(ক) সংজ্ঞাগুলিকে যেন অত্যন্ত সহজভাবে উপস্থাপিত করা না হয়। সংজ্ঞাগুলি ব্যাখ্যা করার জন্য যেন সংজ্ঞার চেয়েও সহজ ভাব ও ভাষা ব্যবহার করার সুযোগ থাকে।

(খ) সংজ্ঞা না দিতে পারলে কোন অনিশ্চিত বা অস্পষ্ট পদ স্বীকার করা চলবে না।

(গ) সংজ্ঞা দিতে গিয়ে এমন সমস্ত পদ ব্যবহার করতে হবে, যেগুলি সুস্পষ্ট এবং যেগুলির নিজস্ব সংজ্ঞা বর্তমান। দ্ব্যর্থ্যবোধক পদ ব্যবহার করা কখনই উচিত নয়।

সংজ্ঞা শিক্ষা দেবার পদ্ধতিটি আবার একরকম নয়। প্রথমে অবলম্বন করতে হবে **আরোহী পদ্ধতি** এবং শেষে **অবরোহী পদ্ধতি**। দৃষ্টান্ত স্বরূপ বলা যেতে পারে ত্রিভুজের সংজ্ঞা দেবার আগে ছাত্রদের সামনে কাগজ বা কাঠের তৈরী বিভিন্ন জাতীয় ত্রিভুজ উপস্থাপিত করা যেতে পারে। নানাবিধ ত্রিভুজ পর্যবেক্ষণ করে তারা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারবে যে প্রত্যেকটি ত্রিভুজে তিনটি কোণ থাকবেই। এইভাবে মুখস্থ না করেও তারা সংজ্ঞাগুলি নিজেরাই তৈরী করতে পারবে।

সংজ্ঞার শিক্ষাগত মূল্য :—

(১) সংজ্ঞা একটি বড় বিবৃতিকে ছোট (অথচ স্বয়ং-সম্পূর্ণ) করে দেয়। ফলে পড়ানোর অনেক সুবিধা হয়।

(২) সংজ্ঞার থেকে যুক্তিযুক্ত শিক্ষণের বা যুক্তি প্রয়োগ করার ক্ষমতা অর্জিত হয়।

(৩) সংজ্ঞার সাহায্যে ছাত্ররা অনেক নূতন পদের সঙ্গে পরিচিত হয়, আবার অনেক পুরাতন পদের নূতন ব্যাখ্যার ফলে পদটি সম্বন্ধে তাদের ধারণা সুস্পষ্ট হয়।

(৪) সংজ্ঞার সঙ্গে সঙ্গে চিত্র থাকে বলে তারা যা পড়ে বা শোনে, তার একটা চিত্ররূপও চোখে দেখে থাকে। ফলে শিক্ষণ পাকা হয়।

তবে প্রথম অবস্থাতে নিয়মানুগ পদ্ধতিতে জটিল সংজ্ঞা মুখস্থ না করানোই ভালো। বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি বিশিষ্ট জিনিস, মডেল ইত্যাদির সাহায্যে বাস্তব জ্ঞান দিলে ফল ভালো হয়।

সংজ্ঞার শ্রেণীবিভাগ :—সংজ্ঞাগুলিকে অনেকে অনেক ভাগে ভাগ করেছেন। কেউ কেউ বলেন সংজ্ঞা হবে তিন রকমের। যথা—(১) প্রাথমিক সংজ্ঞা (২) সাধারণ সংজ্ঞা (৩) বিবিধ সংজ্ঞা। যাই হোক, বিভিন্ন ক্ষেত্রে আমরা যে সমস্ত সংজ্ঞার সঙ্গে পরিচিত হয়ে থাকি, সেগুলি বিশ্লেষণ করলে আমরা সংজ্ঞার শ্রেণীবিভাগ এইভাবে করতে পারি :—

(১) **দার্শনিক সংজ্ঞা :—**বিন্দু, সরলরেখা ইত্যাদির সংজ্ঞা দেওয়া কঠিন। যেমন—বিন্দু সম্বন্ধে বলা হয়, যার কোন আয়তন নেই কিন্তু অবস্থিতি আছে তাকে

বিন্দু বলে। এরকম সংজ্ঞা বোঝাও শক্ত, বোঝানো আরো শক্ত। বিদ্যালয়ে এ-জাতীয় সংজ্ঞা সম্বন্ধে একটা প্রাথমিক জ্ঞান দিলেই যথেষ্ট হবে। বিশ্ববিদ্যালয় স্তরে গিয়ে ছাত্র এর দার্শনিক তত্ত্ব উপলব্ধি করবে।

(২) **ব্যাখ্যামূলক সংজ্ঞা** :—এই সংজ্ঞাগুলি প্রায়ই কোন না কোন পদকে ব্যাখ্যা করে থাকে। যেমন—সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, পূরক ও সম্পূরক কোণ, ব্যাস ইত্যাদি। এগুলি প্রায় '**বিশেষণ**' জাতীয়।

লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, দুরকম বিশেষণ প্রয়োগ করা হয়। যথা—

(ক) **গুণ বা স্থানবাচক বিশেষণ** : যথা—সূক্ষ্ম, স্থূল, বিপরীত ইত্যাদি।

(খ) **পরিমাণ-বাচক বিশেষণ** : যথা- পূরক, সম্পূরক, সর্বসম ইত্যাদি।

৩। **যুক্তিযুক্ত সংজ্ঞা** :—এই জাতীয় সংজ্ঞা দেবার সময় যুক্তির অবতারণা করা হয়। যথা—সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, সামান্তরিক, বর্গক্ষেত্র প্রভৃতি। কেন হচ্ছে? —এ প্রশ্নটাই এখানে বড় হয়। ছাত্ররা সাধারণতঃ এ জাতীয় সংজ্ঞাই মুখস্থ করে থাকে। যুক্তিযুক্ত সংজ্ঞা সর্বত্র একভাবেই প্রকাশ করা উচিত।

৪। **প্রয়োজনাতিরিক্ত সংজ্ঞা** (Redundant Definition) :—অনেক সময় ছাত্ররা কোন সংজ্ঞা বর্ণনা করার সময় প্রয়োজনাতিরিক্ত পদ ব্যবহার করে থাকে। অবশ্য এটা তারা না বুঝেই করে থাকে। সংজ্ঞা দিতে গিয়ে যে সংক্ষিপ্ততম বর্ণনা দেওয়া প্রয়োজন, তার ক্ষমতা তারা তখনও আয়ত্ত করে উঠতে পারে না। নিয়মিত অভ্যাসের ফলেই এ-ক্ষমতা অর্জিত হয়। যাই হোক, ছাত্ররা যদি কোন প্রয়োজনাতিরিক্ত সংজ্ঞা দিয়ে থাকে, তবে তা বাতিল করার কোন প্রশ্ন ওঠে না। ক্রমে ক্রমে তারা সংজ্ঞার সংক্ষিপ্ত রূপ দিতে শিখে যাবে। ছাত্রের দিক থেকে সংজ্ঞার প্রয়োজনীয়তা লক্ষ্য করতে হবে। ছাত্রের নিকট সংজ্ঞাটি সম্পূর্ণ গ্রহণযোগ্য বলে মনে হলে তা গ্রহণ করতে হবে—যদিও শিক্ষকের দিক থেকে লক্ষ্য করলে সংজ্ঞাটি অসম্পূর্ণ বলে মনে হতে পারে।

সংজ্ঞা সম্বন্ধে আর কয়েকটি কথা বলে বক্তব্য শেষ করব। প্রথমটি হল—সংজ্ঞা যেন অপরিবর্তনীয় না হয়। সংজ্ঞার মধ্যে পরিবর্তন, পরিবর্ধন, সংযোজন ও বিয়োজনের কিছু ব্যবস্থা থাকলে ভালো হয়। আর দ্বিতীয় কথা হল—কোন একটি সংজ্ঞা একবার স্বীকৃত হলে সেটি যেন আর সম্পূর্ণরূপে পরিত্যাগ করা না হয়। সংজ্ঞার থেকেই যেন সামান্যীকরণ করার সুযোগ পাওয়া যায়।

স্বতঃসিদ্ধ (Axioms) :—জ্যামিতিতে সম্পাদ্য ও উপপাদ্য ছাড়াও স্বতঃসিদ্ধ নামে আর এক রকম বিবৃতির সাক্ষাৎ পাওয়া যায়। স্বতঃসিদ্ধের উৎপত্তি ও প্রকৃতি সম্বন্ধে তিনটি বিভিন্ন মত পাওয়া যায়। সেগুলি হল—

১। প্রকৃত অভিজ্ঞতা ছাড়াই ধারণাগুলিকে সত্য বলে স্বীকার করা, অর্থাৎ সত্য সেখানে নিজেই প্রকট (A priori truth—Kant)।

২। পরীক্ষামূলকভাবে সত্য প্রমাণ করা (Experimental fact—J. S. Mill) এবং

৩। চলিত রীতি অনুযায়ী সত্য বলে ধরে নেওয়া (Convention—Modern Mathematician)।

বর্তমানে অবশ্য স্বতঃসিদ্ধকে "স্বতঃ প্রমাণিত সত্য" বলে ধরে নেওয়া হয় না। স্বতঃসিদ্ধ বলতে বোঝায় এমন একটি বিবৃতিকে যেটি প্রমাণ না করেও অন্য একটি প্রমাণের সুবিধার জন্য বা তার ভিত্তি হিসাবে ব্যবহার করার জন্য সত্য বলে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এদিক দিয়ে দেখতে গেলে স্বতঃসিদ্ধের সংজ্ঞার সঙ্গে শর্ত (postulate) ও প্রকল্পের (hypothesis) সংজ্ঞার বিশেষ কোন প্রভেদ নেই। প্রভেদ যা আছে তা তাদের ব্যবহারে আছে।

স্বতঃসিদ্ধ কেমন হবে ?—স্বতঃসিদ্ধগুলির অন্ততঃ তিনটি গুণ থাকা বাঞ্ছনীয়। সেগুলি হল—

(ক) স্বতঃসিদ্ধগুলি **সম্পূর্ণ** (complete) হবে।

(খ) এগুলি **সঙ্গতি** (consistent) রক্ষা করা চলবে। এর অর্থ হল একটি স্বতঃসিদ্ধ অপর একটি স্বতঃসিদ্ধকে অস্বীকার করবে না বা তার বিরোধিতা করবে না।

(গ) স্বতঃসিদ্ধগুলি **স্বাধীন** (independent) হবে।

মাধ্যমিক স্কুলে স্বতঃসিদ্ধ :—স্বতঃসিদ্ধ সম্বন্ধে এতক্ষণ যা বলা হল, মাধ্যমিক স্কুলে স্বতঃসিদ্ধের সংজ্ঞা নির্ণয় ও ব্যবহারে তার চেয়েও বেশী কিছু বলা হয়ে থাকে। এখানে স্বতঃসিদ্ধকে "নীতিগতভাবে স্থির বা নিশ্চয়" বলে ধরে নেওয়া হয়। অর্থাৎ মাধ্যমিক স্কুলের ছাত্রদের নিকট স্বতঃসিদ্ধ বলতে এমন একটি নিশ্চিত ও ধ্রুব সত্য বোঝায় যার প্রমাণের কোন প্রয়োজন নেই। এর জন্য ঐ স্তরে এমন সমস্ত বিবৃতিকেই স্বতঃসিদ্ধ বলে শেখাতে হবে, যেগুলির পৃথকভাবে **সত্যতা** ও **যথার্থ্যতা** আছে। ছাত্র স্কুল-জীবনে সাময়িকভাবে সেগুলিকে সত্য বলেই মেনে নিতে পারে (প্রমাণের অপেক্ষা না করেই)। পরে যখন সে এই বিষয়ে আরো বেশী করে পড়াশোনা করবে তখন সামান্যীকরণের মাধ্যমে সে এগুলির সত্যতা উপলব্ধি করতে পারবে। ছাত্ররা হয়তো স্বতঃসিদ্ধ উপস্থাপিত করতে গিয়ে প্রয়োজনের তুলনায় বেশী কিছু বলতে পারে (Redundant)। তাতে কোন ক্ষতি বা দোষ নেই, কিন্তু তারা পরস্পরবিরোধী (Contradictory) স্বতঃসিদ্ধ উপস্থাপিত করলে শিক্ষককে এগিয়ে এসে তাদের ভুল শুধরে দিতে হবে।

অনুশীলনী (Exercise) :—জ্যামিতিতে অনুশীলনের একটি বিশেষ স্থান আছে। কোন উপপাদ্যের সঙ্গে এই অনুশীলনী চলতে পারে (সাধারণতঃ Extra নামে অভিহিত)। এর উদ্দেশ্য হল ছাত্র উপপাদ্যের জ্ঞানটি ঠিকমত প্রয়োগ করতে পারছে কি না, তা লক্ষ্য করা। উপপাদ্যগুলি ছাত্ররা অনেক সময় মুখস্থ করে থাকে। কিন্তু অনুশীলনীর সমাধান করতে হলে তার সেই মুখস্থ বিদ্যা কোন কাজে লাগে না। অর্থাৎ অনুশীলনীর চাপ থাকলে ছাত্ররা মুখস্থ করা থেকে বিরত থাকবে বলেই আশা করা যায়। সাধারণতঃ দেখা যায় ক্লাসে অভ্যাস না করানোর জন্যই হোক, আর অন্য কোন কারণের জন্যই হোক, ছাত্ররা অনুশীলনীগুলির সমাধান করতে চায় না। এ

ব্যাপারে কিন্তু শিক্ষকের দায়িত্ব অনেকখানি। যাই হোক, অনুশীলনীর সমাধান সম্বন্ধে কতকগুলি সাধারণ নির্দেশনা দেওয়া হল। এগুলি অনুসরণ করতে পারলে অনেকটা সুফল পাওয়া যেতে পারে।

১। যতদূর সম্ভব সহজ ও সাধারণ ভাবে চিত্রটি আঁকতে হবে। সমস্যাটি ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় হলে বিষমবাহু ত্রিভুজ আঁকাই বাঞ্ছনীয়।

২। সমস্যাটি বেশ ভালো করে পড়তে হবে। এর অর্থ উপলব্ধি করে কি দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করতে হবে, সে বিষয়ে নিশ্চিন্ত হতে হবে।

৩। সামতলিক চিত্রের শীর্ষে বড় হাতের অক্ষরে নাম আর বাহুগুলির নাম ছোট হাতের অক্ষরে দেওয়া উচিত। যেমন—ABC একটি ত্রিভুজ যার বাহুগুলি a, b ও c ইত্যাদি।

৪। সমস্যাটির সমাধানের প্রমাণ স্থির করতে হলে অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধ, সংজ্ঞা, শর্ত বা পূর্ব প্রমাণিত উপপাদ্যগুলির সাহায্য নিতে হবে। দেখতে হবে, এগুলির মধ্যে কোন্ কোন্টি প্রমাণে সহায়তা করে।

৫। যে যে উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হচ্ছে, সেগুলির উল্লেখ করতে গিয়ে তাদের নম্বরটি উল্লেখ করলে চলবে না। উপপাদ্যটির সাধারণ সূত্রটি সংক্ষেপে বলে নিতে হবে।

এবার ছাত্রদের কি করতে হবে, তা সংক্ষেপে বলা হল। প্রথমেই ছাত্রদের সমস্যাটির ভাষার একটি চিত্ররূপ দিতে হবে। চিত্রটি ঠিকমত আঁকা হলে তার নাম ঠিকভাবে দিতে হবে।

প্রাসঙ্গিক যে সমস্ত তথ্য সমস্যাটিতে দেওয়া থাকবে, সেগুলি যেন চিত্রে ঠিক ভাবে অন্তর্ভুক্ত করা হয়। চিত্রটি যেন বেশ বড় ও পরিষ্কার হয়। সরলরেখা যেন ঠিক সরলরেখাই হয়, কোণের মাপ বা পরিমাণ দেওয়া থাকলে ঠিক সেইমত যেন কোণ আঁকা হয়। চিত্রের নাম যদি দেওয়া থাকে, তবে ঠিক সেই নামই দিতে হবে।

ছাত্ররা নিজেদের মনে কতকগুলি প্রশ্নের অবতারণা করতে পারে। যেমন—

* উপাত্ত (data) থেকে কি জানা যায় ?
* আগেকার জানা কোন্ উপপাদ্য এ বিষয়ে আমাকে সাহায্য করতে পারে ?
* উপাত্তের কোন অংশ বাদ পড়ে নি তো ?

এ ব্যাপারে ছাত্রদের সংশ্লেষণ, বিশ্লেষণ ও তাদের যুগ্ম পদ্ধতি ব্যবহারের শিক্ষা দিতে হবে। সংশ্লেষণ পদ্ধতিতে ছাত্র জানা তথ্য থেকে অজানা সিদ্ধান্তে যেতে পারে। আবার বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে সে অজানা সিদ্ধান্ত থেকেই শুরু করে পিছিয়ে এসে জানা সত্যে পৌছাতে পারে। এর জন্য সে অজানা সিদ্ধান্তটিকে বিশ্লেষণ করে ছোট ছোট ভাগে ভাগ করে সেই ভাগফলগুলির সত্যতা প্রমাণ করতে পারে। অজানার সত্যতা প্রমাণ করার জন্য সে জানা নানা সত্যের সাহায্য নিতে পারে। এর জন্য সমাধানে ছাত্রদের বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্য নেওয়াই উচিত। অবশ্য ফলাফল ঠিকমত লিখে রাখার জন্য সংশ্লেষণ পদ্ধতিটিই ভালো।

জ্যামিতিতে অঙ্কন (Construction) :—জ্যামিতিতে, বিশেষতঃ অঙ্কনের ক্ষেত্রে, কিছু কিছু যন্ত্রপাতি ব্যবহার করার একটা ব্যবস্থা আছে। যেমন-তেমন করে যন্ত্রগুলি ব্যবহার করা চলে না। এর জন্য মনোযোগ ও অভ্যাসের প্রয়োজন। 'অভ্যাসের ফলেই দক্ষতা অর্জিত হয়'—কথাটি জ্যামিতির ক্ষেত্রে অত্যন্ত সত্য। একজন ছাত্র হয়তো কি করে অঙ্কন করতে হয় তার মূলনীতিটি জানে, কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে হয়তো দেখা যেতে পারে সে যন্ত্রপাতির সাহায্যে ঠিকমত অঙ্কন করতে পারছে না। অনভ্যাস, যন্ত্রপাতির সঙ্গে পরিচিত না হওয়া এবং খারাপ যন্ত্রপাতির জন্যও এরকম ঘটনা ঘটা অসম্ভব কিছু নয়। এর জন্য ছাত্রদের ঠিকমত অঙ্কন করার একটা অভ্যাস গড়ে তুলতে হবে।

কিভাবে নিখুঁত অঙ্কনে ছাত্রদের অভ্যস্ত করা যায় বা তাদের সাহায্য করা যায়, সে বিষয়ে শিক্ষকেরও কিছু জানার আছে। এ ব্যাপারে তাঁর ভূমিকা ও করণীয় কাজের একটা তালিকা দেওয়া হল।

১। শিক্ষককে প্রথমেই দেখতে হবে, যেন প্রত্যেকটি ছাত্রের একটি করে ভালো Instrument Box থাকে। এর সঙ্গে যে পেন্সিলটি থাকবে সেটি যেন drawing pencil (Hard বা H) হয়। পেন্সিলটির সীস খুব সরু করে কাটা থাকবে।

২। সমস্ত রেখা যেন বামদিক থেকে ডানদিকে টানা হয়।

৩। রেখাগুলি যেন সমান ঘনত্ব (thickness) বিশিষ্ট হয়। যতদূর সম্ভব সরু ও স্পষ্ট করে রেখাগুলি টানতে হবে।

৪। অঙ্কনের প্রতিটি স্তর যেন পরিষ্কার ও সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা হয়। সেখানে বিভিন্ন জাতীয় রেখা (যেমন—প্রদত্ত রেখা, অঙ্কিত রেখা, প্রমাণের জন্য যোগ করতে হয় বা বাড়াতে হয় এমন রেখা) ব্যবহার করতে হয়, সেখানে ভিন্ন ভিন্ন রেখার জন্য ভিন্ন ভিন্ন ঘনত্ব ব্যবহার করা উচিত। প্রমাণের জন্য যে রেখা যোগ করতে হয় বা বাড়াতে হয়, সে রকম রেখাগুলি 'ডট্ লাইন' দিয়ে অঙ্কন করলেই ভালো হয়। যে সমস্ত রেখা অঙ্কন করা হয় সেগুলি মুছে না ফেলাই উচিত।

৫। ছাত্ররা তাদের অঙ্কনের খাতাটি যেন কোন শক্ত জিনিসের (যেমন—কার্ডবোর্ড) উপর রাখে। তা না হলে অসুবিধা হবে।

৬। কম্পাসের সাহায্যে ছবি আঁকার সময় যেন তার মাথাতে ধরা হয়।

৭। কম্পাসের দু'টি 'পা' যেন সমান হয় এবং কম্পাসের মাথায় কোন 'স্ক্রু' থাকলে সেটি এবং যেখানে পেন্সিল রাখা হয় সেখানকার স্ক্রুটি যেন বেশ ভালো করে আঁটা হয়।

৮। কোন একটি বিন্দুর অবস্থান বোঝাবার জন্য একটি 'ডট' (dot) না দিয়ে দু'টি পরস্পরছেদী সরলরেখার সাহায্যে বোঝানো উচিত।

৯। কোন নির্দিষ্ট মাপের সরলরেখা অঙ্কন করতে হলে স্কেল থেকে ঐ নির্দিষ্ট মাপটি নিয়েই সরলরেখা টানা উচিত নয়। প্রথমে একটি বড় সরলরেখা টেনে নিয়ে তারপর কম্পাসের সাহায্যে নির্দিষ্ট মাপ বিশিষ্ট অংশটি আলাদা করে নিতে হবে।

১০। কোন অবস্থাতেই ছাত্ররা যেন 'আন্দাজ' না করে। অনেক সময় দেখা যায়,

মাপ না করেই ছাত্ররা কোণ আঁকছে, নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরলরেখা টানছে বা সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করছে। এরূপ করা ঠিক নয়। তেমনি সরলরেখা টানার সময় স্কেলের সাহায্য না নিয়েই অঙ্কন করতে গিয়ে তারা সরলরেখাটিকে 'বক্র' করে ফেলে। এ সমস্ত বন্ধ করতে হবে।

অঙ্কনের অংশ :—ছাত্রদের সুবিধার জন্য জ্যামিতির অঙ্কনকে কয়েকটি স্তরে ভাগ করা যেতে পারে। যেমন—

প্রথমতঃ, সম্পাদ্যের বিবৃতি (Statement),

দ্বিতীয়তঃ, যে যে অংশ দেওয়া আছে সেগুলি উল্লেখ করা,

তৃতীয়তঃ, যা দেওয়া আছে সেগুলিকে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা,

চতুর্থতঃ, যা অঙ্কন করতে হবে তার বিবৃতি,

পঞ্চমতঃ, অঙ্কনের জন্য কি কি করতে হবে তা স্থির করা,

ষষ্ঠতঃ, অঙ্কনটি করে, কি করা হল বা কি ভাবে করা হল তার উল্লেখ করা

এবং সপ্তমতঃ, অঙ্কনের প্রমাণ।

অঙ্কনের নিয়মাবলী :—সঠিক অঙ্কন প্রথমেই না করে আগে একটি স্কেচ করে নিলে ভালো হয়। এই স্কেচে যা দেওয়া আছে, সেগুলির উল্লেখ করতে হবে। স্কেচ থেকেই ঠিক করে নিতে হবে প্রথমে কোন্ অংশটির অঙ্কন করতে হবে এবং এর জন্য পূর্বে শেখা কোন্ অঙ্কন পদ্ধতি বা উপপাদ্য সহায়ক হবে। অঙ্কন করার পদ্ধতিটি নির্ণীত হয়ে গেলে স্তরে স্তরে অঙ্কনটি এগিয়ে নিয়ে যেতে হবে। প্রতি ক্ষেত্রে অঙ্কনটি ঠিক হচ্ছে কি না, তা একেবারে শেষে যাচাই না করে প্রত্যেকটি স্তরের শেষে করলেই ভালো হয়। অঙ্কনের জন্য **বিশ্লেষণ পদ্ধতিটি** ব্যবহার করা সবচেয়ে সুবিধাজনক।

প্রকল্পিত অঙ্কন (Hypothetical Construction) :—যখন সুবিধার জন্য চিত্রে কোনো একটি রেখা বা অন্য একটি চিত্র ব্যবহার করা হয়, কিন্তু কি ভাবে ঐ রেখা বা চিত্র অঙ্কন করা হল তা বলা হয় না, তখন ঐ জাতীয় রেখা বা চিত্রের অঙ্কনকে প্রকল্পিত অঙ্কন বলা হয়। জ্যামিতিতে যখন বলা হয়—ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি ত্রিভুজটিকে দু'টি সমান অংশে বিভক্ত করে, তখন এই সমদ্বিখণ্ডক রেখাটির অঙ্কন হয় প্রকল্পিত। প্রকল্পিত অঙ্কন ব্যবহার করা হবে কিনা, এ বিষয়ে অনেকে অনেক জটিল যুক্তি-তর্কের অবতারণা করেছেন। যাই হোক, জ্যামিতি শিক্ষার প্রাথমিক স্তরে এ-জাতীয় অঙ্কন সহজে এবং নিরাপদে ব্যবহার করা চলতে পারে।

জ্যামিতি শিক্ষণ সম্বন্ধে কয়েকটি মন্তব্য :—

১। জ্যামিতির সমস্যা দু'ভাবে উল্লেখ করা যায়। এক হল চিত্রের ভাষারূপ (Reference to a figure), আর একটি হল সম্পূর্ণ ভাষামূলক (verbal)। একটা উদাহরণ দেওয়া হল।

প্রথমটির উদাহরণ : ABC ত্রিভুজে A, B ও C বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলি হল AD, BE এবং CF ; প্রমাণ কর লম্বগুলি সমবিন্দু।

দ্বিতীয়টির উদাহরণ : প্রমাণ কর, কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে তার বিপরীত বাহুর উপর যে সমস্ত লম্ব টানা হয়, সেগুলি সমবিন্দু।

এ দু'টির মধ্যে প্রথমটিই প্রথমে ব্যবহার করা উচিত। ভাষামূলক সমস্যা উঁচু শ্রেণীতে ব্যবহার করা যেতে পারে।

২। কোণের নামকরণ করার সময় সমোচ্চারিত বর্ণ বা জটিল বর্ণ যেন ব্যবহার করা না হয়। যেমন—BCE বা CDE কোণ, কিংবা LXQ বা MYZ কোণ ইত্যাদি। জটিল চিত্রে বা যেখানে একাধিক কোণ ব্যবহৃত হচ্ছে, সে রকম ক্ষেত্রে রঙীন চক্ ব্যবহার করলে ভালো হয়। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দুর সাহায্যে কোণগুলির নামকরণ করা যেতে পারে।

৩। জ্যামিতির অঙ্কন বা প্রমাণে যেন 'রাফ কাজে' উৎসাহ না দেওয়া হয়।

৪। জ্যামিতিক নাম বা পদ (term) ব্যবহার করার সময় ছাত্ররা যেন বেশ বুঝে তা ব্যবহার করে। অনেক সময় দেখা যায়, তারা = চিহ্ন এবং ≡ চিহ্নের মধ্যে পার্থক্যই লক্ষ্য করে না। আবার কোন সম্পাদ্য বা উপপাদ্য লিখে রাখার সময় যেন তার সংক্ষিপ্ত পদ (abbreviations) ব্যবহার না করে।

△ABC ও △DEF ≡ এ ভাবে না লিখে যেন লেখে ABC ও DEF ত্রিভুজ সর্বসম।

৫। চিত্র যেন পরিষ্কার হয় এবং চিত্রের নামকরণ যেন সুস্পষ্ট ভাবে করা হয়। অনেক সময় ছাত্রদের লেখায় E ও F, D ও O ইত্যাদির মধ্যে কোন পার্থক্য খুঁজে পাওয়া যায় না।

৬। নিখুঁতভাবে চিত্র অঙ্কন করতে হলে যন্ত্রের প্রয়োজন আছে সত্য, কিন্তু যন্ত্র না নিয়েও ছাত্ররা যাতে প্রায় নিখুঁত চিত্র অঙ্কন করতে পারে, সেদিকেও বিশেষ দৃষ্টি দেওয়া প্রয়োজন।

৭। প্রমাণ ও চিত্র অঙ্কনে ছাত্রদের যথেষ্ট স্বাধীনতা দিতে হবে। পাঠ্যপুস্তকে যে ভাবে বা যে নামে চিত্র দেওয়া আছে তা পরিবর্তিত করা চলতে পারে এবং পাঠ্যপুস্তকের প্রমাণটি ছাড়াও অন্যভাবে ছাত্র যদি প্রমাণ করতে পারে, তবে কৃতিত্বই তার প্রাপ্য হওয়া উচিত।

৮। প্রতি ছাত্রের জ্যামিতির জন্য পৃথক একটি খাতা থাকা বাঞ্ছনীয়।

৯। চিত্রগুলি যেন সামঞ্জস্যপূর্ণ হয় সেদিক ছাত্রদের লক্ষ্য রাখতে হবে।

১০। সঠিক এবং উপযুক্ত ভাষা ব্যবহার করা জ্যামিতির ক্ষেত্রে একান্ত প্রয়োজন। প্রমাণ বা অঙ্কন বোঝাবার সময় যেন অপ্রয়োজনীয় বাক্য, ব্যাকাংশ, শব্দ বা শব্দাংশ ব্যবহার না করা হয়।

ত্রি-মাত্রিক বা ঘন জ্যামিতি (Three dimensional or Solid Geometry) :—আমরা আমাদের চারিদিকে যে সমস্ত জিনিস দেখি তার বেশীর ভাগই হল ত্রি-মাত্রিক, এগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ছাড়াও গভীরতা বা বেধ আছে। প্রকৃতিকে সম্যকভাবে উপলব্ধি করতে হলে ঘন জ্যামিতি সম্বন্ধে জ্ঞান থাকা একান্ত

প্রয়োজনীয়। গণিতের পাঠক্রমে এইজন্য ঘন জ্যামিতি অন্তর্ভুক্ত করাও শুধু প্রয়োজনীয় নয়, অপরিহার্যও বটে। অবশ্য ছাত্ররা সব বয়সেই ঘন জ্যামিতি যে উপলব্ধি করতে পারবে তা নয়। এর জন্য উপযুক্ত পূর্বজ্ঞান ও পরিণমন প্রয়োজন। অন্যথায় তারা মুখস্থ করার চেষ্টা করবে এবং অপচেষ্টা হলেই বিষয়টিকে কঠিন মনে করে সযত্নে পরিহার করে চলতে শুরু করবে। ছাত্ররা যখন প্রথম জ্যামিতি শেখে তখন বিন্দু, রেখা, তল ইত্যাদি অমূর্ত ধারণাগুলি মূর্ত বস্তুর সাহায্যে উপস্থাপিত করা হয়। ধারণাগুলিকে চিত্র, মডেল ইত্যাদির সাহায্যে রূপায়িত করা হয় বলে ছাত্রদের উপলব্ধি করতে কোন প্রকার অসুবিধা হয় না। কিন্তু ঘন জ্যামিতির চিত্র ছাত্রদের সামনে যথেষ্ট বিভ্রান্তির সৃষ্টি করে থাকে। এর চিত্রগুলি কল্পনার সাহায্যে ভরাট করে নিতে হয়। কাজেই কল্পনা শক্তি যথেষ্ট উন্নত না হলে ঘন জ্যামিতি উপলব্ধি করা অত্যন্ত কঠিন হয়ে পড়ে। এইজন্য একটু উঁচু শ্রেণীতে একটু বয়স বাড়লে তবেই ঘন জ্যামিতি শুরু করা উচিত।

কেবলমাত্র গণিতের ক্ষেত্রেই নয়, অন্যান্য অনেক বিষয়ের ক্ষেত্রেই ঘন জ্যামিতি যথেচ্ছভাবে ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখাতেও ঘন জ্যামিতির প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতির সম্প্রসারিত রূপ থেকেই ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির উদ্ভব হলেও ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির নিজস্ব ক্ষেত্র অনেক বিস্তৃত ও ব্যাপক। ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি শেখার ফলে ছাত্ররা দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতির ধারণাগুলি আরো ভালোভাবে উপলব্ধি করতে পারে। তাছাড়া সামতলিক জ্যামিতির ত্রুটী-বিচ্যুতিগুলিও ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতির কষ্টি পাথরে সংশোধিত হয়ে যায়। প্রকৃতপক্ষে নিয়মমাফিক শেখার আগেই ছাত্র-ত্রি-মাত্রিক আয়তন বা ঘন জ্যামিতির সঙ্গে পরিচিত হয়ে থাকে। সামতলিক জ্যামিতি, পরিমিতি ও বীজগণিতের মাধ্যমেই সে এগুলির সঙ্গে পরিচিত হয়। দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতি থেকে ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতিতে যাওয়া উচিত। ত্রি-মাত্রিক জ্যামিতি পাঠে ছাত্রদের বোধশক্তি ও তাদের সাধারণ জ্ঞান যথেষ্ট বাড়ে। বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখা, প্রধানতঃ পদার্থবিদ্যার সঙ্গে ঘন জ্যামিতির সম্বন্ধ অত্যন্ত ঘনিষ্ঠ।

সামতলিক জ্যামিতির অংশ হিসাবেই ঘন জ্যামিতি শেখাতে হবে। এ রকম ভাবে শেখালে মনোবিজ্ঞানসম্মত পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কোন নূতন জিনিস শেখাতে হলে তা ছাত্রদের পূর্বজ্ঞানের উপর ভিত্তি করেই শেখানো উচিত। প্রথম অবস্থাতে ছাত্রদের সামতলিক জ্যামিতি ও ঘন জ্যামিতির মধ্যে পার্থক্যটি বুঝিয়ে দিতে হবে। এর জন্য বাস্তব উদাহরণের সাহায্যও নেওয়া চলতে পারে, আবার ছাত্রদের চিন্তা, যুক্তি ও বিচারশক্তি প্রয়োগ করার মতো ক্ষেত্র গড়ে তুলবার জন্য উপযুক্ত প্রশ্ন করা যেতে পারে। সামতলিক জ্যামিতির "এক সমতলের" শর্তটি তুলে দিয়ে কতকগুলি প্রশ্ন করলে ভালো হয়। যেমন—"একই সমতলে অবস্থিত নয় এমন দু'টি রেখা হয় সমান্তরাল হবে, নয়তো তারা মিলিত হবে", এ-কথা বলা যায় কিনা? এভাবে তাদের বক্র রেখার একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে এবং রেখার তির্যকগতি (Skewness) বলতে কি বুঝায়, তাও শেখানো যেতে পারে। তেমনি

"কোন সরলরেখার একটি বিন্দুতে মাত্র একটি লম্ব টানা সম্ভব'—এটি ঠিক কিনা, তা ছাত্রদের পরীক্ষা করতে বলা যেতে পারে। এগুলি সম্বন্ধে চিন্তা করতে গিয়ে ছাত্র লক্ষ্য করবে তার সামতলিক জ্যামিতির জ্ঞানের সাহায্যে সে ঠিকমত অগ্রসর হতে পারছে কি না। তখনই তার ঘন জ্যামিতি শেখার প্রয়োজন অনুভূত হবে। বাস্তব উদাহরণ বা মডেলের সাহায্যে ঘন জ্যামিতি সম্বন্ধে কিছুটা জ্ঞান অর্জন করার পর ছাত্রকে সময়, স্থান ইত্যাদি সম্বন্ধীয় বিবিধ ধারণার মাধ্যমে ঘন জ্যামিতির শিক্ষা দেওয়া চলতে পারে।

Veronese প্রমুখ গণিতজ্ঞ সামতলিক ও ঘন জ্যামিতির পাঠ একসঙ্গে দেবার পক্ষপাতী। তাঁদের মতে—এ ভাবে শিক্ষা দিলে ছাত্রদের পক্ষে উপলব্ধি করা সহজ হয় এবং জ্যামিতি যে একটা বিচ্ছিন্ন বিষয় নয়, সে সম্বন্ধেও তাদের ধারণা জন্মে।

পরিশেষে বলা যেতে পারে জ্যামিতি একটি জীবন্ত ও বিকাশমান বিষয়। গতানুগতিক ভাবে মুখস্থ না করে ছাত্র যদি এতে আবিষ্কারকের ভূমিকা গ্রহণ করে, তবে সে যথেষ্ট আনন্দ লাভ করবে। এর জন্য শিক্ষককে কিন্তু প্রথম থেকেই সচেষ্ট হতে হবে। বিদ্যালয়ে জ্যামিতির পাঠ্যক্রম শেষ করে ছাত্র যেন তার অজানা জগতের জ্ঞান ভাণ্ডারের যবনিকা উন্মোচন করতে এগিয়ে যেতে চায়। তবেই শিক্ষকের কৃতিত্ব ও সাফল্যের পরিচয় পাওয়া যাবে।

॥ গ বিভাগ ॥

বিবিধ

নাগরিকতার জ্ঞান অর্জনে পাটীগণিত (Arithmetic of Citizenship) :—বর্তমান যুগে শিক্ষা ও জীবন সমার্থক। শিক্ষাকে এখন আর ভাবী-জীবনের প্রস্তুতি হিসাবে দেখা হয় না। জীবনের প্রতিটি দিকে শিক্ষার আলোকরশ্মি বিচ্ছুরিত হচ্ছে। আমরা আগেই আলোচনা করেছি, গণিত আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কি ভাবে সাহায্য করে থাকে। এখন দেখা যাক, নাগরিকতার জ্ঞান অর্জনে গণিত কিভাবে আমাদের সাহায্য করছে। সাধারণ সভ্য মানুষ হিসাবে গণিতের ব্যবহার বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে অপরিহার্য। স্কুল, কলেজ, পোস্ট-অফিস, ব্যাঙ্ক, ইন্স্যুরেন্স প্রভৃতি ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার এতো ব্যাপক যে নাগরিকতার জন্য গণিত (Arithmetic of Citizenship) নামে একটি কথা প্রায়ই শোনা যায়। গণিতের যে অংশ নাগরিকদের দৈনন্দিন প্রয়োজনে লাগে, সেইগুলি নিয়েই এই গণিতের বিষয়বস্তু গড়ে উঠেছে। বর্তমানে বিষয়টিকে পৃথক ভাবে স্কুলপাঠ্য বিষয় করা চলতে পারে কি না, সে বিষয়ে চিন্তা করা হচ্ছে। দু'শ্রেণীর ছাত্রদের কথা চিন্তা করেই এ-জাতীয় গণিতের অবতারণা করা যেতে পারে। এ রকম ছাত্র হল :—

প্রথমতঃ, যাদের গণিতে কঠিনতর অংশ আয়ত্ত করার মতো ক্ষমতা নেই বা আয়ত্ত করেও লাভবান হতে পারবে না।

দ্বিতীয়তঃ, যে সমস্ত ছাত্র বাণিজ্যিক বৃত্তি (Commercial Career) গ্রহণ করতে চায়। এ-জাতীয় গণিতের পাঠক্রম কেমন হবে, সে বিষয়ে London Mathematical Association-এর মতামত হল—পাঠক্রমে বাণিজ্যিক দিক থেকে গুরুত্বপূর্ণ এবং নাগরিকদের দিক থেকে প্রয়োজনীয়, এমন সমস্ত বিষয় বা অধ্যায় অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। যেমন—

১। স্থানীয় আয়ের হিসাব, ২। জাতীয় আয়ের হিসাব, ৩। সঞ্চয়, বিনিময়, বিনিয়োগ ইত্যাদি, ৪। মূলধন ও শ্রম, ৫। ইনস্যুরেন্স, ৬। আয়ের হিসাবে চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ নির্ণয় ইত্যাদি।

প্রকৃত পক্ষে এ সমস্ত অধ্যায় বেশ চিত্তাকর্ষক। বর্তমানে বহুমুখী বিদ্যালয় প্রতিষ্ঠিত হওয়ার ফলে অনেক বিদ্যালয়েই বাণিজ্য বিভাগ চালু করা হয়েছে। যেখানে বাণিজ্য বিভাগ আছে, সেখানে পাঠক্রমের বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করা যেমন সহজ, বিষয় শিক্ষকের সঙ্গে গণিত শিক্ষকের সম্পর্ক স্থাপন করাও তেমনি সহজ। তেমনি অর্থনীতি, শিক্ষা, সমাজ-বিজ্ঞান, রাষ্ট্রবিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়ে গণিতের বিভিন্ন তথ্য, লেখচিত্র ইত্যাদি ব্যবহার করা চলে।

পরিমিতি (Mensuration) :—পরিমিতিকে বলা যেতে পারে ব্যবহারিক জ্যামিতি। আবার এটিকে জ্যামিতি ও পাটীগণিতের সমন্বয়ও বলা যেতে পারে, কারণ পরিমিতির সমস্যা সমাধানে পাটীগণিতের সাহায্যই বেশী নিতে হয়, যদিও অনেক ক্ষেত্রে বীজগণিতের প্রয়োগ অপরিহার্য। জ্যামিতির মূলসূত্রগুলির সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় হবার পরই তাদের পরিমিতি শেখানো যেতে পারে। ব্যবহারিক জীবনে পরিমিতির গুরুত্ব অনেক বেশী বলেই বর্তমানে কোর গণিতেও এটি অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। পরিমিতিকে কিন্তু পাঠক্রমে জ্যামিতি অংশে না রেখে পাটীগণিত অংশে রাখা হয়েছে-এবং ছাত্ররাও এটিকে পাটীগণিতের অংশ হিসাবে মনে করে থাকে। কিন্তু আমরা আগেই বলেছি, গণিতকে এরকম বায়ু-নিরোধক কক্ষে বিভক্ত করা যায় না। যাই হোক, এখন পরিমিতি কিভাবে শেখানো যেতে পারে, সে বিষয়ে আলোচনা করা যাক।

পরিমিতি শেখানো যেতে পারে দু'ভাবে। এক হল জ্যামিতির সাহায্যে, আর দ্বিতীয়টি হল বীজগণিতের সাহায্যে। প্রথমে জ্যামিতি প্রয়োগ করে কিভাবে পরিমিতি শেখানো যেতে পারে, তা দেখা যাক।

জ্যামিতির পদ্ধতিতে ছাত্রদের সমস্যা সমাধানের সূত্রগুলি খুঁজে বের করতে হয় এবং সমাধানের ক্ষেত্রে জ্যামিতির প্রভাব কতটুকু, তা বিচার করতে হয়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য ছাত্ররা গ্রাফ কাগজে ত্রিভুজ অঙ্কিত করে বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারে। কিন্তু এই পদ্ধতিটি অত্যন্ত দীর্ঘ এবং সার্বজনীন পদ্ধতিও নয়। সেইজন্য ছাত্রদের কোন একটি সূত্র আবিষ্কার করতেই

হয়। ধরা যাক, তারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এই সূত্রটি ব্যবহার করবে। সূত্রটি ব্যবহার করার আগে একটি ত্রিভুজের সাহায্যে a, b, c, s ইত্যাদির ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। ছাত্রদের জ্যামিতির জ্ঞান ও দক্ষতার উপর নির্ভর করে বিভিন্ন জটিল প্রসঙ্গের অবতারণা করা যেতে পারে। অত্যন্ত সহজ সমস্যা বা যে সমস্ত সমস্যার বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান করা সম্ভব সেগুলি এই পদ্ধতির আওতায় পড়ে না। এই পদ্ধতিতে এমন সমস্ত সমস্যাই রাখা হয়, যেগুলির সমাধানের জন্য কোন-না-কোন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করা এবং জ্যামিতির কোন-না-কোন সূত্র প্রয়োগ করা একান্তই প্রয়োজন। পদ্ধতিটি নীচু শ্রেণীতে ততটা উপযুক্ত নয়, কিন্তু উঁচু শ্রেণীতে জ্যামিতির উপপাদ্যগুলির পরিস্ফুটনের জন্য বা পরিমিতি শেখানোর জন্য বেশ উপযুক্ত। অবশ্য যখন পাটীগণিতের মধ্যে পরিমিতি শেখানো হয়, তখন এ পদ্ধতি অনুসরণ করা হয় না।

বীজগণিতের পদ্ধতিতে বিভিন্ন জাতীয় জ্যামিতিক চিত্রের মান নির্ণয় করার জন্য কতকগুলি সূত্র, তত্ত্ব বা তথ্য স্বীকার করে নেওয়া হয়। অবশ্য চিত্র যদি অপেক্ষাকৃত সহজ হয়, তবে ছাত্রদের সূত্রগুলি আবিষ্কার করতে বলা ভালো, কারণ এতে বিভিন্ন বিষয়ের মধ্যে অনুবন্ধ স্থাপন করা সহজ হয়। বীজগণিতের পদ্ধতিতে যে তথ্য বা উপাত্ত দেওয়া হয়ে থাকে, তার সাহায্যে ও সূত্রের মাধ্যমে ফল প্রকাশের উপরই বেশী জোর দেওয়া হয়ে থাকে। এতে ছাত্রদের যেমন ঠিকভাবে হিসাব করার একটা অভ্যাস গড়ে ওঠে, তেমনি পাটীগণিতের বিভিন্ন প্রক্রিয়াগুলি ব্যবহার করার তারা একটা সুযোগ পায়। তা ছাড়া ছাত্ররা দেখতে পায় যে কতকগুলি সাধারণ ফলকে বীজগণিতের প্রতীকের সাহায্যে সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। এই পদ্ধতিতে ছাত্রেরা যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$' এই সূত্রটিকে একটি সাধারণ সূত্র বলে ব্যবহার করতে পারে।

অবশ্য এই পদ্ধতিতে ছাত্রদের কতকগুলি হিসাব, যেমন—ছোট ছোট গুণ, ভাগ, বর্গমূল নির্ণয়, আসন্ন মান নির্ণয় প্রভৃতির ক্ষেত্রে দক্ষতা অর্জন করতে হবে। সমস্যাগুলি এমন ভাবে উপস্থাপিত করতে হবে যাতে ছাত্ররা তাদের বীজগণিতের জ্ঞানের পরিপূর্ণ প্রয়োগ করতে পারে। অবশ্য তারা যাতে যান্ত্রিকভাবে প্রতীকের ব্যবহার ও বীজগণিতের সূত্রের প্রয়োগ না করে জিনিসটি সম্যকভাবে উপলব্ধি করতে পারে, সেদিকেও সবিশেষ দৃষ্টি দিতে হবে।

দৈনন্দিন জীবনে পরিমিতির গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহারিক ও প্রয়োগের জন্যই এটিকে গণিত পাঠক্রমের অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে এর ব্যবহারিক ও প্রয়োগমূলক মূল্য অত্যন্ত বেশী। কতকগুলি বিশেষ আকৃতির জ্যামিতিক বস্তু সম্বন্ধে এটি যেমন ছাত্রদের পরিচিত করে দেয়, তেমনি বিভিন্ন আয়তনের ক্ষেত্রফল, ঘনফল ইত্যাদি নির্ণয় করতে গিয়ে ছাত্ররা জ্যামিতি, বীজগণিত ও পাটীগণিতের মধ্যে একটা সহজ ও স্বাভাবিক অনুবন্ধ খুঁজে পায়। পরিমিতির বিভিন্ন সমস্যার মধ্যে সমকোণী চৌপল (Rectangular parallelopiped), প্রিজম (prism), লম্বা বৃত্তাকার চোঙ (Right-circular

cylinder), পিরামিড (Pyramid) ও লম্বা বৃত্তাকার শঙ্কু (Right circular cone) ইত্যাদির ঘনফল নির্ণয়, ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রভৃতিই উল্লেখযোগ্য। ছাত্রদের সূত্রগুলি জানলেই চলবে কারণ প্রমান উচ্চ গণিতের অন্তর্ভুক্ত। অবশ্য ছাত্ররা সূত্রগুলি মুখস্থ করে এবং সম্পূর্ণ যান্ত্রিক ভাবেই সেগুলি প্রয়োগ করে থাকে। যদি বাস্তব অভিজ্ঞতার মধ্য দিয়ে ছাত্রদের শিক্ষা দেওয়া হয়, তাহলে সুফল পাওয়া যায়।

পরিসংখ্যান (Statistics) :—আমাদের দৈনন্দিন জীবনে পরিমাপ একটি বিশেষ স্থান অধিকার করে আছে। প্রায় প্রতিনিয়তই আমাদের পরিমাপের সাহায্য নিতে হয়। আমরা বিভিন্ন ব্যক্তির উচ্চতা বা ওজন নির্ণয় করি ; বিভিন্ন বস্তু, স্থান বা কালের মাপ গ্রহণ করি। কিন্তু সব সময় বা সব জায়গাতে পরিমাপের এককটি একই থাকে না। কখনও প্রয়োজন গজ-ফুট-ইঞ্চি বা মিটারের, কখনও ব্যবহার করি কিলোগ্রাম, লিটার প্রভৃতি। আবার বুদ্ধি, ক্ষমতা প্রভৃতিও আমাদের পরিমাপের বিষয়বস্তু হয়ে থাকে। এই সমস্ত বিভিন্ন জাতীয় পরিমাপের জন্যই পরিসংখ্যান নামে গণিত শাস্ত্রের নূতন একটি শাখার উদ্ভব হয়েছে।

পরিসংখ্যানকে অনেকে পাটীগণিতের ফলিত রূপ বলে আখ্যা দিয়ে থাকেন কিন্তু এভাবে বললে পরিসংখ্যানকে অনেক সংকুচিত করে দেওয়া হয়। পরিসংখ্যানে পাটীগণিতের প্রথম চারটি নিয়মের ব্যাপক ব্যবহার করা হয় ঠিকই, কিন্তু কেবল সেই জন্যই একে ফলিত পাটিগণিত বলা ঠিক নয়। এটিকে আমরা গণিত শাস্ত্রের একটি নূতন শাখা বলে মনে করে নিতে পারি। এই নূতন শাখাটি কিন্তু সম্ভাবনার নীতির উপর প্রতিষ্ঠিত। সেখানে আমরা খুব বড় বা অসুবিধাজনক আকারবিশিষ্ট সংখ্যার সম্মুখীন হই, তখন তাদের পরিমাণগত বিশেষত্ব স্থির করার জন্য কোন পদ্ধতি নির্ণয় করা এবং সেই পদ্ধতিটি উপযুক্ত ও যথেষ্ট কি না তা নির্ণয় করা হল পরিসংখ্যানের কাজ। যখন কোন একটি বিশেষ ঘটনা বা অনেকগুলির ঘটনার বিভিন্ন তথ্য (অঙ্ক, সংখ্যা ইত্যাদি) দেওয়া থাকে, তখন পরিসংখ্যান এই সমস্ত তথ্যগুলি থেকে ঘটনাটির বা ঘটনাগুলির পরিমাণগত বৈশিষ্ট্য নির্ধারণ করে দেয়। এই নির্ধারণ করার ব্যাপারে অবশ্য সম্ভাবনার নীতিটি অনুসরণ করা হয়। অবশ্য পরিসংখ্যানের সঠিক ব্যবহারের জন্য যে সমস্ত মূলনীতি বা তত্ত্ব জানা প্রয়োজন, সেগুলি বেশ কঠিন ও অমূর্ত বলে বিদ্যালয়ে বিষয়টি অন্তর্ভুক্ত করা যুক্তিযুক্ত নয়। আবার দৈনন্দিন জীবনেও পরি-সংখ্যানের সহজ অংশগুলি (বর্ণনামূলক পরিসংখ্যান) শেখানোর ব্যবস্থা করা হয়েছে। কোন্ বৎসর ফসল কেমন হবে, সারা বৎসরের গড় বৃষ্টিপাত, ভোটে কে জিতবে, পরীক্ষাতে পাশের হার কি রকম হতে পারে এগুলি এখন ছাত্রদের সাধারণ জ্ঞানের পরিধির মধ্যে পড়েছে। এগুলির সদুত্তরের জন্য পরিসংখ্যানের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। তা ছাড়া বর্তমানে শিক্ষা হচ্ছে জীবনকেন্দ্রিক। কাজেই ছাত্রদের এমন ভাবে তৈরী করতে হবে যাতে তারা ভবিষ্যতে উপযুক্ত নাগরিক হিসাবে পরিচিত হতে পারে।

যাই হোক, এখন দেখা যাক পরিসংখ্যান কিভাবে শুরু করা যেতে পারে। পাটিগণিতের প্রথম চারটি নিয়ম এবং সেগুলির বিস্তৃত ও ব্যাপক ব্যবহারই হল

পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে সংখ্যাবাচক হিসাব-নিকাশের মূল ভিত্তি। সেদিক দিয়ে দেখতে গেলে পরিসংখ্যান পাটিগণিতের সাহায্যেই শুরু করা যেতে পারে। এভাবে শুরু করলে অবশ্য পরিসংখ্যানকে পাটিগণিতের ফলিত রূপ হিসাবেই ধরে নেওয়া হয়। এর কতকগুলি সুবিধাও আছে। পরিসংখ্যানে খুব বড় বড় সংখ্যা বা রাশি নিয়ে কাজ করতে হয় বলে ছাত্রদের পরিষ্কার ভাবে ও ধৈর্য সহকারে কাজ করার একটা সু-অভ্যাস গড়ে ওঠে। তাছাড়া পাটীগণিতে শেখা অনেক জিনিস তাদের প্রায়ই ব্যবহার করতে হয় বলে পাটীগণিতের চর্চা আরো বেশী হয়। অর্থাৎ পরিসংখ্যান শেখার ফলে সংখ্যামূলক হিসাব-নিকাশে ছাত্ররা বেশ পারদর্শী হয়ে থাকে। পরিসংখ্যান শেখার জন্য ছাত্রদের কতকগুলি পারিভাষিক শব্দের সঙ্গে পরিচিত হতে হয়। এই শব্দ বা পদগুলি কিন্তু বেশ পরিষ্কার ভাবে ব্যাখ্যা করে দেওয়া প্রয়োজন। এর জন্য ছাত্রদের দৈনন্দিন জীবনের বাস্তব উদাহরণের সাহায্য নেওয়া উচিত। পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত পদের মধ্যে Population হল একটি। কিন্তু এখানে Population বলতে জনসমষ্টি বোঝায় না। যা বোঝায় তা হল সাধারণ বৈশিষ্ট্যপূর্ণ কতকগুলি বস্তুর সমষ্টি, যে বৈশিষ্ট্যটিকে আবার সংখ্যাবাচক মান দিয়ে প্রকাশ করা যায় এবং ঐ বৈশিষ্ট্যটি পর্যালোচনা করাই হল পরিসংখ্যানের কাজ। Population এবং তার বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে ছাত্রদের উপলব্ধি আরো পরিষ্কার করার জন্য তাদের কতকগুলি প্রশ্ন করা যেতে পারে বা কতকগুলি সহজ উদাহরণের উল্লেখ করা যেতে পারে। যেমন—যদি কোন একটি স্থানের সারা বৎসরের বৃষ্টিপাতের পরিমাণ পরিমাপ করতে হয় তবে Population হল বৎসারর সমস্ত দিনগুলি, আর বৈশিষ্ট্য হল প্রতিদিনের বৃষ্টিপাতের পরিমাণ। তেমনি ভাবে অন্যান্য পদ, যেমন ফ্রীকোয়েন্সী, বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন স্কোর, সারিবিন্যাস প্রভৃতি, ছাত্রদের শেখানো যেতে পারে। Population-এর পরিসংখ্যানগত মান নির্ণয়ের জন্য তাদের কিছু কিছু সূত্র শেখাতে হবে। Mean, Median, Mode, Standard Deviation ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা অর্জন করাবার জন্যও বাস্তব উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। সহজ দৃষ্টান্ত নিয়ে অগ্রসর হতে পারলেই ভালো হয়। Mean শেখাবার জন্য ছাত্রদের গণিতের 'গড়' সম্বন্ধে জ্ঞানের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। তেমনি একটি স্কেলের সাহায্যে Median ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। আবার শ্রেণীর ছাত্রদের মধ্যে কোন্ রঙের জামা বেশী ছাত্র পরে আসে, তার দৃষ্টান্ত দিয়ে Mode সম্বন্ধে একটা ধারণা দেওয়া যেতে পারে। পরিসংখ্যানে বিভিন্ন জাতীয় লেখচিত্র ব্যবহার করা হয়। এ সমস্ত লেখচিত্র আবার দৈনন্দিন জীবনেও অনেক ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। ছাত্রদের এই লেখচিত্রের সঙ্গেও সুপরিচিত করে দিতে হবে। তারা লেখচিত্রগুলি বেশ ভালো ভাবে পর্যবেক্ষণ করবে, আবার নিজেরা প্রয়োজনমত বিভিন্ন লেখচিত্র অঙ্কনও কববে। এভাবে ছাত্রদের পরিসংখ্যানের সহজ নিয়মগুলি শেখানো যেতে পারে।

ভাষা হিসাবে গণিতের স্থান (Mathematics as a Language) :— বিজ্ঞানের, বিশেষ করে পদার্থ-বিদ্যা বা যন্ত্রবিদ্যার কোন বই খুললে প্রথমেই যে জিনিসটি

চোখে পড়ে তা হল গাণিতিক প্রতীকের যথেচ্ছ ব্যবহার। পদার্থ-বিদ্যার বা অন্য কোন ভৌত বিজ্ঞানের কোন নিয়ম যদি গড়ে তুলতে হয়, তবে গণিতের সাহায্য না নিয়ে কোন উপায় নেই। আমরা সাধারণতঃ যে ভাষায় কথাবার্তা বলে থাকি সে ভাষাতে ঐ সমস্ত নিয়ম প্রকাশ করা যায় না। পদার্থ-বিদ্যার কোন কোন অংশ পুরোপুরি প্রতীকের সাহায্যেই ব্যাখ্যা করা হয়ে থাকে এবং সেই অংশগুলি লিখিত ভাষার সাহায্যে প্রকাশ করা মোটেই সম্ভব নয়। কাজেই দেখা যাচ্ছে, গণিতের প্রতীকগুলি প্রথমে যদিও নিছক প্রতীক হিসাবেই ব্যবহৃত হয়েছিল, পরবর্তীকালে সেগুলি ভাষার যে সমস্ত গুণ থাকা প্রয়োজন তাও অর্জন করেছিল।

অবশ্য অন্য দৃষ্টিভঙ্গী দিয়ে বিচার করলে গণিতকে একটি ভাষা মনে করা যেতে পারে। একটি জটিল লিখিত বক্তব্যকে গণিতে প্রতীকের সাহায্যে অত্যন্ত সহজভাবে প্রকাশ করা সম্ভব। আবার লিখিত বক্তব্য অনেক সময় অস্পষ্ট বা দ্ব্যর্থক হতে পারে। এমন কি, বিভিন্ন পাঠক বক্তব্যটির বিভিন্ন অর্থ করে থাকতে পারে। কাজেই দেখা যাচ্ছে, লিখিত বক্তব্যের সাহায্যে আমরা নির্ভুল, সংক্ষিপ্ত ও সার্বজনীন কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি না। অথচ বিজ্ঞানে এই জিনিসগুলি অপরিহার্য। কিন্তু ভাষার বদলে গণিতের প্রতীক ব্যবহার করলে উপরের সব দোষ দূর করা সম্ভব হয়। ভাষার যে গুণ নেই গণিতের প্রতীকের কিন্তু সে গুণ আছে। কাজেই গণিতকে আমরা উন্নততর ভাষা বলতে পারি।

আর এক দিক থেকে জিনিসটা দেখা যেতে পারে। বর্তমান বিজ্ঞানের অভূতপূর্ব সাফল্যের ফলে নব নব দিগন্ত আমাদের সামনে উদ্ভাসিত হচ্ছে। এগুলির সঙ্গে পূর্বে আমাদের কোন পরিচয় তো ছিলই না—এগুলির কথা আমরা চিন্তা করতেও পারিনি। ভাষা নির্ভর করে বাস্তব অভিজ্ঞতার উপর। অভিজ্ঞতা অর্জনের জন্য আমরা কেবলমাত্র পঞ্চেন্দ্রিয়ের উপর নির্ভর করে থাকি বলেই আমাদের ভাষা তত সমৃদ্ধ হতে পারে না। কাজেই নতুন যে সমস্ত পরিস্থিতির উদ্ভব হয় আমরা সেগুলিকে ভাষার সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি না। এই সমস্ত পরিস্থিতি ব্যাখ্যা করার জন্য এগুলির সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত বিমূর্ত গাণিতিক প্রতীকের সাহায্য নিতে হয়। কাজেই এখানেও দেখা যাচ্ছে গণিত একটি ভাষার মতোই কাজ করছে। এর জন্য আমরা প্রথম দিকেই বলেছি গণিত একটি ভাষা ঠিকই, কিন্তু তা হল ভাষার সংক্ষিপ্ততম রূপ। একে ভাষার Short-hand বলা যেতে পারে।

মূর্ত গণিত (Place of concretisation in Mathematics) :—অনেকের ধারণা গণিত একটি অমূর্ত বিষয়। দর্শন শাস্ত্রের মতো গণিত অমূর্ত ধারণা নিয়ে আলোচনা করে। ফলে ছাত্ররা তো বটেই, অনেক শিক্ষক বা শিক্ষিত ব্যক্তিও গণিত সম্বন্ধে একটা ভুল ধারণা পোষণ করে থাকেন। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে গণিতকে মূর্ত করার যথেষ্ট সুযোগ আছে। পাটীগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি প্রভৃতি বিভিন্ন শাখাতে মূর্ত বিষয়ের সাহায্য নিয়ে অগ্রসর হওয়া সম্ভব। এ সম্বন্ধে পূর্বেই ব্যাপক আলোচনা

করা হয়েছে। গণিতে বিভিন্ন প্রদীপন, বাস্তব-অভিজ্ঞতা-নির্ভর জ্ঞান, দৈনন্দিন জীবনে গণিতের প্রয়োগ, ম্যাপ, লেখচিত্র প্রভৃতি অনেকের মাধ্যমে অমূর্ত গণিতকে মূর্ত করে তোলা যায়, যাকে অবাস্তব মনে করা হ'ত, তাকেই বাস্তবে রূপায়িত করা সম্ভব হয়।

কয়েকটি বাস্তব উদাহরণ দিলে ব্যাপারটা পরিষ্কার হবে।

উদা: ১। ধরা যাক শিক্ষার্থীকে বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির সম্পর্কটি বোঝাতে হবে। এর জন্য প্রথমে 7 cm ব্যাস বিশিষ্ট একটি কার্ডবোর্ডের বৃত্ত তৈরী করতে হবে। এবার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তটিকে একটি সরলরেখায় একবার পূর্ণ আবর্তন করাতে হবে। এই পথটির দৈর্ঘ্য শিক্ষার্থীদের মাপ করতে বলা হবে। দেখা যাবে, এই দৈর্ঘ্য 22 cm হয়েছে। বৃত্তের পরিধিকে বক্ররেখা বরাবর না মেপে এইভাবে সরলরেখা ধরে মাপ করা অধিকতর সহজ। পরীক্ষাতে দেখা গেল, পরিধি : ব্যাস :: 22 : 7 বা $3\frac{1}{7}$। বিভিন্ন আকারের বৃত্ত নিয়ে এই পরীক্ষাটি চালিয়ে একটি নিয়মই জানা যাবে আর তা হল—পরিধি : ব্যাস :: 22 : 7 যা থেকে $\pi=\frac{22}{7}$ বা 3 14159 নির্ণীত হয়ে যায়।

উদা: ২ বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসের বর্গের অনুপাত নির্ণয়।

যেহেতু বৃত্তের ক্ষেত্রফল দ্বিমাত্রিক, সেইজন্য বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে ব্যাসের বর্গের অনুপাত নির্ণয় করতে হবে।

বিভিন্ন ব্যাসবিশিষ্ট কয়েকটি কার্ডবোর্ডের বৃত্ত তৈরী করতে হবে এবং প্রত্যেকটি ব্যাসের বর্গও কার্ডবোর্ড দিয়ে তৈরী করতে হবে। এখন এক-একটি বৃত্ত ও তার ব্যাসের বর্গটি ওজন করলে দেখা যাবে প্রতি ক্ষেত্রে—

বৃত্তের ওজন : ব্যাসের বর্গের ওজন :: 11 : 14 (আসন্ন)

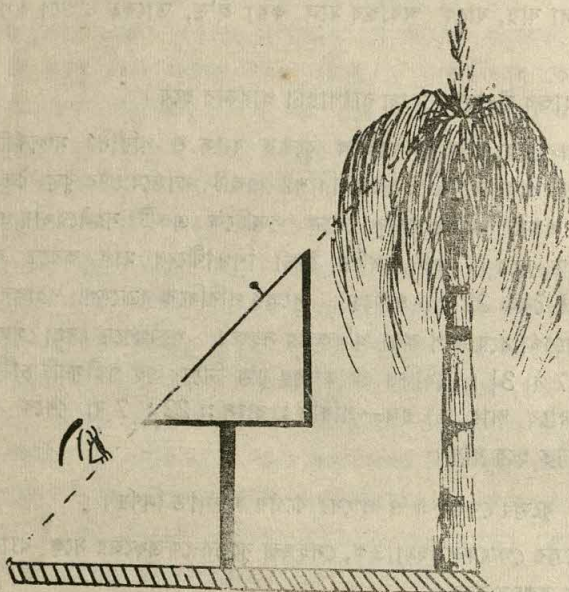
∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল : ব্যাসের বর্গ :: 11 : 14

এখন $11 : 14=\frac{11}{14}$ বা $\frac{22}{28}=\frac{22}{4\times7}$ বা $\frac{\pi}{4}$ (প্রায়)

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল : ব্যাসের বর্গ :: π : 4.

উদা : ৩। গাছের উচ্চতা পরিমাপক যন্ত্র নির্মাণ।

বেশ মসৃণ কাঠের একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরী করে সেটিকে একটি কাঠের স্ট্যাণ্ডে বসাতে হবে। ত্রিভুজের ভূমি মাটির তলের সঙ্গে সমান্তরালভাবে থাকবে। অতিভুজের উপরের দিকে একটি ছোট পিন থাকবে। যে গাছের উচ্চতা মাপ করতে হবে তার থেকে দূরে যন্ত্র ট এমনভাবে মাটির উপর বসাতে হবে যেন অতিভুজের নীচে চোখ রাখলে যে কাল্পনিক সরলরেখা পাওয়া যাবে সেটি ঠিক গাছের মাথাটি স্পর্শ করে। ঐ অবস্থানে যন্ত্রটি রেখে পিনটিতে সুতো বেঁধে অতিভুজ বরাবর সোজাভাবে সেটিকে মাটিতে নামিয়ে আনতে হবে। যে বিন্দুতে সুতোটি মাটি স্পর্শ করবে

সেখান থেকে গাছের গোড়া (সঠিকভাবে—কাণ্ডের মধ্যবিন্দু) পর্যন্ত দূরত্বটিই হবে গাছটির উচ্চতা।

গণিতের বিনোদনমূলক কাজ (Recreational Activities) :—গণিতকে অনেকে একটি নীরস বিষয় বলে মনে করে থাকেন। কিন্তু গণিতে বিনোদনমূলক কাজের যথেষ্ট সুযোগ আছে এবং সার্থকভাবে অবসর সময় যাপনের জন্য গণিতের সাহায্য নেওয়া চলতে পারে। গণিতে বিভিন্ন ধাঁধা বা মজার দৃষ্টান্ত দেখা যায়। সবগুলি উল্লেখ করা সম্ভব নয় বলে মাত্র কয়েকটির উল্লেখ করা হয়।

কতকগুলি মজার দৃষ্টান্ত :—

(ক) $\frac{1}{2}$-এর $\frac{1}{2}$কে $\frac{1}{2}$ দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{2}$-ই হবে।

(খ) কোন একটি পূর্ণ সংখ্যা থেকে তার অঙ্কগুলির যোগফল বাদ দিলে বিয়োগফলটি 9 দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য হবে।

(গ) কতকগুলি সংখ্যা এমন হয়, যেগুলির যোগফল ও গুণফল একই হয়। যেমন—

2 আর 2, 3 আর $\frac{3}{2}$, 4 আর $\frac{4}{3}$, 5 আর $\frac{5}{4}$ ইত্যাদি।

কতকগুলি মনে রাখার মতো সংখ্যা :—

(ক) তিনবার 5 ব্যবহার করে 1 লিখতে হবে।

$$5^{5-5}=5^{\circ}=1$$

(খ) তিনবার 7 ব্যবহার করে 0 লিখতে হবে।

$(7-7)^7$ বা $\frac{7-7}{7}$

(গ) পাঁচবার 3 ব্যবহার করে 37 লিখতে হবে।

$33+3+\frac{3}{3}$

(ঘ) পাঁচবার 3 ব্যবহার করে 10 লিখতে হবে।

$\frac{(3\times3\times3)+3}{3}$

কতকগুলি প্রতারণা (fallacy)

প্রমাণ করতে হবে $4=5$

(ক) সমাধান : $-20=-20$

or $16-36=25-45$

or $4^2-36=5^2-45$

[উভয় দিকে $\frac{81}{4}$ যোগ করে]

$4^2-36+\frac{81}{4}=5^2-45+\frac{81}{4}$

or $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$

or $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$

or $4=5$.

ধাঁধা :—

কোন একটি লোককে যদি মাসের ১ তারিখে ১ পয়সা, পরের দিন দ্বিগুণ, তার পরের দিন আগের দিনের দ্বিগুণ, এই হিসাবে দেওয়া হয়, তবে মাসের শেষে তাকে কত দিতে হবে। (৩০ দিনে মাস)

[পাঠক-পাঠিকাদের অনুরোধ করা হচ্ছে তাঁরা যেন দয়া করে উত্তরটি গ্রন্থকারকে পাঠিয়ে দেন।]

বুদ্ধির ব্যবহার করতে হবে এমন প্রশ্ন :—

(ক) সম্বন্ধ নির্ণয় :—

3-এর সঙ্গে 9-এর যে সম্বন্ধ 6-এর সঙ্গে সে সম্বন্ধ (12, 18, 24, 36)

(খ) অপ্রয়োজনীয় সংখ্যা বাদ দেওয়া :—

15, 14, 13, 29, 16.

(গ) সংখ্যা সাজানো :—

5634, 5364, 6435, 6543, 5463 এইগুলি মনে মনে পর্যায়ক্রমে সাজাতে হবে এবং যে সংখ্যাটি মাঝখানে থাকবে বলে মনে হবে তার নীচে দাগ দিতে হবে।

(ঘ) লুপ্ত সংখ্যা উদ্ধার :—

10,—, 15, 16, 20, 21,—, 26, 30.

(ঙ) সারি সম্পূর্ণ করা :—

2, 5, 8, 11, —, —.

(চ) সত্য/মিথ্যা নির্ণয় :—

500-এর 5%=25 সত্য/মিথ্যা

$x^{\circ}=0$ সত্য/মিথ্যা

(ছ) সাধারণ জ্ঞান পরীক্ষা করা :—

দুই-তৃতীয়াংশের অর্ধেকের দ্বিগুণ কত হবে ?

একজন লোক যদি 10 মিনিটে স্টেশনে পৌছাতে পারে, তবে একসঙ্গে হাঁটছে এমন 10 জন লোকের কত সময় লাগবে ?

একজন ছেলের 16 বছরের মধ্যে মাত্র 4 বার জন্মদিন পালন করা হয়েছে, অথচ কোন জন্মজিন বাদ পড়েনি। তার জন্মদিন কবে ?

সত্য তালিকা (Truth Table) :—সত্য তালিকা নতুন পাঠক্রমের এক উল্লেখযোগ্য অন্তর্ভুক্তি। Symbolic Logic এ আমরা বচন বা Proposition এর সত্যমানের উল্লেখ পাই। এই সত্যমান হ'ল—কোন একটি বিবৃতির সত্যতা বা অসত্যতা বিচার করা। যখন দুটি বচন 'এবং' বা ∧ দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তখন তাকে বলা হয় **যৌগিক বচন** বা Conjunctive Proposition। আবার যখন 'অথবা' বা V দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তখন বলা হয় **বিকল্প বচন** বা Disjunctive Proposition.। অনেক সময় 'এবং' এর বদলে (.) এবং 'অথবা'র বদলে (+) চিহ্নও ব্যবহার করা হয়। কোন একটি বচনের সত্যমান 'সত্য' বা 'অসত্য' হলে তার **নঞর্থক বচন** (Negation of a Proposition) এর সত্যমান যথাক্রমে 'অসত্য' বা 'সত্য' হবে। নঞর্থক বচন (~) বা (´) চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

'সত্য' এবং 'অসত্য'—সত্যমান দুটিকে 1 এবং 0 দ্বারাও চিহ্নিত করা হয়। উদাহরণ স্বরূপ x এবং y এর যৌগিক বচনটির কথাই ধরা যাক্। x এবং y এর সম্ভাব্য সমস্ত সত্যমানের জন্য x ও y এর সত্যমান কি হয় দেখা যাক্ :

x যখন সত্য, এবং y সত্য, তখন xy সত্য।

x ,, সত্য, এবং y অসত্য, ,, xy অসত্য।

x ,, অসত্য, এবং y সত্য ,, xy অসত্য।

x ,, অসত্য, এবং y অসত্য, ,, xy অসত্য।

[x এর সত্যমান 'সত্য' বা 1 ধরা হয়]

এর চিত্ররূপটি হবে, এই জাতীয় :—

x	y	xy
1 ···	1 ··	1.
1 ···	0 ··	0.
0 ···	1 ···	0
0 ···	0 ···	0.

যে তালিকার থেকে দুটি বা তার চেয়ে বেশী বচনের সমস্ত সত্যমানের জন্য তাদের যৌগিক বা বিকল্প বা অন্য কোন সংযুক্ত বচনের সমস্ত সত্যমান পাওয়া যায় তাকেই Truth Table বা সত্যতালিকা বলা হয়। সাধারণতঃ বেষ্টনীর নক্সা (Design of circuits) তৈরী করার ক্ষেত্রে Boolean Algebra, Truth Table এর নিয়মগুলি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ।

বিন্যাস (Set) :—গণিতের নতুন পাঠক্রমে ঐচ্ছিক গণিতে 'Elements of Discrete Mathematics' নামে একটি বিষয় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। set বা বিন্যাস এর একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। জ্যামিতির undefined term এর মত বিন্যাস বা set এর উপযুক্ত সংজ্ঞা দেওয়া কঠিন। সাধারণভাবে বলা যায় যে কোন সংখ্যার বস্তুগুলির সমষ্টিগত পরিচয়ই হ'ল বিন্যাস বা set। প্রত্যেকটি বস্তুকে ঐ বিন্যাসের পদ বা Element বলা হয়। এগুলি কিন্তু **স্বজ্ঞাভিত্তিক সংজ্ঞা**। একটি শ্রেণীর সমস্ত ছাত্র নিয়ে একটি set বা বিন্যাস গড়ে ওঠে। ঐ শ্রেণীর প্রত্যেকটি ছাত্র ঐ বিন্যাসের এক একটি পদ। Algebra of setsএ বড় হাতের A, B, C প্রভৃতি অক্ষর বিন্যাস এবং ছোট হাতের a, b, c প্রভৃতি বিন্যাসের পদগুলিকে সূচিত করে। যদি বলা হয় :—

(1) A বিন্যাস এর একটি পদ যদি a হয়, তাহলে লিখতে হবে $a \in A$, অর্থাৎ a, A বিন্যাস এর অন্তর্গত একটি পদ। $\in$ চিহ্নটির অর্থ হল—অন্তর্গত (belong to).

(2) $a \notin A$ এর অর্থ a, A বিন্যাসের পদ নয়।

(3) A বিন্যাসের প্রত্যেকটি পদ যদি অপর একটি বিন্যাস B এরও একটি পদ হয়, তাহলে A'ক বলা হবে B এর উপবিন্যাস বা subset. লিখতে হবে $A \subset B$ বা $B \supset A$.

(4) যদি $B \subset A$ হয় এবং A বিন্যাসের অন্তত: একটি পদ a, যেটি B বিন্যাসের পদ নয়, অর্থাৎ $a \in B$ কিন্তু $a \notin B$ হয়, তবে Bকে A বিন্যাসের যথার্থ উপবিন্যাস Proper Subset বলা হয়। A=B হলে উক্ত সর্ত্ত সিদ্ধ হয়। তখন বলা যায় প্রত্যেকটি বিন্যাস তার নিজেরই একটি উপবিন্যাস। অর্থাৎ $A \subseteq B$.

(5) A ও B দুটি বিন্যাস যদি এমন হয় যে A র প্রত্যেকটি পদ B এর একটি পদ এবং B এর প্রত্যেকটি পদ Aর এক একটি পদ, অর্থাৎ যদি $a \in A$ হয়, তবে

$a \in$ B এবং যদি $b \in$ B হয় তবে $b \in$ A হবে। তখন বলা যায় A ও B বিন্যাস দুটি সমান। অর্থাৎ A = B.

(6) যদি A ⊂ B এবং B ⊂ C হয় তবে A ⊂ C হবে।

(7) প্রত্যেক বিন্যাসকে একটি বিশেষ বিন্যাস ∪-র উপবিন্যাসরূপে ধরা হয়েছে। প্রত্যেক বিন্যাসই একটি সার্বিক বিন্যাসের উপবিন্যাস। এটি লেখা হয় U বা (1) চিহ্ন দ্বারা।

(8) যে বিন্যাসে কোন পদ থাকে না তাকে **শূন্য বিন্যাস** (Null বা Empty set) বলা হয়। এটি চিহ্নিত করা হয় ϕ দ্বারা।

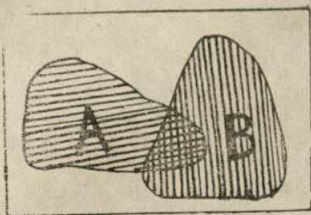
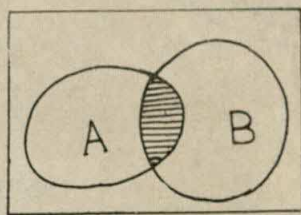
এছাড়া আর কতকগুলি প্রচলিত প্রতীক হ'ল :—

∪ = বিন্যাসের 'যোগ' বা 'Union.'
∩ = বিন্যাসের 'ছেদ' বা 'Intersection.
∧ = 'এবং' বা 'and'
∨ = 'বা' ('or').
~ = বা (') = 'হয় না' বা 'is not.'
⇒ = 'অন্তর্ভুক্ত' বা 'implies'.
⇐ = 'কারোর দ্বারা অন্তর্ভুক্ত বা 'implied by'
⇔ = implies ও implied by এর সমন্বয়।
∃ = 'অবস্থিত' বা 'there' exists.

∀ = 'সমস্ত মানের জন্য' 'for all values of'
→ = লক্ষণ।
> = বৃহত্তর
⩾ = বৃহত্তর বা সমান
< = ক্ষুদ্রতর
⩽ = ক্ষুদ্রতর বা সমান
≅ = সর্বতোভাবে সমান
↔ = উভয় দিকে বর্ধিত হতে পারে এমন সরলরেখা
⊙ = প্রক্রিয়া
iff = যদি এবং কেবল যদি If and only if)

Venn Diagram. (**ভেন্ চিত্র**) :—Algebra of sets এর মৌলিক নীতিগুলি ব্যাখ্যা করার জন্য ভেন্ চিত্র বা Venn Diagram এর প্রবর্তন করা হয়েছে। বিখ্যাত ব্রিটিশ গণিতবিদ জন ভেন্ যুক্তিভিত্তিক সত্যতা ব্যাখ্যার জন্য সর্বপ্রথম এই চিত্রের আশ্রয় নিয়েছিলেন। এই চিত্রে একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী বিন্দুগুলির বিন্যাসকে **সার্বিক বিন্যাস** বা universal set রূপে প্রকাশ করা হয়। আবার সার্বিক বিন্যাসের অন্তর্গত অপর কোন বিন্যাসকে ঐ আয়তাকার ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী অন্য কোন সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের অন্তর্গত বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বিন্যাস এর বিভিন্ন ধরনের সংযোগকে বিভিন্ন জাতীয় shade এর সাহায্যে নির্দেশ করা হয়। বিখ্যাত গণিতবিদ Leonard Euler ও এই চিত্ররূপ ব্যবহার করতেন বলে এগুলিকে Euler-venn Diagiam ও বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের বদলে বৃত্ত ও ব্যবহার করা চলে।

যদি A বিন্যাসের পদগুলি a_1, a_2, a_3, এবং B বিন্যাসের পদগুলি b_1, b_2, b_3

হয় তাহলে AUBর মধ্যে $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ পদগুলিও থাকবে। Venn diagramএ প্রকাশ করলে চিত্ররূপটি হবে :—(১নং চিত্র)

(১নং চিত্র)

(২নং চিত্র)

A ও বিন্যাসের ছেদকে প্রকাশ করা হয় $A \cap B$ হিসাবে। তার চিত্ররূপ হবে : (২নং চিত্র)।

Algebra of Sets এর কয়েকটি মৌলিক নীতি :—

1. **বিনিময় নিয়ম** (Commutative Law) :—$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2. **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) :– $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. **বিচ্ছেদ নিয়ম** (Distributive Law) :—$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. **পরিপূরক নিয়ম** (Laws of Complementation) :—$U' = \phi$; $\phi' \equiv U$; $A \cup A' = U$; $A \cap A' = \phi$; $(A^1)' = A$, ϕ = শূন্য বিন্যাস।

5. **সমার্থক বিভিন্ন পদ বিন্যাস** (Laws of Tautology) :—$A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

6. **শোষণের নিয়ম** (Laws of Absorption)– $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$.

7. **ডি-মর্গ্যানের নিয়ম** (De-Morgan's Law) :—$(A \cap B)' = A' \cup B'$; $(A \cup B)' = A' \cap B$.

বুলিয়ান বীজগণিত (Boolean Algebra) :—Algebra of sets হল Boolean Algebraর একটি অংশ। এর অগ্রগতি পুরোপুরি স্বজ্ঞার উপর নির্ভরশীল এবং এটি গণনাকারক বেষ্টনীতে ব্যবহৃত একটি নিদর্শন। এটিকে অনেক সময় Algebra of Logic বা যুক্তিবিদ্যার বীজগণিত ও বলা হয়। যখন কোন প্রক্রিয়ায় দুটি পদ বা অবস্থার সৃষ্টি হয়, তখন সেই বিন্যাস বা প্রক্রিয়াকে Boolean Algebra বলা হয়। এটি নতুন পাঠক্রমে ঐচ্ছিক গণিতের অন্তর্ভুক্ত।

পঞ্চম খণ্ড

॥ বিষয়সূচী ॥

(CONTENTS)

1. একটি দোলকের দৈর্ঘ্য, উহার পর্য্যায়কালের (Time period) বর্গের সহিত সরল ভেদে অবস্থিত এবং পৃথিবীর আকর্ষণজনিত ত্বরণ, পর্য্যায়কালের বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে অবস্থিত। এরূপ একটি দোলকের দৈর্ঘ্য যখন l cm., পর্য্যায়কাল T_1 secs.; পর্য্যায়কাল T_2 secs. হইলে দোলকটির দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

শর্তানুসারে : $T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ বা, $T = k.\sqrt{\frac{l}{g}}$.

এখন $T = T_1, l = l_1$ $\therefore$ $T_1 = k, \sqrt{\frac{l_1}{g}}$

$T = T_2, l = l_2$ ধরিয়া, $T_2 = k\sqrt{\frac{l_2}{g}}$.

ভাগ করিয়া $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$, '$g$'-কে অপরিবর্তিত ধরিয়া

বা, $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{l_1}{l_2}$ $\therefore$ $l_2 = \frac{l_1.T_2^2}{T_1^2}$ cm.

2. 3 cm., 4 cm., 5cm. ব্যাসার্ধের তিনটি গোলক গলাইয়া একটি গোলক করা হইল। বৃহত্তর গোলকের ব্যাসার্ধ কত হইবে ?

গোলকের আয়তন v c.c. ও ব্যাসার্ধ r cm. হইলে

$v \propto r^3$ বা, $v = k.r^3$.

$r = 3$ cm. $v = v_1$ $\therefore$ $v_1 = k\,3^3 = 27\,k$ c.c.

$r = 4$ cm. $v = v_2$ $\therefore$ $v_2 = k.4^3 = 64\,k$ c.c.

$r = 5$ cm. $v = v_3$ $\therefore$ $v_3 = k.5^3 = 125\,k$ c.c.

বৃহত্তর গোলকের আয়তন V c.c. $= v_1 + v_3 + v_3 = 216k$ c.c,

গোলকটির ব্যাসার্ধ 'R' ধরা হইলে $V = k.R^3$

$\therefore$ $k.R^3 = k.216 = k\,6^3$

$\therefore$ $R = 6$ cm.

3. একটি সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ $=9$, 12 তম পদ $=25$. শ্রেণীটি কি ?

ধরা যাক্ প্রথম পদ $=t_1=a$, সাধারণ অন্তর $=b$

t_4 (চতুর্থ পদ) $=a+3b=9$ $\cdots$ (i)

t_{12} (12-তম পদ) $=a+11b=25$ $\cdots$ (ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিলে পাই $8b=16 \quad \therefore \quad b=2$

(i) হইতে $a=9-3b=9-3.2=3$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $=3, 5, 7, 9, 11\cdots$

4. $1+4+7\cdots$ সমান্তর শ্রেণীর 20 তম পদ পর্যন্ত যোগফল বাহির করুন।

$a=1, b=3, n=20$

$\therefore$ যোগফল $=S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)b]$

$$=\frac{20}{2}[2\cdot1+(20-1)3]$$
$$=10\times59$$
$$=590.$$

5. কোনও শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি $S_n=n^2+3n$ হইলে শ্রেণীটিকে বাহির করুন।

$S_n=n^2+3n$, $t_n=n$ তম পদ $=S \ -S_{n-1}$.

$$\therefore \quad t_n=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$$
$$=n^2+3n-(n^2-2n+1+3n-3)$$
$$=n^2+3n-n^2+2n-1-3n+3$$
$$=2n+2$$

$\therefore \quad t_1=2+2=4, t_2=2.2+2=6, t_3=8\cdots$

$\therefore$ নির্ণেয় শ্রেণী $=4, 6, 8\cdots$

6. একটি গাছে প্রতি বৎসর পূর্ব বৎসরের দ্বিগুণ ফল জন্মায়। প্রথম বৎসর 50টি ফল ধরিলে 10 বৎসরে গাছে মোট কত ফল ধরিবে ?

প্রথম বৎসর ফল সংখ্যা $=50$

দ্বিতীয় " " " $=100$

তৃতীয় " " " $=200$

এইরূপে দশ বৎসরে মোট ফলের সংখ্যা

$$=50+100+200+\cdots+50(2^9)$$
$$=50\left[\frac{2^{10}-1}{2-1}\right]=50\times(2^{10}-1)$$

7. $3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{4}}$ এই রাশিটির করণী নিরসক উৎপাদক নির্ণয় করুন।

ধরা যাক $3^{\frac{1}{3}}=x,\ 2^{\frac{1}{4}}=y$ এবং 3 ও 4 এর ল. সা. গু. = 12

$\therefore\ x^{12}=3^4=81,\ y^{12}=2^3=8$

করণী নিরসক উৎপাদক = R

$\therefore\ (x-y)R=x^{12}-y^{12}=81-8=73$

$$\therefore\ R=\frac{x^{12}-y^{12}}{x-y}=x^{11}+x^{10}y+x^9y^2+\cdots+x.y^{10}+y^{11}$$

মূলদ গুণফল $x^{12}-y^{12}=73.$

8. $43+30\sqrt{2}$ এর বর্গমূল কত ?

$43+30\sqrt{2}=43+2\times\sqrt{25\times18}$

$=(\sqrt{25})^2+(\sqrt{18})^2+2\sqrt{25\times18}$

$=(\sqrt{25}+\sqrt{18})^2=(5+3\sqrt{2})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5+3\sqrt{2}).$

9. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ এর প্রতিযোগী রাশি নির্ণয় করুন।

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5+2\sqrt{6}}{1}$$

$=5+2\sqrt{6}$ অতএব ইহার প্রতিযোগী রাশি $=5-2\sqrt{6}$

10. কাল্পনিক রাশি $5+12i$ এর বর্গমূল কত ?

ধরা যাক্ $\sqrt{5+12i}=x+iy$

উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া

$5+12i=x^2-y^2+2ixy$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x^2-y^2&=5\\ xy&=6\end{aligned}\right\}\qquad \therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(5)^2+4\cdot36=169$$

$\therefore\ x^2+y^2=13$

$x^2-y^2=\ 5$

যোগ বিয়োগ করিয়া $x^2=9,\ y^2=4$

$\therefore\ x=\pm3.\ y=\pm2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(3+2i).$

11. প্রমাণ করুন : $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}\times\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}\times\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}=1.$

$$\text{L.H.S.}=\left(x^{b-c}\right)^{b+c}\times\left(x^{c-a}\right)^{c+a}\times\left(x^{a-b}\right)^{a+b}$$

$$=x^{b^2-c^2}\times x^{c^2-a^2}\times x^{a^2-b^2}$$
$$=x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$$
$$=x^0$$
$$=1=\text{R.H.S.}$$ প্রমাণিত।

12. $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় α, β হইলে এমন একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যাহার বীজদ্বয় $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$.

$ax^2+bx+c=0$ এই সমীকরণটির বীজদ্বয় α, β হইলে

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

নির্ণেয় সমীকরণ : $\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)=0$

বা, $x^2-x\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

বা, $x^2-x\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{\alpha\beta}=0$

বা, $x^2-x\,\dfrac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}+\frac{a}{c}=0$

বা, $cx^2+bx+a=0$

13. যদি $ax^2+bx+b=0$ এর বীজ দুইটি $p : q$ অনুপাতে হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0.$$

এখানে একটি বীজ $p\alpha$ এবং অপর বীজ $q\alpha$

$\therefore\ \alpha(p+q)=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha^2pq=\frac{b}{a}$ বা $\alpha\sqrt{pq}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

ভাগ করিয়া $\frac{\alpha(p+q)}{\alpha\sqrt{pq}}=\frac{-b/a}{\sqrt{b/a}}=-\sqrt{b/a}.$

$\therefore\ \frac{p}{\sqrt{pq}}+\frac{q}{\sqrt{pq}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$

বা, $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$

14. x বাস্তব হইলে $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর কোন মান 5 এবং 9 এর মধ্যে হইতে পারে না দেখান।

ধরা যাক্ $y=\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

তাহা হইলে $x^2+34x-71=x^2y+2xy-7y$

বা, $x^2(1-y)+2x(17-y)+(7y-71)=0$

[ইহা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ]

x বাস্তব হইলে নিরূপক : $\{2(17-y)\}^2-4(1-y)(7y-71)\geqslant 0$

বা, $4[(289+y^2-34y)-(-7y^2+78y-71)]\geqslant 0$

বা, $4[8y^2-112y+360]\geqslant 0$

বা, $32[y^2-14y+45]\geqslant 0$

বা, $32(y-5)(y-9)\geqslant 0$ ... (i)

সুতরাং x বাস্তব হইলে শর্ত (i) পূরণ হওয়া অত্যাবশ্যক। যুক্তি দিয়ে দেখান যায় $y=5$, $y=9$, $y>9$ বা $y<5$ হইলে শর্ত (1) পূরণ হয়। কিন্তু যদি $5<y<9$ হয় তবে শর্ত (1) পূরণ হয় না। অতএব x বাস্তব হইলে y দ্বারা নির্দেশিত প্রদত্ত মূলদ রাশির কোন মান 5 এবং 9 এর মধ্যে থাকিতে পারে না।

15. ARRANGE শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায় ?

শব্দটিতে মোট 7টি অক্ষর আছে, যার মধ্যে আছে 2টি A এবং ২টি R

$\therefore$ বিন্যাস সংখ্যা $=\dfrac{\lfloor 7}{\lfloor 2\,\lfloor 2}=1260.$

যে বিন্যাসগুলিতে R দুটি একত্র থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $=\dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2}=360$

[2টি R একত্রে রাখিয়া উহাদের একটি অক্ষররূপে গণ্য করিলে 6টি অক্ষর হয় যাহার মধ্যে থাকে 2টি A]

আবার যে সকল বিন্যাসে 2টি R একত্রে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা

$=1260-360=900.$

16. 15টি বিভিন্ন বর্ণের মুক্তা লইয়া কতরকমে একটি মুক্তার মালা গাঁথা যাইবে ?

একটি মুক্তাকে নির্দিষ্ট স্থানে গাঁথিয়া অবশিষ্ট 14টি মুক্তাকে বিভিন্ন প্রকারে গাঁথিলে মোট $\lfloor 14$ প্রকারে মালা গাঁথা যাইবে। কিন্তু নির্দিষ্ট মুক্তাটির ডান দিক বা বাম দিক ধরিয়া গাঁথিলে একই প্রকার মালা হইবে।

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{1}{2}\lfloor 14.$

17. $P_r = 272$, ${}^nC_r = 136$ হইলে n এবং r এর মান কত ?

${}^nC_r \times \lfloor r = {}^nP_r$ ধরিলে পাই $136 \times \lfloor r = 272$

$\therefore \lfloor r = 2 = \lfloor 2 \quad \therefore r = 2$

এখন ${}^nP_r = 272$. সুতরাং ${}^nP_2 = 272$

$\therefore n(n=1) = 272 = 17 \times 16$ বা $-16 \times (-17)$

$\therefore n = 17$ (nএর ঋণাত্মক মান -16 অগ্রাহ্য করিয়া)।

18. একটি প্রশ্নপত্রে 11টি প্রশ্ন দেওয়া আছে। উত্তর করিবার জন্য 6টি প্রশ্ন কত বিভিন্ন ভাবে বাছা যায় ? 11নং প্রশ্নটি আবশ্যিক হইলে উত্তর করিবার জন্য মোট 6টি প্রশ্ন কতভাবে বাছা সম্ভব ?

11টি প্রশ্ন হইতে 6টি প্রশ্ন যত বিভিন্ন ভাবে বাছা যায় তাহার সংখ্যা

$$11c_6 = 11c_5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

11 নং প্রশ্ন আবশ্যিক হওয়ায় বাকি 10টি প্রশ্ন হইতে অঙ্ক 5টি প্রশ্ন নির্বাচন করিতে হইবে তাহার সংখ্যা

$$10_{c_5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$$

19. দেখান যে

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots {}^nC_nx^n$$

আমরা জানি

$$(a+x)^n = a^n + {}^nc_1a^{n-1}x + {}^nc_2a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + {}^nc_ra^{n-r}x^r + \cdots + {}^nc_nx$$

$a=1$ ধরিলেই নির্ণেয় সমাধান পাওয়া যাইবে।

20. ঘাত সূচিত দ্বিপাদ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{20}$ রাশিটির বিস্তৃতিতে যে পদটিতে x থাকিবে না—তাহা কত ?

ধরা যাক $(r+1)$তম পদ x বর্জিত

এখন $(r+1)$ তম পদ $= 20c_r(x)^{20-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$= 20c_r\ x^{20-2r}$

কিন্তু পদটি x বর্জিত হওয়া চাই।

$\therefore 20 - 2r = 0$

বা $r = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $= 20c_{10} = \frac{\lfloor 20}{(\lfloor 10)^2}$

21. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{30}$ বিস্তৃতির মধ্যপদ কত হইবে ?

এখানে মধ্যপদ $=(\frac{30}{2}+1)$ বা $(15+1)$ তম পদ

$=30c_{15}\ (x^{15})\left(\frac{1}{x}\right)^{15}$

$=30c_{15}=\frac{\lfloor 30}{(\lfloor 15)^2}$

22. ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{2}$র মান নির্ণয় করিতে হইবে। (দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে)।

আমরা জানি $100-2=98=7^2 . 2$

$\therefore\ 7\sqrt{2}=10(1-0{\cdot}02)^{\frac{1}{2}}$

বা, $\sqrt{2}=\frac{10}{7}[1-\frac{1}{2}(0{\cdot}02)-\frac{1}{8}(0{\cdot}02)^2-\frac{1}{16}(0{\cdot}02)^3-\cdots]$

$=\frac{10}{7}[1-0{\cdot}01-0{\cdot}00005-0{\cdot}0000005-\cdots]$

$=\frac{10}{7}\times 0{\cdot}9899495=\frac{9{\cdot}899495}{7}$

$-1{\cdot}4142135$

$=1{\cdot}414214$ (6 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান)

23. যদি $y=x-x^2+x^3-\cdots\to\infty$ হয় তবে দেখাইতে হইবে যে

$x=y+y^2+y^3+\cdots\to\infty$

প্রদত্ত আছে যে $y=x-x^2+x^3-\cdots\to\infty$

উভয় পক্ষে প্রতি পদের চিহ্ন পরিবর্তিত করিয়া এবং উভয় পক্ষে 1 যোগ করিয়া পাই—

$1-y=1-x+x^2-x^3+\cdots$

$=(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}$

পক্ষান্তর করিয়া :

$1+x=\frac{1}{1-y}=(1-y)^{-1}=1+y+y^2+\cdots$

বা $x=y+y^2+y^3+\cdots\infty$

[এখানে x ও y-এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর]

24. সরল করুন :—$\log\frac{108}{5}$

$\log\frac{108}{5}=\log\frac{2^2\times 3^3}{5}=\log(2^2\times 3^3)-\log 5$

$=\log 2^2+\log 3^3-\log 5=2\log 2+3\log 3-\log 5$

25. দেখাইতে হইবে যে $7 \log \frac{16}{15}+5 \log \frac{25}{24}+3 \log \frac{81}{80}=\log 2$

$$7 \log \tfrac{16}{15}=7 \cdot \log \frac{2^4}{3\times 5}=7[\log 2^4-\log (3\times 5)]$$
$$=7[4 \log 2-\log 3-\log 5]$$
$$=28 \log 2-7 \log 3-7 \log 5.$$

সেই মত : $5 \log \frac{25}{24}=5 \log \frac{5^2}{2^3\times 3}=5[2 \log 5-3 \log 2-\log 3]$

$$=10 \log 5-15 \log 2-5 \log 3$$

$$3 \log \tfrac{81}{80}=3 \log \frac{3^4}{2^4\times 5}=3[4 \log 3-4 \log 2-\log 5]$$
$$=12 \log 3-12 \log 2-3 \log 5$$

∴ সমস্ত অংশ

$$=28 \log 2-7 \log 3-7 \log 5+10 \log 5-15 \log 2-5 \log 3$$
$$+12 \log 3-12 \log 2-3 \log 5$$

$=\log 2$ প্রমাণিত ;

26. দেখান যে—

$$x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1.$$

বাম পক্ষকে P ধরিয়া

$$P=x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}$$

$\therefore \log P=\log x(\log y-\log z)+\log y(\log z-\log x)$
$+\log z(\log x-\log y)$

$=0.$

$\therefore P=1.$

27. দেখান যে $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots=\log 2$

$$\log (1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots$$

$x=1$ বসাইলে পাওয়া যায়

$\log 2=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots\ldots$

$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}\cdots\cdots$ প্রমাণিত।

28. মান নির্ণয় করুন—$\sqrt[18]{1129}$

ধরা যাক $\sqrt[18]{1129}=x$ অর্থাৎ $x=(1129)^{\frac{1}{18}}$

$\therefore \log x=\frac{1}{18}\log 1129=\frac{1}{18}\times 3{\cdot}0527=0{\cdot}1696$

$\therefore x=\text{anti} \log 0{\cdot}1696=1{\cdot}478.$

29. সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে 5% হারে 2 টাকার কত বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 15 টাকা হইবে ?

এখানে $A=15$ টাকা, $P=2$, $i=0.05$, $n=$?

সূত্রের সাহায্যে : $A=P(1+i)^n$

বা $15=2(1.05)^n$

$\therefore \log 15=\log 2+n \log 1.05$

$$\therefore n=\frac{\log 15-\log 2}{\log 1.05}=\frac{1.1761-0.3010}{0.0212}=\frac{0.8751}{0.0212}$$

$=41.3$ বৎসর (প্রায়)।

30. চক্রবৃদ্ধির হার বার্ষিক 5% হইলে কত সময়ে কোন টাকা দ্বিগুণ হইবে।

ধরা যাক্ P এবং n যথাক্রমে আসল ও বৎসরের সংখ্যা

তাহা হইলে $A=2P$, $i=0.05$

$A=P(1+i)^n$ সূত্র হইতে $2P=P(1+0.05)^n=P(1.05)^n$.

$\therefore (1.05)^n=2$ $\quad\therefore n \log 1.05=\log 2$

বা, $n=\dfrac{\log 2}{\log 1.05}=\dfrac{0.3010}{0.0212}=14.2$ বৎসর (প্রায়)।

31. কোন সহরের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসর ঐ বৎসরের প্রারম্ভিক লোকসংখ্যার 1.8% বৃদ্ধি পায়, তবে কত বৎসরে লোকসংখ্যার সামগ্রিক বৃদ্ধি 30% হইবে ?

ধরা যাক $n\equiv$ বৎসরে নির্ণেয় সংখ্যা এবং প্রারম্ভিক লোকসংখ্যা $P\equiv100$.

$A=130$, $i=$ প্রতি এককে বাৎসরিক বৃদ্ধির হার

$=1.8/100=0.018$

$\therefore A=P(1+i)^n$ সূত্র হইতে $130=100(1.018)^n$

বা, $13=10(1.018)^n$

$\therefore \log 13=\log 10+n \log 1.018$

$$\therefore n=\frac{\log 13-\log 10}{\log 1.018}=\frac{1.1139-1}{0.0077}=\frac{0.1139}{0.0077}$$

$=15$ বৎসর (আসন্ন)।

32. 3% সুদের হারে 3 বৎসরে দেয় টাকার বর্তমান মূল্য 400 টা. হইলে দেয় টাকা ও বাটা কত হইবে ?

[বাটা = বর্তমান মূল্যের সুদ [$R=1.03$ টা.]

$=400[1+.03]^3-400$

$=400[1+3\times.03+3\times(.03)^2+(.03)^3-1]$

$=400[.09+.0027+.000027]$

$=400\times.0927$

$=4\times9.27=37.08$ টা.।

33. বার্ষিক $6\frac{1}{4}\%$ হারে প্রতি বৎসরান্তে কিস্তি দেয় চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তি 825 টাকা ; উহার মূল্য কত ?

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির মূল্য হইল উহার বর্তমান মূল্য।

এখন $V=\frac{P}{i}$. এখানে $P=825$ টা. $i=\frac{6\frac{1}{4}}{100}=\frac{1}{16}$.

$\therefore\ V=\frac{825}{\frac{1}{16}}=825\times16=13{,}200$; $\therefore$ নির্ণেয় মূল্য $=13{,}200$ টা.

34. Prove that $\frac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=2\sin^2\theta-1$

$$\text{L.H.S}=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\Big/\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)$$
$$=2\sin^2\theta-1=\text{R.H.S.}$$

35. Prove that

$(\sec\theta+\tan\theta-1)(\sec\theta-\tan\theta+1)=2\tan\theta.$

$$\text{L.H.S.}=\{\sec\theta+(\tan\theta-1)\}\times\{\sec\theta-(\tan\theta-1)\}$$
$$=\sec^2\theta-(\tan\theta-1)^2=\sec^2\theta-\tan^2\theta+2\tan\theta-1$$
$$=\sec^2\theta-(1+\tan^2\theta)+2\tan\theta$$
$$=2\tan\theta=\text{R.H.S.}$$

36. Prove that

$$\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

$$\text{L.H.S.}=\frac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$
$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$
$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1-\sec\theta+\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$$
$$=\tan\theta+\sec\theta=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\text{R.H.S.}$$

37. Prove that

$$\frac{\cot A+\tan B}{\tan A+\cot B}=\cot A\tan B.$$

$$\text{L.H.S.}=\left(\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin B}{\cos B}\right)\Big/\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos B}{\sin B}\right)$$

$$=\frac{\cos A \sin B}{\sin A \cos B}=\cot A \tan B=\text{R.H.S}$$

38. Find the values of (i) $\sin 15^\circ$, (ii) $\sin 75^\circ$ and (iii) $\cos 75^\circ$.

(i) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ \cos 30^\circ-\cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$=\sin 45^\circ \cos 30^\circ+\cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(iii) $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$

$=\cos 30^\circ \cos 45^\circ-\sin 30^\circ \sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$

39. Prove that $\frac{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta}{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta}=\cot 4\theta.$

বামপক্ষের লব $=(\cos\theta+\cos 7\theta)+(\cos 3\theta+\cos 5\theta)$

$=2\cos 4\theta\cos 3\theta+2\cos 4\theta\cos\theta$

$=2\cos 4\theta(\cos 3\theta+\cos\theta)=4\cos 4\theta\,.\,\cos 2\theta\,.\,\cos\theta$

বামপক্ষের হর $=(\sin\theta+\sin 7\theta)+(\sin 3\theta+\sin 5\theta)$

$=2\sin 4\theta\,.\,\cos 3\theta+2\sin 4\theta\,.\,\cos\theta$

$=2\sin 4\theta(\cos 3\theta+\cos\theta)$

$=4\sin 4\theta\,.\,\cos 2\theta\,.\,\cos\theta$

$\therefore\ \frac{\text{লব}}{\text{হর}}=\frac{\cos 4\theta}{\sin 4\theta}=\cot 4\theta.$

40. If $A+B+C=180^\circ$, show that $\tan A+\tan B+\tan C = \tan A \tan B \tan C$.

$$A+B+C=180^\circ$$
or, $B+C=180^\circ-A$

or, $\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A.$

or, $\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B \tan C}=-\tan A$

or, $\tan B+\tan C=-\tan A+\tan A \tan B \tan C$

or, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$

41. If $2\tan\theta=3\tan\phi$, show that

$$\tan(\theta-\phi)=\frac{\sin 2\phi}{5-\cos 2\phi}$$

$$\text{L.H.S.}=\tan(\theta-\phi)=\frac{\tan\theta-\tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}=\frac{\frac{3}{2}\tan\phi-\tan\phi}{1+\frac{3}{2}\tan^2\phi}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\tan\phi}{\frac{1}{2}(2+3\tan^2\phi)}=\frac{\frac{\sin\phi}{\cos\phi}}{2+3\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}}=\frac{2\sin\phi\cos\phi}{2\,.\,2\cos^2\phi+3\,.\,2\sin^2\phi}$$

$$=\frac{\sin 2\phi}{2(1+\cos 2\phi)+3(1-\cos 2\phi)}=\frac{\sin 2\phi}{5-\cos 2\phi}=\text{R.H S.}$$

42. Find the value of $\sin 18^\circ$.

ধরা যাক $18^\circ=\theta$

$\therefore\ 3\theta=54^\circ=90^\circ-36^\circ=90^\circ-2\theta.$

$\therefore\ \sin 3\theta=\sin(\ 0^\circ-2\theta)=\cos 2\theta.$

বা, $3\sin\theta-4\sin^3\theta=1-2\sin^2\theta.$

বা, $4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0.$

বা, $(\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0.$

কিন্তু $\sin\theta\neq 1.$ $\because\ \theta=18^\circ$ $\therefore\ 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$

or, $\sin\theta=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

এখানে θ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া θ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ অর্থাৎ $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\left[\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$

43. Solve : $\tan\theta+\cot\theta=2$

or, $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$ or, $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}-2=0$

or, $(\tan\theta-1)^2=0$ or, $\tan\theta=1=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$.

44. Solve : $\tan x+\tan 2x+\tan x\,.\tan 2x=1$

পক্ষান্তর করিয়া :

$\tan x+\tan 2x=1-\tan x\,.\tan 2x$

or, $\tan 3x=\tan(x+2x)=\dfrac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\,.\tan 2x}$

এখানে $\tan x+\tan 2x\neq 0,\ 1-\tan x\,.\tan 2x\neq 0$ ধরিয়া

$\tan 3x=1,\ 3x=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ or, $x=\dfrac{n\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}$.

45. Solve : $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\text{L.H.S.}=\tan^{-1}\frac{\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+2}}{1-\dfrac{x-1}{x-2}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}}=\tan^{-1}\frac{2x^2-4}{-3}$$

সুতরাং : $\dfrac{2x^2-4}{-3}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

বা, $2x^2-4=-3$ বা $2x^2-1=0$

বা, $x=\pm 1/\sqrt{2}$

46. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$

Prove that $x+y+z=xyz$.

$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

$\therefore\ \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{x+y}{1-xy}+z}{1+\dfrac{z(x+y)}{1-xy}}=\tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]=\pi$$

$\therefore\ \dfrac{x+y+z-xyz}{1+xy-yz-zx}=\tan\pi=0$.

$\therefore\ x+y+z=xyz$.

47. Given that L tan $28^\circ 11' = 9{\cdot}7290196$ and L tan $28^\circ 12' = 9{\cdot}7293230$. Find L tan $28^\circ 11' 18''$.

$1'$এর জন্য অন্তর $= 9{\cdot}7293230 - 9{\cdot}7290196 = 0{\cdot}0003034$.

$18''$ এর জন্য অন্তর $= \frac{3034}{60} \times 18 = 910$ (আসন্ন);প্রকৃতপক্ষে $0{\cdot}0000910$

$\therefore$ L tan $28^\circ 11' 18'' = 9{\cdot}7290196 + 0{\cdot}0000910$
$= 9{\cdot}7291106$ (প্রায়)।

48. Show that $b^2 \sin 2c + c^2 \sin 2B = 4\triangle$.

L.H.S $= b^2 . 2 \sin c . \cos c + c^2 . 2 \sin B \cos B$
$= 2b \sin c . b \cos c + 2c \sin B . c \cos B$
$= 2 b \sin c (b \cos c + c \cos B)$ কারণ $b/\sin B = c/\sin c$
$= 2ab \sin c$ (অভিক্ষেপের সূত্র হইতে)
$= 4\triangle$ কারণ $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin c$.

49. এক ব্যক্তি একটি স্তম্ভের পাদদেশ হইতে অনুভূমি রেখা বরাবর 200 ft. দূরে দাঁড়াইয়া স্তম্ভটির শীর্ষদেশে উন্নতি কোণ 75° লক্ষ্য করিলেন। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

শীর্ষদেশ F-এর উচ্চতা h ft হইলে ভূমি 200 ft হইবে।

$\therefore \tan 75^\circ = \frac{h}{200} \quad \therefore h = 200 \tan 75^\circ = 200(2+\sqrt{3})$.

50. একটি পাহাড়ের শীর্ষদেশ হইতে, পাহাড়টির পাদদেশ হইতে অনুভূমি রেখা বরাবর দুইটি পর পর মাইলস্টোনের অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30° পরিলক্ষিত হইল। পাহাড়টির উচ্চতা কত ?

পাহাড়ের নিকটতম মাইলষ্টোন M^1-এর দূরত্ব পাহাড়ের পাদদেশ হইতে x মাইল ধরা হইল। একই অনুভূমি রেখাতে অবস্থিত বলিয়া দ্বিতীয় মাইলষ্টোন M^2-র দূরত্ব পাদদেশ হইতে $x+1$ মাইল। পাহাড়টির উচ্চতা $= h$ মাইল।

$\therefore \frac{h}{x} = \tan 60^\circ$ এবং $\frac{h}{x+1} = \tan 30^\circ$

ভাগ করিয়া : $\frac{x+1}{x} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} = 3 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$

$\therefore h = x \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ মাইল।

51. একটি নালার অপর পাড়ে অবস্থিত একটি তালবৃক্ষের উচ্চতা ও নালার বিস্তার মাপিবার জন্য নালার এপার হইতে বৃক্ষ-শীর্ষের উন্নতি কোন মাপা হইল এবং ইহা 60° হইল। এবারে নালার পাড় হইতে 12 মিটার পিছাইয়া আসিয়া আবার

বৃক্ষ শীর্ষের উন্নতি কোণ মাপা হইল এবং উহা 30° হইল। বৃক্ষের উচ্চতা ও নালার বিস্তার কত ?

ধরা যাক্ OP তালবৃক্ষ এবং AO নালার বিস্তার। △OPBতে $\frac{OB}{OP}=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$.

△OPAতে $\frac{OA}{OP}=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$. বিয়োগ করিলে $\frac{OB-OA}{OP}$

$=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{AB}{OP}=\frac{3-1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ বা $\frac{12}{OP}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $2OP=12\sqrt{3}$ $\therefore$ $OP=6\sqrt{3}$ মি

ইহাই বৃক্ষের উচ্চতা। পুনরায়

$\frac{OA}{OP}=\cot 60^\circ$ বা, $OA=OP\,.\cot 60^\circ=OP\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=6\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=6$ মিটার। ইহাই নালার বিস্তার।

(চিত্র নিজে আঁকার চেষ্টা করুন।

52. If $a+\frac{1}{b}=1,\ b+\frac{1}{c}=1$ Show that $c+\frac{1}{a}=1$.

$b+\frac{1}{c}=1$ বা, $\frac{1}{c}=1-b$ $\therefore$ $c=\frac{1}{1-b}$

again $a+\frac{1}{b}=1$ বা. $a=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}$ $\therefore$ $\frac{1}{a}=\frac{b}{b-1}$

$\therefore\ c+\frac{1}{a}=\frac{1}{1-b}+\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1-b}=\frac{1-b}{1-b}=1$ (proved)

53. If $2s=a+b+c$, show that $(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)(c)=c^3$.

$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)(c)$
$=(s-a+s-b)^3-3(s-a)(s-b)(s-a+s-b)+3(s-a)(s-b)(c)$
$=(2s-a-b)^3-3(s-a)(s-b)(2s-a-b)+3(s-a)(s-b)(c)$
$=(a+b+c-a-b)^3-3(s-a)(s-b)\{(2s)-(a+b)\}+3(s-a)(s-b)(c)$
$=(c)^3-3(s-a)(s-b)(c)+3(s-a)(s-b)(c)=c^3$ (proved.)

54. If $\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$

Show that $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$

$$\frac{y+z-x}{a}=\frac{z+x-y}{b}=\frac{x+y-z}{c}$$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{z+x-y+x+y-z}{b+c}=\frac{2x}{b+c}$

আবার প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{x+y-z+y+z-x}{c+a}=\frac{2y}{c+a}$

পুনরায় ,, ,, $=\frac{y+z-x+z+x-y}{a+b}=\frac{2z}{a+b}$

$\therefore \frac{2x}{b+c}=\frac{2y}{c+a}=\frac{2z}{a+b}$ or, $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ proved.

55. সমানুপাত সাহায্যে সমীকরণ :

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{76(x-1)}{49(x+1)}$$

বা, $\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{76}{49}$ বা, $\frac{x^3+1}{x^3-1}=\frac{76}{49}$

বা, $\frac{2x^3}{2}=\frac{125}{27}$ (যোগ ও ভাগ ক্রিয়ার দ্বারা)

$\therefore x^3=\frac{125}{27}$ $\therefore x=\frac{5}{3}$.

56. কোন ঘনকের তল সমূহের ক্ষেত্রফল 150 ব. সে. মি. হইলে ইহার প্রান্তিকীর পরিমাণ কত ?

ধরা যাক দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটি 'a' একক।

$\therefore$ ইহার তল সমূহের ক্ষেত্রএল $=2(a^2+a^2+a^2)=6a^2$.

শর্তানুসারে $6a^2=150$ বর্গ একক।

$\therefore a=5$ অর্থাৎ প্রান্তিকী $=5$ cm.

57. কোন ঘনকের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 মিটার হইলে ইহার তল সমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরা যাক ঘনকের প্রত্যেকটি বাহু a একক

$\therefore$ কর্ণ $=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3a^2}$

শর্তানুসারে $\sqrt{3a^3}=5$

বা, $3a^2=25$ $\therefore a^2=\frac{25}{3}$ $\therefore a=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

তলগুলির ক্ষেত্রফল

$$=2\left\{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{5}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{5}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$=2(\frac{25}{3}+\frac{25}{3}+\frac{25}{3})=50$ বর্গমিটার।

58. 2 cm. পুরু কাঠের তক্তার দ্বারা ঢাকনি সহ বাক্স নির্মাণ করিতে হইবে। বাক্সটির বাহিরের মাপ দৈর্ঘ্য 24 cm., প্রস্থ 20 cm. এবং উচ্চতা 16 cm.। কত বর্গ সে. মি. তক্তার প্রয়োজন? কাঠের আঃ গুঃ ·75 হইলে খালি বাক্সটির ওজন কত?

বাক্সটি নিরেট হইলে ইহার ঘনফল $= 24 \times 20 \times 16 = 7680$ ঘঃ সেঃ মিঃ।
ভিতরের ফাঁকা অংশের ঘনফল $= 20 \times 16 \times 12 = 3840$ ঘঃ সেঃ মিঃ।
$\therefore$ ব্যবহৃত তক্তার মোট ঘনফল $= 7680 - 3840$ ঘঃ সেঃ মিঃ।
তক্তা 2 সেমি পুরু। $\therefore$ তক্তার নির্ণেয় পরিমাণ $\frac{3840}{2} = 1920$ বঃ সেমিঃ।
কাঠের আঃ গুঃ $= \cdot 75$

$$\therefore \cdot 75 = \frac{3840 \text{ ঘঃ সেমিঃ কাঠের ওজন}}{3840 \text{ ঘঃ সেমিঃ জলের ওজন}}।$$

1 ঘন সেমিঃ জলের ওজন $= 1$ গ্রাম ধরিলে।
3840 ঘঃ সেমিঃ কাঠের ওজন $= \cdot 75 \times 3840$ গ্রাম $= 2880$ গ্রাম।
$= 2$ কিলোগ্রাম 880 গ্রাম।

59. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 14 সেমিঃ এবং ভূমিস্থ ব্যাসার্ধ 7 সে.মিঃ হইলে ইহার ঘনফল ও সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কত?

ঘনফল $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 49 \times 14 = 2156$ ঘঃ সেমিঃ।
সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 7)(7+14) = 924$ বর্গ সেমিঃ।

60. একটি লম্ব বৃত্তাকার নল 1 সেমিঃ পুরু ধাতুর পাতের দ্বারা নির্মিত। ইহা $3\frac{1}{2}$ মিটার দীর্ঘ ও নলের প্রান্তের বাইরের ব্যাসের মাপ 16 সেমিঃ। যদি ঐ ধাতুর প্রতি ঘন সেমিঃ-র ওজন 5 গ্রাম হয় তবে নলটির ওজন কত?

নলটি ফাপা না হয়ে নিরেট হলে এটির ঘনফল হত
$\pi \cdot 8^2 \times 3\frac{1}{2} \times 100 = \frac{22}{7} \times 64 \times \frac{7}{2} \times 100$ ঘন সেমিঃ।
$= 70400$ ঘন সেমিঃ
ভিতরের ফাকা অংশটি ও লম্ব বৃত্তাকার চোঙ। ইহার ঘনফল
$= \pi \times 7^2 \times 3\frac{1}{2} \times 100$
$= \frac{22}{7} \times 49 \times \frac{7}{2} \times 100 = 53900$ ঘন সেমিঃ।
$\therefore$ নলের ধাতুর ঘনফল $= 70400 - 53900 = 16500$ ঘন সেমিঃ
সুতরাং নলটির ওজন $= 16500 \times 5$ গ্রাম $= 82500$ গ্রাম
$= 82\frac{1}{2}$ কিলোগ্রাম।

61. 12 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি ধাতুগোলক গলাইয়া 8 মিটার উচ্চতা ও 2 মিটার ভূমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কতকগুলি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈয়ারী করা সম্ভব?

গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times 12^3$

একটি দণ্ডের ঘনফল $\pi r^2 h=\pi\times 2^2\times 8$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=\dfrac{\frac{4}{3}\pi\times 12^3}{\pi\times 2^2\times 8}=\dfrac{4\times 12\times 12\times 12}{3\times 2\times 2\times 8}=72$টি।

62. লৌহ নির্মিত একটি বাটির ভিতর ও বাহিরের পিঠ উভয়ই সমকেন্দ্র গোলাকৃতি। বাহিরের পিঠের ব্যাসার্ধ 22 সেমিঃ এবং ধাতু সর্বত্রই 1 সেমিঃ পুরু। বাটি তৈয়ারী করিতে কত ঘন পরিমাণ লৌহ লাগিয়াছে? বাটিটি জলে ভর্তি করিলে কত লিটার জল ধরিবে।

বাটিটি নিরেট হইলে ঘনফল $=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2\pi}{3}\times 22^3$.

ভিতরের ফাঁকা অংশ গোলাকৃতি, সুতরাং ইহার ঘনফল

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 21^3=\frac{2}{3}\pi\times 21^3$

$\therefore$ লৌহের ঘনফল $=\frac{2}{3}\pi\times 22^3-\frac{2}{3}\pi\times 21^3$

$=\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 22^3-\frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 21^3$

$=\frac{44}{21}\times 10648-\frac{44}{21}\times 9261=2906\frac{2}{21}$ ঘন সেঃ মিঃ

বাটির ভিতরের ফাঁকা গোলাকৃতি অংশের ঘনফল

$=\frac{2}{3}\pi\times 21^3=19404$ ঘন সেমিঃ। ইহাই ভর্তি জলের ঘন পরিমাণ।

এখন 1 লিটার $=1000$ ঘন সেমিঃ।

$\therefore$ জলের ঘন পরিমাণ $=\frac{19404}{1000}$ লিটার $=19.404$ লিটার।

63. Solve :

$10x-8<32-10x$

x যুক্ত রাশি ও x বর্জিত রাশি পক্ষান্তর করিয়া

$10x+10x<32+8$

বা, $20x<40$ বা, $\dfrac{20x}{20}<\dfrac{40}{20}$ $\therefore x<2$.

অর্থাৎ x এর মান 2 এর কম যে কোন সংখ্যা হতে পারে।

64. Solve :

$\frac{8}{3}x+2\geq\frac{1}{6}x-8$

[$\geq$ চিহ্নের অর্থ $>$ হইতে পারে বা $=$ হইতে পারে।]

পক্ষান্তর করিয়া $\frac{8}{3}x-\frac{1}{6}x\geq -8-2$

বা, $\frac{15}{6}x\geq -10$ বা, $x\geq -10\times\frac{6}{15}$

বা, $x\geq -4$ অর্থাৎ $x=-4$ বা, $x>-4$.

65. একটি লোক 1 কুইন্টালের এক বাণ্ডিল খাদ্যদ্রব্য 270 টাকায় ক্রয় করিলেন। ঐ বাণ্ডিল খোলার পর দেখা গেল 10% দ্রব্য নষ্ট হইয়াছে। অবশিষ্ট দ্রব্য প্রতি কিলো কি দরে বিক্রয় করিলে অন্ততঃ কিছু লাভ হইবে?

ধরা যাক প্রতি কিলোর বিক্রয় মূল্য $= x$ টাকা।

10% নষ্ট হওয়াতে 90 কিলো দ্রব্য রহিল। উহার বিক্রয় মূল্য $= 90x$ টাকা।

লাভ করিতে হইলে বিক্রয় মূল্য, ক্রয় মূল্য অপেক্ষা অধিক হইবে।

ক্রয় মূল্য $= 270$ টাকা। $\therefore$ লাভের জন্য $90x > 270$

বা, $x > 3$

অর্থাৎ প্রতি কিলো 3 টাকার অধিক দরে বিক্রয় করিলে লাভ হইবে।

66. যদি (x, y) বিন্দুতে $(4, 5)$ ও $(-2, 3)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হয়, তাহা হইলে প্রমাণ করুন যে $3x + y - 7 = 0$.

(x, y) ও $(4, 5)$ এর মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$

(x, y) ও $(-2, 3)$,, ,, ,, $= \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$

যেহেতু (x, y) হইতে $(4, 5)$ ও $(-2, 3)$ সমদূরবর্তী

$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$

বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$

বা, $12x + 4y - 28 = 0$ বা, $3x + y - 7 = 0$ Proved.

67. PQR ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 3)$, $(4, 2)$ এবং $(2, -2)$, তাহার পরিকেন্দ্রের (circumcentre) স্থানাঙ্ক কত হইবে ?

ধরা যাক $S(x, y)$ ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, তাহা হইলে $SP = SQ = SR$

বা, $SP^2 = SQ^2 = SR^2$.

বা, $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$.

বা, $2x - 6y + 10 = -8x - 4y + 20 = -4x + 4y + 8$

বা, $6x - 2y - 10 = 0$ এবং $2x - 10y + 2 = 0$

বা, $3x - y - 5 = 0$ এবং $x - 5y + 1 = 0$

সমাধান করিলে $x = \frac{13}{7}$, $y = \frac{4}{7}$.

$\therefore$ পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{13}{7}, \frac{4}{7})$.

68. $2x + 3y + 4 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে সরলরেখা $(3, -4)$ বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ কত হইবে ?

$2x + 3y + 4 = 0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হইবে

$2x + 3y + k = 0$.

এক্ষণে ঐ সরলরেখা $(3, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$2 \times 3 + 3 \times -4 + k = 0$ বা, $k = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $2x + 3y + 6 = 0$

69. $4x + y - 4 = 0$ এবং $3x + 2y - 5 = 0$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী এবং $x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ কত হইবে ?

$4x+y-4=0$ এবং $3x+2y-5=0$ সমীকরণ দুইটির সমাধান করিলে পাওয়া যায় $x=3/5$, $y=8/5$

$\therefore$ ঐ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3/5, 8/5)$.

এখন $x-2y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব হইবে এমন সরলরেখার সমীকরণ হইবে $2x+y+k=0$.

যেহেতু ইহা $(3/5, 8/5)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $2\times\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+k=0$. $\therefore$ $k=-\frac{14}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=2x+y-\frac{14}{5}=0$ বা, $10x+5y-14=0$.

70. দেখান যে $2x-y+8=0$, $3x+y+2=0$ এবং $4x+3y-4=0$ রেখাগুলি সমবিন্দু।

$2x-y+8=0$ এবং $3x+y+2=0$ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া গেল $(-2, 4)$.

এখন যদি $(-2, 4)$ বিন্দু দ্বারা $4x+3y-4=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তবে তৃতীয় রেখাও প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুগামী হইবে, অর্থাৎ তিনটি সরলরেখাই সমবিন্দু হইবে।

এক্ষণে $4x+3y-4=4(-2)+3(4)-4=-8+12-4=0$

অতএব দেখা গেল তৃতীয় সমীকরণ $(-2, 4)$ দ্বারা সিদ্ধ হইল।

$\therefore$ তিনটি রেখাই সমবিন্দু।

71. $4x+3y=8$ এবং $4x+3y+12=0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে লম্ব দূরত্ব কত হইবে?

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল, সুতরাং মূলবিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কিত করিলে তাহা উভয় সরলরেখার উপরই লম্ব হইবে।

$4x+3y=8$ বা $4x+3y-8=0$ এই সরলরেখার উপর মূলবিন্দু $(0, 0)$ হইতে

লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{-8}{\sqrt{4^2+3^2}}=-\dfrac{8}{5}$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ হইতে দ্বিতীয় রেখা $4x+3y+12=0$ এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{12}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}.$$

যেহেতু সরলরেখা দুইটির উপর মূলবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দুইটি বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট, সুতরাং বুঝিতে হইবে যে রেখা দুইটি মূলবিন্দুর দুই পার্শ্বে অবস্থিত।

সুতরাং উভয়ের মধ্যে লম্ব দূরত্ব $=\frac{12}{5}+\frac{8}{5}=4$.

72. $(1, -2)$ ও $(4, -3)$ বিন্দুগামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $3x+4y=7$ সরলরেখায় অবস্থিত, তাহার সমীকরণ কত হইবে?

ধরা যাক বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

সুতরাং ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$

$\because$ বৃত্তটি $(1, -2)$ ও $(4, -3)$ বিন্দু দিয়া যায়

$\therefore$ $\underline{5+2g-4f+c=0}$ এবং $\underline{25+8g-6f+c=0}$

আবার যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, $3x+4y=7$ এর উপরে অবস্থিত

$\therefore$ $\underline{-3g-4f=7}$

সমীকরণ তিনটি সমাধান করিলেই পাওয়া যায় $g=-\frac{47}{15}, f=\frac{3}{5}, c=\frac{11}{3}$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $=15x^2+15y^2-94x+18y+55=0.$

73. (*a*) $(-1, 1)$ বিন্দুতে যাহার নাভি এবং $x+y+1=0$ সরলরেখা যাহার নিয়ামক সেই অধিবৃত্তের সমীকরণটি কত হইবে ?

ধরা যাক অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।

এখন নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$

নাভি হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

আবার নিয়ামক $x+y+1=0$ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব $=\dfrac{x+y+1}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$=\frac{x+y+1}{\sqrt{2}}.$$

এখন $\because$ অধিবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু উহার নাভি ও নিয়ামক হইতে সমদূরবর্তী

$\therefore$ $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}$

or, $(x+1)^2+(y-1)^2=\dfrac{(x+y+1)^2}{2}$

or, $2(x+1)^2+2(y-1)^2=(x+y+1)^2$

or, $2x^2+4x+2+2y^2-4y+2=x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$

or, $x^2+y^2+2x-6y-2xy+3=0$

or, $(x-y)^2+2x-6y+3=0$ ইহাই সমীকরণ।

(*b*) $y^2=4x$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও স্থানাঙ্ক কত ?

অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ : $y^2=4ax$

এখানে $y^2=4x$ $\quad\therefore$ $4x=4ax$ $\quad$ or $a=1$

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $=(a, 0)$ অর্থাৎ $(1, 0)$

নাভিলম্ব $=4a=4\times1=4.$

74. $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা ও নাভির স্থানাঙ্ক কত হইবে ?

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ : $4x^2+9y^2=36$ বা, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

এখানে $b^2=4$ এবং $a=3$

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 4}{3}=\frac{8}{3}$

উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{9-4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)=\left(\pm 3\times\frac{\sqrt{5}}{3},\ 0\right)$

$=(\pm\sqrt{5}, 0)$

75(a). তিনটি সরলরেখার পোলার সমীকরণ $r\cos(\theta-\alpha)=l$, $r\cos(\theta-\beta)=m$ এবং $r\cos(\theta-\gamma)=n$, সরলরেখা তিনটি কি শর্তে সমবিন্দু হইবে।

ধরা যাক প্রদত্ত সরলরেখা তিনটি (p, ϕ) বিন্দুগামী।

সুতরাং, $(p, \phi$ সরলরেখা তিনটির সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore\ p\cos(\phi-\alpha)=l\cdots$(i)

$p\cos(\phi-\beta)=m\cdots$(ii)

এবং $p\cos(\phi-\gamma)=n\cdots$(iii)

সমীকরণগুলি হইতে p ও ϕ অপনয়ন করিলে পাওয়া যায়

$l\sin(\beta-\gamma)+m\sin(\gamma-\alpha)+n\sin(\alpha-\beta)=0$

ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

(**b**) দেখান যে $r\cos(\theta-\alpha)=p$ সরলরেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $r\cos(\theta-\alpha)=p'$.

ধরা যাক $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার সমীকরণ $r\cos(\theta-\alpha)=p$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ রেখা, $\overleftrightarrow{AB}$র সমান্তরাল। যেহেতু $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল, সুতরাং পোল হইতে $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপর লম্ব, $\overleftrightarrow{CD}$র উপরও লম্ব।

ধরা যাক এই লম্ব $\overleftrightarrow{CD}$ রেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $m\angle NOX=\alpha$; ধরা যাক $OP'=p'$, সুতরাং $\overleftrightarrow{CD}$ রেখার উপর যে কোন বিন্দু p-এর স্থানাঙ্ক (r, θ) হইলে

$p'=OP=r\cos\angle PON=r\cos(\theta-\alpha)$

$\therefore\ \overleftrightarrow{CD}$ সরলরেখার সমীকরণ $r\cos(\theta=\alpha)=p'$ প্রমাণিত।

1974

1. (a) If

$$\frac{\tan(a+\beta-\gamma)}{\tan(a-\beta+\gamma)}=\frac{\tan\gamma}{\tan\beta},$$

prove that either $\sin(\beta+\gamma)=0$ or $\sin 2a+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=0$.

(b) Find the value of

$$\log_{10} 2+16 \log_{10} \frac{16}{15}+12 \log_{10} \frac{25}{24}+7 \log_{10} \frac{81}{80}.$$

(c) If a straight line drawn from an angular point of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle, the straight line is the internal bisector of that angle. Prove this.

2. Two passengers of a train had together 160 kilograms of luggage between them, and were charged Rs. 4 and Rs 2 respectively for excess of luggage over the weight allowed free. Had the luggage all belonged to one person, he would have been charged Rs. 7 for excess. Find how much luggage each had, and how much is allowed free.

(b) If one of the roots of $x^2-px+q=0$ is the square of the other, show that $p^3-q(3q-1)+q^2=0$.

(c) Prove that the length of any tangent to a parabola intercepted between its point of contact and the directrix subtends a right angle at the focus.

3. (a) If

$$\tan\theta=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan A/2 \text{ and } \cos\phi=\frac{b+a\cos A}{a+b\cos A}$$

pcove that $\phi=2\theta$.

(b) A sphere is placed inside and inverted hollow corical vessel of base radius 5 cm and the vertical height 12 cm. If the highest point of the sphere is at the level of the base of the cone, find the radius of the sphere. Show that the ratio of the volumes of the sphere and the conical vessel is 40 : 81.

(c) Calculate the mean and median for the following frequency distribution :

Weight in kilograms :—	46 – 48	49 – 51	52 – 54	55 – 57	58 – 60
No of girls :—	5	8	15	10	4

4. (a) Two persons are awarded pensions in the proportion of the square root of the number of years they have served. One has served 9 years longer than the other and receives a pension greater by £ 50. If the length of service of the first had exceeded that of the second by $4\frac{1}{2}$ years long, had their pensions would have been in the proportion of 9 : 8. How served, and what were their respective pensions ?

(b) Prove that the feet of the perpendiculars drawn to the three sides, of a triangle from any point on its circum-circle, are collinear.

(c) Tangents are drawn from (h, k) to the circle $x^2+y^2=a^2$. Prove that the area of the triangle formed by them and the straight line joining their point of contact is

$$a\left(\frac{h^2+k^2-a^2}{h^2+k^2}\right)^{3/2}$$

Group B

5. "Mathematics is a dynamic activity and not a static body of accepted dogma," Justify the statement in connection with a discussion of the ultimate aims of teaching mathematics in the secondary schools.

6. Compare and contrast the analytic method of teaching mathematics in the secondary schools with the synthetic method giving at least one suitable illustration.

7. Discuss the place of History of Mathematics in the teaching of the subject, In what ways will the historical order of presentation of the subjectmatter of mathematics to the pupils be useful ?

8. Write pedagogical notes on any two of the following.

(a) Introduction to the idea of infiinity in higher classes of a secondary school. (d) Correlation of Algebra *with* Geometry and Arithmetic.

Group C

9. Draw up Lesson Notes on any one of the following topics. indicating the class for which your lesson is intended.

(a) Extraction of square root in Algebra by the method of successive divisions.

(b) Finding the equation of the tangent to the parabola $y^2=4ax$ at the point (l, m) on it.

(c) Proving that the straight lime joining the middle points of two sides of a traingle is parallel the third side and half of it.

(d) Proving geometrically that

sin (C+D) = sin C cos D = cos C sin D

where C and D are both acute angles and C > D

1975

Answer que tion No. 13 and two from either Group A or Group B and two from Group C.

1. (a) $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ form a G. P. with common ratio r, fiind the sum of $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots$ to n terms of a_1 and r.

(b) If $\sin\alpha = A \sin(\alpha+\beta)$, prove that

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos(\beta-A)}.$$

(c) If G be the centroid of a triangle ABC, prove that

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2).$$

2. (a) Pure milk contains 89% water. If a sample of milk is

und to contain 90% water, what is the extent of adulteration in 23 tres of such milk ?

(b) Find the Mean, Median and Mode of the following distribution f scores ;

50—59	60—69	70—79	80—89	90—99	100—109
5	20	40	50	30	6

(c) If the straight line $lx+my+1=0$, touches the circle $x^2+y^2=a^2$, show show that the locus of (l, m) is another circle of radius a', uch that $aa'=1$.

3. (a) The angle θ is divided into two parts such that the ratio f the tangents of the parts is λ. Show that the difference x between he parts is given by.

$$\sin x=\frac{\lambda-1}{\lambda-1}\sin\theta.$$

(b) How many metres of canvas 66 cm. wide are required to onstruct a conical tent 16 metres high and 24 metres diameter ?

(c) Through a given point P within a circle with centre C, a erpendicular is drawn on the diameter through P. The perpendicular uts the circle at T and T^1. The tangents at T and T^1 intersect the iameter at P^1. If Q be any point on the circumference of the given ircle, show CQ is a tangent to the circle through P, Q and P^1

4. (a) If $\log_4(x+12)\times\log_x 2=1$, find x.

(b) If the line through $A\,(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ and B $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ s produced to the point $M\,(x, y)$, so that $AM : BM$ as $b : a$, prove that

$$x+y\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

(c) From a point on the horizontal plane, the elevation of the top f a hill is 45°. After walking 5 km towards the summit up a slope nclined at an angle of 15° to the horizon, the elevation is 75°. Find he height of the hill.

Group B

5. (a) During a sale, a shopkeeper reduced his goods 50% below narket prices which had originally been fixed to allow 25% profit on elling price after deducting 10% discount for cash. What per cent id he gain or lose ?

(b) 100 marbles were distributed among a number of boys and irls. Each boy received 7 marbles and each girl received 5 marbles. Find the minimum number of boys and girls together.

(c) The poins A, B, C and D of a rectangle $ABCD$ are joined to a oint P outside the rectangle. Prove that

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

6. (a) A cistern 12 metres long, 8 metres deep and 10 metres broad is being emptied by a pipe of cross sectional area 240 sq. cms. Find the time required to empty the cistern, when water is flowing t 36 kilometres per hour.

(b) (i) If $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\theta$, show that $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\theta$, θ being a positive acute angle

(ii) Eliminate θ from the equations : $\sin\theta - \cos\theta = \alpha$, and $\sec\theta - \operatorname{cosec}\theta = b$.

(c) If $a^2 = by + cz$, $b^2 = cz + ax$ and $c^2 = ax + by$, show that

$$\frac{x}{a+x} + \frac{y}{b+y} + \frac{z}{c+z} = 1.$$

7. (a) Prove that the sum of the in-radius and circum-radius of a right angled triangle is equal to half the sum of the sides containing the right angle.

(b) A person standing on the bank of a river observes the angle subtended by a tree on the opposite bank is 60°. When he retires 40 metres from the bank, he finds the angle to be 30°. Find the height of the tree and the breadth of the river.

(c) Simplify :

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

8. (a) Find the weight of a cast iron roller with internal diameter 22·5 cm, the thickness of the metal being ·75 cm and the length 1 metre. Weight of cast iron is 7·24 gm/cm^3.

(b) Factorise :

$$(a-2b+c)^3 + (b-2c+a)^3 + (c-2a+b)^3.$$

(c) Find the distance at which a man of height $5\frac{1}{2}$ ft, subtends an angle of 20°.

Group C

9. "Whether we regard mathematics from the utilitarian point of view or from the purely logical aspect, it is clear that the chief end of mathematical study must be to make the pupil think."

Discuss the statement with reference to the ultimate aims of teaching mathematics in our schools.

10. Distinguish between the deductive and inductive methods as applied to the teaching of mathematics in secondary schools. Explain with illustration the nature of mathematical induction,

11. Discuss the specific aims of teaching algebra in secondary schools, What steps would you take for the realisation of those aims ?

12. Write notes on any two of the following :

(a) Importance of preparation and planning of work in the teaching of mathematics, (b) Addition of directed numbers. (c) Non-Euclidean Geometry with special reference to its origin and development. (d) Role of heuristic method in teaching mathematics,

Group D

13. Draw up lesson notes on any one of following topics indicating the class for which the lesson is intended :

(a) First lesson on profit and loss. (b) Factorisation of a quadratic expression of the from x^2+px+q, by breaking the middle term, where p and q are both positive integers.

(c) Proving that the three angles of a triangle are together equal to two right angles. (d) Finding the trigonometric ratios of angle 30°.

1976

Group A

1. (a) If the difference of the roots of the equation $x^2+px+q=0$ be the same as that of the roots of the equation $x^2-qx+p=0$, show that $p+q+4=0$, unless $p=q$.

(b) Compute the Mean and S.D. of the distribution of the distribution of scores :

Scores	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	45—49	50—54
Frequency	3	11	18	48	15	4	1

2. (a) If $\tan\frac{A}{2}=\tan^3\frac{B}{2}$ and $\tan B=2\tan C$,

prove that $A+B=2C$.

(b) Find the length of the chord intercepted by the straight line $3x-4y+5=0$ from the circle passing through the points (1, 2), (3, −4) and (5, −6).

3. (a) The whole surface of a 6 inch long hollow pipe is 308 sq. inches. The outer diameter of the pipe is 8 inches. The weight of the material of which it is made is 4 oz/inch³. Determine the weight of the pipe.

(b) In a triangle ABC, D and E are the mid-points of AB and CD respectively. If AE is produced to meet BC in G, prove that $GC=\frac{1}{2}BC$.

4, (a) Solve :

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

(b) Divide a right circular cone into two parts by a cross-section parallel to the base such that the curved surfaces of the two parts are equal in area.

Group B

5. (a) In a partnership business A contributed Rs. 12,000 and B Rs. 18,000. B was to receive 15% of the profit for his salary as manager. At the end of seven months A withdrew one-third of his capital and two months later B withdrew one-half of his. The profit for the year amounted to Rs. 6,260. What sum of money ought each to receive ?

(*b*) *PQRS* is a parallelogram and *PQ* subtends a right angle at mid-point of *RS*. Show that $PQ=2QR$.

6. (*a*) (*i*) Prove that $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$,

(*ii*) If $a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$ and $a\sec\theta+b\,\text{cosec}\,\theta=1$

Show that $a^{2/3}+b^{2/3}=1$.

(*b*) A pyramid on a square base has every edge 100 ft long, the edge of a cube of equal volume with the pyramid.

[Given : log 2 = ·3010, log 3 = ·4771 and log 61·77 = 1·7908]

7. (*a*) The angles of depression of two consecutive mile-st were observed from an aeroplane stationed on the vertical p through the mile-stones to be 30° and 60°. Find the height of plane,

(*b*) If *x*, *y*, *z* be in *G. P.*, prove that $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{2y}$, $\frac{1}{y+z}$ are *A.P*.

8. (*a*) Prove that $\log_a(ab)\times\log_b(ab)=\log_a(ab)+\log_b(ab)$.

(*b*) A solid sphere is placed in an inverted conical vessel w radius is 5 cm and height is 12 cm so that the sphere touche lateral surface and top of the inverted cone. Find the ratio of volume of the cone to that of the sphere.

Group C

9. "Mathematics is primarily taught on accout of the me training it affords and the knowledge of facts it imparts," Discuss.

10. Illustrate with suitable examples the analytic and synt methods as applied in the teaching of mathematics. Compare the

11. What are the three methods of introducing algebr secondary schools ? Discuss the advantages and disadvantages of method.

12. Write notes on *any two* of the following :

(*a*) Place of history of mathematics in teaching the subje
(*b*) Use of algebra and geometry in arithmetic.
(*c*) Mathematical laboratory,
(*d*) Checks and rough work in mathematics.

Group D

13. Write lesson notes on *any one* of the following topics indic the class for which your lesson is intended :

(*a*) First lesson on addition of fractions.
(*b*) First lesson on simultaneous equations.
(*c*) Proving that the line joining the mid-points of two of a triangle is parallel to and half of the third side.
(*d*) Proving that the trigonometric ratios for the same are always the same.